Дослідження в математиці і механіці. — 2021. — Т. 26, вип. 1(37). — С. 7–19

УДК 517.13

М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова
Національний Технічний Університет України “Київський Політехнічний
Інститут імені Ігоря Сікорського”

ПРО ТОЧКОВИЙ СПЕКТР, ЩО ВИНИКАЄ ПРИ СИНГУЛЯРНО НЕСИМЕТРИЧНО СКІНЧЕНОГО РАНГУ ЗБУРЕННЯХ КЛАСУ $\mathcal{H}_{-1}$ САМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

В роботі побудований сингулярно несиметрично скінченого рангу збурений оператор класу $\mathcal{H}_{-1}$ із заданими новими точками точкового спектром і відповідними заданими власними векторами. Точки спектру можуть бути довільними і накладатися на неперервний спектр незбуреного оператора. Власні вектори вибиаються із умовою, що їх лінійна оболонка не лежить у області визначення незбуреного оператора. Запропонований метод побудови є новим і для самоспряжених достатньо повно досліджених збурень. Для побудови використане узагальнення сингулярно рангу один несиметричні збурення класу $\mathcal{H}_{-1}$ самоспряженого оператора на випадок скінченого рангу. Розглядаються лише збурення класу $\mathcal{H}_{-1}$, то ж наведені два варіанта побудови збуреного оператора, тобто у прямій формі і у формі резольвенти, яка є загальною, досконалішою і має подальші перспектриви у дослідженнях. Для повноти та зручності досліджень наведені означення сингулярно несиметрично скінченого рангу збуреного оператора класу $\mathcal{H}_{-1}$ із збуренням заданим повною а не діагональною матрицею. При цьому зображення збуреного оператора у прямій формі і у формі резольвенти є також новими.

MSC: 47A10, 47A55, 47A75.

Ключові слова: сингулярне збурення, ранг збурення, клас збурення, резольвента, спектр, власні числа, власні вектори.

DOI: 10.18524/2519-206X.2021.1(37).246534.

1. Вступ

Симетричні збурення самоспряжених операторів, які ведуть до самоспряженого збуреного оператора достатньо детально описані у монографіях [1; 2].

В роботах [3; 4] вперше розглянуті сингулярні несиметричні рангу один збурення самоспряженого оператора та описані відмінності точкового спектра, який виникає при такому збуренні.

В роботі [5] вперше розглянуті сингулярні несиметричні скінченого рангу збурення самоспряженого оператора.

Надійшла 30.06.2021

В [6; 7] для довільного самоспряженого оператора будується сингулярно збурений оператор із заданими новими точками точкового спектру і заданими власними значеннями. Проте оператор будується рекурентним чином, шляхом послідовних збурень.

У цій роботі пропонуються узагальнення результатів робіт [6; 7], та [3; 4] на випадок несиметричних класу $\mathcal{H}_{-1}$ збурень скінченого рангу. І метод побудови не рекурентний, що є новим і для самоспряженого випадку.

Тобто, розглядається у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ незбурений самоспряжений оператор A і несиметрично збурений замкнений оператор $\tilde{A}$, який збігається із A на деякій щільній множині в $\mathcal{H}$ (зокрема і $\tilde{A}^*$ також збігається із A на деякій щільній множині в $\mathcal{H}$).

Тепер нехай задані числа $\lambda_i \in \mathbb{C}$ і вектори $\varphi_i \in \mathcal{H}$ та $\psi_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ із деякими неважкими умовами. Задача роботи полягає у побудові оператора $\tilde{A}$, який не тільки збігається з A на щільній множині, але при цьому $\tilde{A}\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$ та $\tilde{A}\psi_i = \bar{\lambda}_i \psi_i$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$.

1. Попередні відомості.

Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$, задано необмежений самоспряжений оператор A із областю визначення $\mathfrak{D}(A)$. Позначимо через $\rho(A)$ множину регулярних точок оператора A.

Розглянемо ланцюг просторів, побудований за оператором A:

$$\mathcal{H}_{-2} \supset \mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_{+1} \supset \mathcal{H}_{+2}, \tag{1}$$

де $\mathcal{H}_{+k} = \mathfrak{D}(|A|^{k/2})$ – позитивний простір з нормою $\|\varphi\|_{+k} = \|(|A|+I)^{k/2}\varphi\|$, $\varphi \in \mathfrak{D}(|A|^{k/2})$, $\mathcal{H}_{-k}$ – поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|f\|_{-k} = \|(|A| + I)^{-k/2} f\|$, $f \in \mathcal{H}$, $k = 1, 2$, I – одиничний оператор в $\mathcal{H}$. Очевидно $\mathcal{H}_{+2} = \mathfrak{D}(A)$. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначимо дуальний скалярний добуток між просторами $\mathcal{H}_{+1}$ і $\mathcal{H}_{-1}$.

Розширення оператора A за неперервністю на все $\mathcal{H}_{-1}$ можна вважати обмеженим оператором, що діє з $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Таке розширення, тимчасово, позначимо через $\mathbf{A}$.

У ланцюгу (1) розглянемо обмежений лінійний оператор $V = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \langle \cdot, \omega_i \rangle \delta_j$, $n < \infty$, $\omega_j, \delta_j \in \mathcal{H}_{-1}$ із областю визначення $\mathfrak{D}(V) \subset \mathcal{H}_{+1}$ і областю значень $\mathfrak{R}(V) \subset \mathcal{H}_{-1}$, $\aleph = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j}^{n}$ – матриця констант зв'язку, де $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Сума $\mathbf{A} + V$ є обмеженим оператором в $\mathcal{H}_{-1}$.

Розглянемо оператор $\tilde{A}$, заданий виразом:

$$\tilde{A} = A + V = A + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}\langle\cdot,\omega_i\rangle\delta_j, \tag{2}$$

який розуміється як оператор $\mathbf{A} + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}\langle\cdot,\omega_i\rangle\delta_j$, з простору $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$, звужений на $\mathcal{H}$. Такий оператор називають (за аналогією із самоспряженими випадками) сингулярно несиметрично збуреним класу $\mathcal{H}_{-1}$ відносно оператора A.

У разі, коли хоча б один з векторів δ_j, ω_i, $i, j = 1, 2, ..., n < \infty$ не належить $\mathcal{H}_{-1}$, але належить $\mathcal{H}_{-2}$, попередні міркування (а також і подальші) не змістовні.

Далі у роботі будемо традиційно використовувати позначку A замість $\mathbf{A}$, якщо це не буде вести до суперечності.

Означення 1 ([5])**.** Нехай A — необмежений самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Для наборів лінійно незалежних векторів $\{\omega_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{H}_{-1}$ і $\{\delta_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathcal{H}_{-1}$, $n < \infty$, таких що $\Omega \cap \mathcal{H} = \{0\}$, $\Delta \cap \mathcal{H} = \{0\}$, де $\Omega := \mathrm{span}\{\omega_i\}_{i=1}^{n}$, $\Delta := \mathrm{span}\{\delta_j\}_{j=1}^{n}$, оператор $\tilde{A}$ називається сингулярно збуреним класу $\mathcal{H}_{-1}$ відносно A, якщо при деякому фіксованому $z \in \rho(A)$ його область визначення

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \left\{ \vartheta = \phi - \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)\langle\phi,\omega_i\rangle(A-z)^{-1}\delta_j \mid \phi \in \mathfrak{D}(A) \right\}, \tag{3}$$

де $b_{i,j}(z)$ – елементи матриці $B_1(z) = \aleph G_1(z)^{-1}$, $G_1(z) = (I + \Phi_1(z)\aleph)$, за умови det $G_1(z) \neq 0$, $\aleph = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$, $\Phi_1(z) = \big((\delta_i, (A-\bar{z})^{-1}\omega_j)\big)_{i,j=1}^{n}$, I – одиничний оператор; та

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\tilde{A}) =& \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} \dot{+} \mathrm{span}\{(A-z)^{-1}\delta_j\}_{j=1}^{n}, \\ &\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} = \left\{\phi \in \mathfrak{D}(A) \mid ((A-z)\phi, (A-\bar{z})^{-1}\omega_j) = 0,\ j = 1, 2, ..., n\right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

за умови det$G_1(z) = 0$; і дія на векторах з $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ задається правилом

$$(\tilde{A} - z)\vartheta = (A - z)\phi. \tag{5}$$

Такий оператор позначається $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^{n}(A)$.

Насправді, означення 1 є більш загальним, а ніж в [5], оскільки в [5] використовувалася діагональна матриця.

Теорема 1. *Дія сингулярно несиметрично рангу n збуреного самоспряженого оператора вигляду (2) на векторах з області визначення $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ (3) (та зокрема (4)) задовольняє (5).*

Доведення теореми мало відрізняється від наведеного у частинному (діагональному) випадку в [5] і без особливих зусиль переноситься на не діагональний випадок.

Також в [5] наведено опис $\tilde{A} \in \mathcal{P}^n_{-1}(A)$ у формі резольвенти.

Теорема 2. [5] *Нехай A – необмежений самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і $\tilde{A} \in \mathcal{P}^n_{-1}(A)$. Тоді резольвенти $R_z = (A - z)^{-1}$ і $\tilde{R}_z = (\tilde{A} - z)^{-1}$ пов'язані формулою типу М.Крейна, для $z, \xi \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$:*

$$\tilde{R}_z = R_z + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z) \tag{6}$$

із векторно-значними функціями

$$n_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}n_j(\xi),\ m_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}m_j(\xi),\ j = 1, 2, ..., n, \tag{7}$$

де $n_j(z), m_j(z) \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, і матрично-значною функцією $B_1(z)^{-1} = \{b_{i,j}(z)\}^n_{i,j=1}$, такою що

$$B_1(z)^{-1} - B_1(\xi)^{-1} = (z - \xi)\Gamma(n_i(\xi), m_j(\bar{z})), \tag{8}$$

де $\Gamma(\ \cdot\ \cdot\ )$ – матриця Грама векторів $n_i(z) = R_z\omega_i$, $m_j(z) = R_z\delta_j$ і коефіцієнти $0 < |\alpha_i| < \infty$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Для подальшого розгляду також буде використовуватися і обернена задача.

Теорема 3. [5] *Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ заданий самоспряжений оператор A, тоді операторно-значна функція*

$$\tilde{R}_z := (A - z)^{-1} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z), \quad z \in \rho(A) \tag{9}$$

є резольвентою сингулярно збуреного класу $\mathcal{H}_{-1}$ оператора, якщо для $n_i(\bar{z})$, $m_i(z)$, $j = 1, 2, ..., n$ та $B_1(z) = \{b_{i,j}(z)\}_{i,j=1}^{n}$ виконуються співвідношення:

$$n_j(\bar{z}) = (A-\bar{\xi})(A-\bar{z})^{-1}n_j(\bar{\xi}),\ m_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}m_j(\xi),\ j = 1, 2, ..., n, \tag{10}$$

$$B_1(z)^{-1} - B_1(\xi)^{-1} = (z-\xi)\Gamma(m_i(\xi), n_j(\bar{z})), \tag{11}$$

і $\mathrm{span}\{n_i(z)\}_{i=1}^{n}, \mathrm{span}\{m_i(z)\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$.

2. Нові точки точкового спектру.

Нехай задані деякі числа $\lambda_i \in \mathbb{C}$ і вектори $\varphi_i \in \mathcal{H}$ та $\psi_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$. Побудуємо оператор $\tilde{A}$, який збігається з A на щільній множині, і для якого обрані числа $\lambda_i \in \mathbb{C}$ є власними числами, а вектори $\varphi_i \in \mathcal{H}$ та $\psi_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ – власними векторами.

Теорема 4. *Для заданого самоспряженого оператора A в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і набору чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ та векторів $\varphi_i, \psi_i \in \mathcal{H}_{+1}$, таких що* $\mathrm{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, $\mathrm{span}\{\psi_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, *існує єдиний сингулярно несиметрично рангу n класу $\mathcal{H}_{-1}$ оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^{n}(A)$, такий що $\tilde{A}\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$ і $\tilde{A}\psi_i = \bar{\lambda}_i\psi_i$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$.*

При цьому оператор $\tilde{A}$ подається у вигляді:

$$\tilde{A} = A - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\cdot, \omega_i)\delta_j, \tag{12}$$

де вектори ω_i, δ_j, $i, j = 1, 2, ..., n$ визначаються виразами

$$\omega_i = (A - \bar{\lambda}_i)\psi_i, \quad \delta_j = (A - \lambda_j)\varphi_j, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{13}$$

а матриця констант зв'язку $\aleph = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ є оберненою до матриці $G = \{(A-\lambda)\varphi_i, \psi_j\}_{i,j=1}^{n}$, за умови $\mathrm{det}G \neq 0$.

Доведення. Запишемо задачу на власні значення для оператора вигляду (12):

$$\tilde{A}\varphi_k = A\varphi_k - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\varphi_k, \omega_i)\delta_j = \lambda_k\varphi_k, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

звідки, використовуючи (13), отримуємо

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\varphi_k, \omega_i)\delta_j = \delta_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Оскільки вектори φ_i, $i = 1, 2, ..., n$ є лінійно незалежними, то і δ_i, $i = 1, 2, ..., n$ – також є лінійно незалежними через лінійність A. Отже з останньої рівності отримуємо

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\varphi_k, \omega_i)\delta_j = 0, \quad \text{якщо } j \neq k,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\varphi_k, \omega_i)\delta_j = \delta_k, \quad \text{якщо } j = k.$$

Якщо, тимчасово, позначимо елементи матриці $G = \{g_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$, то з останніх рівностей потрібно показати

$$\sum_{i,j=1}^{n} (g_{i,j})^{-1}(\varphi_k, \omega_i)\delta_j = 1.$$

Взагалі $G^{-1} = \{\frac{\Delta_{i,j}}{\Delta}\}_{i,j=1}^{n}$, де $\Delta_{i,j}$ – відповідні алгебраїчні доповнення при обчисленні оберненої матриці G^{-1}, і $\Delta = \det G$. Дійсно для $j = k$:

$$\frac{\Delta_{k,1}}{\Delta} g_{k,1} + \frac{\Delta_{k,2}}{\Delta} g_{k,2} + ... + \frac{\Delta_{k,n}}{\Delta} g_{k,n} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1.$$

А для $j \neq k$:

$$\frac{\Delta_{p,1}}{\Delta} g_{k,1} + \frac{\Delta_{p,2}}{\Delta} g_{k,2} + ... + \frac{\Delta_{p,n}}{\Delta} g_{k,n} = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{p,1} g_{k,1} + \Delta_{p,2} g_{k,2} + ... + \Delta_{p,n} g_{k,n}\right) = 0.$$

Останній вираз дорівнює нулю, тому що це визначник матриці у якої на на місті рядка $(g_{p,i})$ поставлений ще раз рядок $(g_{k,i})$ і розкладом за цим рядком обчислений визначник, тобто визначник матриці у якої два однакові рядки.

Аналогічним чином розв'язується і задача для спряженого оператора:

$$\tilde{A}^* \varphi_k = A\varphi_k - \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\alpha}_{j,i}(\psi_k, \delta_i)\omega_j = \bar{\lambda}_k \psi_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Єдиність випливає із форми побудови $\tilde{A}$. За заданими набором чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$, та векторів $\varphi_i, \psi_i \in \mathcal{H}_{+1}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ однозначно будуються вектори ω_i, і δ_i, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ та матриця $G = \{((A - \lambda_i)\varphi_i, \psi_j)\}_{i,j=1}^{n}$, яка однозначно визначає $\aleph = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$. Зрозуміло, що форма доданку є єдиною із точністю до унітарної еквівалентності.

Факт належності отриманого оператора $\tilde{A}$ до класу $\mathcal{H}_{-1}$ випливає з того, що з $\text{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, $\text{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, слідує $\text{span}\{\omega_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$, $\text{span}\{\delta_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$. Це є наслідком основної леми сингулярно збурених операторів з використанням методу зсуву, див. [10]. Отже терема повністю доведена.

В якості наслідку до теореми 4 сформулюємо випадок самоспряженого збурення, який є на сьогодні новим і не міститься у цитованих джерелах.

Наслідок. *Для заданого самоспряженого оператора A в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і набору чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ та взаємно ортогональних векторів $\varphi_i \in \mathcal{H}_{+1}$, таких що* $\text{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$ *існує єдиний сингулярно симетрично збурений рангу n, класу $\mathcal{H}_{-1}$ оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^n(A)$, такий що $\tilde{A}\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$.*

При цьому оператор $\tilde{A}$ подається у вигляді

$$\tilde{A} = A - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\cdot, \omega_i)\omega_j,$$

де вектори ω_i, $i, j = 1, 2, ..., n$ визначаються виразом $\omega_i = (A - \lambda_j)\varphi_i$, $i = 1, 2, ..., n$, а (симетрична) матриця констант зв'язку $\aleph = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ є оберненою до матриці $G = \{(A - \lambda)\varphi_i, \varphi_j\}_{i,j=1}^n$.

Зокрема, для самоспряженого випадку матриця G завжди така, що $\det G \neq 0$.

Оскільки збурений оператор можна подати і у формі резольвенти – теорема 3, то також формулюється і теорема про спектр – аналогічно до теореми 4.

Теорема 5. *Для заданого самоспряженого оператора A в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і набору чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ та векторів $\varphi_i, \psi_i \in \mathcal{H}_{+1}$, таких що* $\text{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, $\text{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, *існує єдиний сингулярно несиметрично рангу n класу $\mathcal{H}_{-1}$ оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^n(A)$, такий що $\tilde{A}\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$ і $\tilde{A}\psi_i = \bar{\lambda}_i\psi_i$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$.*

При цьому оператор $\tilde{A}$ подається у вигляді:

$$\tilde{R}_z = R_z + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z), \tag{14}$$

де вектори $n_i(\bar{z})$, $m_j(z)$, $i, j = 1, 2, ..., n$ *визначаються виразами*

$$n_i(\bar{z}) = (A - \bar{\lambda}_i)(A - \bar{z})^{-1}\psi_i, \quad m_j(z) = (A - \lambda_j)(A - z)^{-1}\varphi_j, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{15}$$

а матриця $B(z) = \{b_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ *є оберненою до матриці* $G(z) = \{(\varphi_i, n_i(\bar{z}))\}_{i,j=1}^{n}$, *за умови* $\det G(z) \neq 0$.

Доведення. Запишемо задачу на власні значення для оператора вигляду (14):

$$\tilde{R}_z\varphi_k = R_z\varphi_k - \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\varphi_k, n_i(\bar{z}))m_j(z) = (\lambda_k - z)^{-1}\varphi_k, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

звідки, використовуючи (15), для кожного $k = 1, 2, ..., n$, отримуємо

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\varphi_k, n_i(\bar{z}))m_j(z) = (\lambda_k - z)^{-1}(A - \lambda)(A - z)^{-1}\varphi_k = (\lambda_k - z)^{-1}m_k(z).$$

Оскільки вектори φ_i, $i = 1, 2, ..., n$ є лінійно незалежними, то і $n_i(z)$, $i = 1, 2, ..., n$ – також є лінійно незалежними через лінійність A. Отже з останньої рівності отримуємо

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\varphi_k, n_i(\bar{z}))\delta_j = 0, \quad \text{якщо } j \neq k,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\varphi_k, n_i(\bar{z}))\delta_j = (\lambda_k - z)^{-1}\delta_k, \quad \text{якщо } j = k.$$

Покажемо, що

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\varphi_k, n_i(\bar{z}))m_j(z) = 1,$$

з $\{b_{i,j}\} = G^{-1} = \{\frac{\Delta_{i,j}}{\Delta}\}_{i,j=1}^{n}$, де $\Delta_{i,j}$ – відповідні алгебраїчні доповнення при обчисленні оберненої матриці G^{-1}, і $\Delta = \det G$. Дійсно, для $j = k$:

$$\frac{\Delta_{k,1}}{\Delta}b_{k,1} + \frac{\Delta_{k,2}}{\Delta}b_{k,2} + ... + \frac{\Delta_{k,n}}{\Delta}b_{k,n} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1,$$

А, для $j \neq k$:

$$\frac{\Delta_{p,1}}{\Delta}b_{k,1} + \frac{\Delta_{p,2}}{\Delta}b_{k,2} + ... + \frac{\Delta_{p,n}}{\Delta}b_{k,n} = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{p,1}b_{k,1} + \Delta_{p,2}b_{k,2} + ... + \Delta_{p,n}b_{k,n}\right) = 0,$$

Останній вираз дорівнює нулю, тому що це визначник матриці у якої на місті рядка $(b_{p,i})$ поставлений ще раз рядок $(b_{k,i})$ і розкладом за цим рядком обчислений визначник, тобто визначник матриці із двома однаковими рядками.

Аналогічним чином розв'язується і задача

$$\tilde{R}_z^*\psi_k = R_z^*\psi_k - \sum_{i,j=1}^{n} \bar{b}_{j,i}(\psi_k, m_i(z))n_j(\bar{z}) = (\bar{\lambda}_k - \bar{z})^{-1}\psi_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Далі використовуємо теорему 3. Дійсно, векторно-значні функції (15) задовольняють (10). До (15)

$$n_i(\bar{z}) = (A - \bar{\lambda}_i)(A - \bar{z})^{-1}\psi_i, \quad m_i(z) = (A - \lambda_j)(A - z)^{-1}\varphi_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{16}$$

запишемо і

$$n_i(\xi) = (A - \bar{\lambda}_i)(A - \xi)^{-1}\psi_i, \quad m_i(\xi) = (A - \lambda_i)(A - \xi)^{-1}\varphi_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{17}$$

З перших рівностей рядків (16) і (17) маємо:

$$(A - z)(A - \bar{\lambda}_i)^{-1}n_i(z) = \psi_i = (A - \xi)(A - \bar{\lambda}_i)^{-1}n_i(\xi).$$

Отже $n_i(z) = (A - \xi)(A - z)^{-1}n_i(\xi)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Аналогічно, з других рівностей рядків (16) і (17) маємо:

$$(A - z)(A - \lambda_i)^{-1}m_i(z) = \varphi_i = (A - \xi)(A - \lambda_i)^{-1}m_i(\xi)$$

Отже $m_i(z) = (A - \xi)(A - z)^{-1}m_i(\xi)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Матриця $B^{-1}(z)$ задовольняє (11). Дійсно

$$B^{-1}(z) - B^{-1}(\xi) = G(z) - G(\xi) =$$

$$\{(\varphi_i, n_j(\bar{z}))\}_{i,j=1}^{n} - \{(\varphi_i, n_j(\bar{\xi}))\}_{i,j=1}^{n} = \{(\varphi_i, [n_j(\bar{z}) - n_j(\bar{\xi})])\}_{i,j=1}^{n} =$$

$$\{(\varphi_i, [(A - \bar{\lambda}_i)(A - \bar{z})^{-1}\psi_j - (A - \bar{\lambda}_i)(A - \bar{\xi})^{-1}\psi_j])\}_{i,j=1}^{n} =$$

$$\{(\varphi_i, (A - \bar{\lambda}_i)[(A - \bar{z})^{-1} - (A - \bar{\xi})^{-1}]\psi_j)\}_{i,j=1}^{n} =$$

$$\{(\varphi_i, (A - \bar{\lambda}_i)(\bar{z} - \bar{\xi})(A - \bar{z})^{-1}(A - \bar{\xi})^{-1}\psi_j)\}_{i,j=1}^{n} =$$

$$(z - \xi)\{(A - \lambda_i)(A - \xi)^{-1}\varphi_i, (A - \bar{\lambda}_i)(A - \bar{z})^{-1}\psi_i\}_{i,j=1}^{n} =$$

$$(z-\xi)\Gamma(m_i(\xi), n_j(\bar{z}))_{i,j=1}^n.$$

Єдиність і факт належності отриманого оператора $\tilde{A}$ до класу $\mathcal{H}_{-1}$ тепер випливають із теореми 3, зокрема з того, що з $\operatorname{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1}\setminus\mathcal{H}_{+2}$, $\operatorname{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1}\setminus\mathcal{H}_{+2}$, отримується $\operatorname{span}\{\omega_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{-1}\setminus\mathcal{H}$, $\operatorname{span}\{\delta_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{-1}\setminus\mathcal{H}$. Це є наслідком основної леми сингулярно збурених операторів з використанням методу зсуву, див. [10]. Отже терема повністю доведена.

2. Висновки

Таким чином в роботі побудовані сингулярно несиметрично збурені оператори скінченого рангу класу $\mathcal{H}_{-1}$ із наперед заданими власними числами і власними векторами. Задача розв'язана у двох формах – прямій і форі резольвенти – не залежно від того, скільки і які власні числа були у незбуреного самоспряженого оператора, та які з них пропали при збуренні, а які ще нові з'явилися крім заданих.

У подальшому планується перенести ці результати на випадок не симетричного збурення класу $\mathcal{H}_{-2}$. Це вимагає допрацювати означення збуреного оператора на випадок не діагональної матриці, та враховувати при цьому параметри, які об'єктивно при цьому виникають. Окремий інтерес також залишається за збуренням нескінченного рангу навіть у самоспряженому випадку із наперед заданими власними числами власними векторами, побудованими у не рекурентний спосіб а за один крок.

Список літератури

1. **Альбеверио С.** Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хёэг-Крон, Х. Хольден. – Пер. с Р47 англ. – Москва: Мир, 1991. – 568 с.
2. **Albeverio S.** Singular perturbations of differential operators; solvable Schrödinger type operators / S. Albeverio, P. Kurasov. – Cambridge, Univ. Press. – 2000. – 265 p.
3. **Dudkin M.E.** Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Matematychni Studii. – 2017. – Vol. 48, № 2. – P. 156–164.
4. **Dudkin M.E.** On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2018. – Vol. 24, № 3. – P. 193–206.
5. **Дудкін М.Є.** Сингулярні скінченого рангу несиметричні збурення самоспряженого оператора / М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова // Нелінійні коливання. – 2021. – Т.24, № 2. – С. 1–10.

6. **Дудкін М.Є.** Про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченого рангу / М. Є. Дудкін, Кошманенко В. Д. // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 9. – P. 1269–1276.
7. **Albeverio S.** On the point spectrum of $\mathcal{H}_{-2}$-syngular perturbations / S. Albeverio, N. Dudkin, A. Konstantinov, V. Koshmanenko // Math. Nachr. – 2007. – Vol. 280, № 1-2. – P. 20-27.
8. **Albeverio S.** Schrödinger operators with nonlocal point interactions / S. Albeverio, L. Nizhnik // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 332. – P. 884–895.
9. **Albeverio S.** Inverse spectral problems for nonlocal Sturm-Liouville operators / S. Albeverio, R. Hryniv R, L. Nizhnik // Inverse Problems. – 2007. – Vol. 23. – P. 523–535.
10. **Koshmanenko V.** The Method of Rigged Spaces in Singular Perturbation Theory of Self-Adjoint Operators. Operator Theory: Advances and Applications, 253, / V. Koshmanenko, M. Dudkin. Birkhäuser, Springer International Publishing, Switzerland. – 2016. – xii+237 p.

Дудкин Н. Е., Дюженкова О. Ю.

О ТОЧЕЧНОМ СПЕКТРЕ, ВОЗНИКАЮЩЕМ ПРИ СИНГУЛЯРНО НЕ СИММЕТРИЧНО КОНЕЧНОГО РАНГА ВОЗМУЩЕНИЯХ КЛАССА $\mathcal{H}_{-1}$ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Резюме

В работе построен сингулярно несимметрично конечного ранга возмущённый оператор класса $\mathcal{H}_{-1}$ с заданными новыми точками точечного спектром и соответствующими заданными собственными векторами. Точки спектра могут быть произвольными и накладываться на непрерывный спектр невозмущенного оператора. Собственные векторы вибиаються с условием, что их линейная оболочка не лежит в области определения невозмущенного оператора. Предложенный метод построения является новым и для самоспряжених достаточно полно исследованных возмущений. Для построения использовано обобщение сингулярно ранга один несимметричные возмущения класса $\mathcal{H}_{-1}$ самоспряженого оператора на случай конечного ранга. Рассматриваются только возмущения класса $\mathcal{H}_{-1}$, а посему приведены два варианта построения возмущенного оператора, то есть в прямой форме и в форме резольвенты, которая является общей, более совершенной и имеет дальнейшие перспектривы в исследованиях. Для полноты и удобства исследований приведены определения сингулярно несимметрично конечного ранга возмущенного оператора класса $\mathcal{H}_{-1}$ с возмущением заданным полной а не диагональной матрицей. При этом представвления возмущенного оператора в прямой форме и в форме резольвенты также являются новыми.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, ранг возмущения, класс возмущения, резольвента, спектр, собственные числа, собственные векторы.

Dudkin M. E., Dyuzhenkova O. Y.

ON A POINT SPECTRUM ARISING BY SINGULARLY NON-SYMMETRICALLY FINITE RANK PERTURBATIONS $\mathcal{H}_{-1}$-CLASS OF A SELF-ADJOINT OPERATOR

Summary

A perturbed singularly of asymmetrically finite rank operator of class $\mathcal{H}_{-1}$ with given new points of the point spectrum and corresponding given eigenvectors is constructed. The points of the spectrum can be arbitrary and overlap with the continuous spectrum of the unperturbed operator. The eigenvectors are selected under the condition that their linear spen does not lie in the domain of the unperturbed operator. The proposed method of construction is new and for self-adjoint perturbed operator that is sufficiently fully studied. To construct, we use a generalization the singular rank one nonsymmetric perturbation of the class $\mathcal{H}_{-1}$ of a self-adjoint operator in the case of a finite rank. Only perturbations of the class $\mathcal{H}_{-1}$ are considered. For completeness and convenience of research, the definitions of a singularly asymmetrically finite rank of a perturbed operator of class $\mathcal{H}_{-1}$ with perturbation given by a complete and not a diagonal matrix are given. The representations of a perturbed operator in direct form and in the form of resolvents are also new.

Key words: singular perturbations, tank of perturbation, class of perturbation, resolvent, spectrum, eigenvalue, eigenvectors.

REFERENCES

1. Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. (2005) *Solvable models in quantum mechanics. Second edition With an appendix by Pavel Exner*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, . xiv+488 pp.
2. Albeverio S., Kurasov P. (2000) *Singular perturbations of differential operators; solvable Schrödinger type operators* Cambridge, Univ. Press, , 265p.
3. Dudkin M.E., Vdovenko T.I. (2017) *Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations* Matematychni Studii. Vol. 48, № 2, P. 156–164.
4. Dudkin M.E., Vdovenko T.I. (2018) *On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations* Methods Funct. Anal. Topology. Vol. 24, № 3, P. 193–206.
5. Dudkin M.E., Dyuzhenkova O.Y. (2021) *Сингулярні скінченого рангу несиметричні збурення самоспряженого оператора [Singular finite rank nonsimmetrically perturbatins of a self-adjoint operator].Nekiniini kolyvannia*, Vol, 24, № 2., P. 1-10.
6. Dudkin M. E., Koshmanenko V. D. (2003) *On the point spectrum of self-adjoint operators that appears under singular perturbations of finite rank* Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 55, № 9., P. 1532-–1541.
7. Albeverio S., Dudkin N., Konstantinov A., Koshmanenko V. (2007) *On the point spectrum of $\mathcal{H}_{-2}$-syngular perturbations* Math. Nachr. Vol. 280, № 1-2. – P. 20–27.
8. Albeverio S., Nizhnik L. (2007) *Schrödinger operators with nonlocal point interactions* // J. Math. Anal. Appl. Vol. 332, P. 884–895.
9. Albeverio S., Hryniv R., Nizhnik L. (2007) *Inverse spectral problems for nonlocal Sturm-Liouville operators* Inverse Problems. Vol. 23, P. 523–535.

10. Koshmanenko V., Dudkin M. (2016) *The Method of Rigged Spaces in Singular Perturbation Theory of Self-Adjoint Operators. Operator Theory: Advances and Applications, 253*, Birkhäuser, Springer International Publishing, Switzerland, xii+237 p.