Дослідження в математиці і механіці. — 2020. — Т. 25, вип. 2(36). — С. 95–102

УДК 517.983

С. А. Щёголев, В. В. Карапетров

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для квазилинейного матричного дифференциального уравнения, коэффициенты которого представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены достаточные условия существования решения аналогичной структуры

MSC: 15A24, 34C15.

Ключевые слова: матрица, дифференциальное уравнение, квазилинейный.

DOI: 10.18524/2519-206X.2020.2(36).233806.

1. Основные обозначения и определения

Матричные дифференциальные уравнения издавна привлекали внимание математиков, этим уравнениям посвящено множество работ. Из вышедших в последнее время отметим [1–5]. В настоящей статье построен аналог результатов работы [6] для квазилинейных матричных дифференциальных уравнений.

Пусть

$$G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon : \ t \in \mathbb{R}, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}$$

Определение 1. Скажем, что функция $f(t,\varepsilon)$ принадлежит классу $S(m;\varepsilon_0)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если:

1) $f : G(\varepsilon_0) \to \mathbb{C}$,

2) $f(t,\varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ по t,

3) $d^k f(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_k(t,\varepsilon)$ $(0 \le k \le m)$,

$$\|f\|_{S(m;\varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G(\varepsilon_0)} |f_k(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Определение 2. Скажем, что функция $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ принадлежит классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, если

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

Получена 04.01.2020

причём

1) $f_n(t,\varepsilon) \in S(m,\varepsilon_0)$ $(n \in \mathbb{Z})$,

2)

$$\|f\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \stackrel{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty,$$

3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\varphi \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in S(m,\varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} \varphi(t,\varepsilon) = \varphi_0 > 0$.

Определение 3. Скажем, что матрица $A(t,\varepsilon) = (a_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}}$ принадлежит классу $S_2(m;\varepsilon_0)$, $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, если $a_{jk} \in S(m;\varepsilon_0)$ $(j,k=\overline{1,N})$.

Определим норму

$$\|A(t,\varepsilon)\|_{S_2(m;\varepsilon_0)} = \max_{1\le j\le N} \sum_{k=1}^{N} \|a_{jk}(t,\varepsilon)\|_{S(m;\varepsilon_0)}.$$

Определение 4. Скажем, что матрица $B(t,\varepsilon,\theta) = (b_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=\overline{1,N}}$ принадлежит классу $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, if $b_{jk}(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(j,k=\overline{1,N})$.

Определим норму

$$\|B(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} = \max_{1\le j\le N} \sum_{k=1}^{N} \|b_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}. \qquad (1)$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим квазилинейное матричное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dX}{dt} = A(t,\varepsilon)X - XB(t,\varepsilon) + F(t,\varepsilon,\theta) + \mu\Phi(t,\varepsilon,\theta,X), \qquad (2)$$

где $A(t,\varepsilon), B(t,\varepsilon) \in S_2(m;\varepsilon_0)$, $F(t,\varepsilon,\theta) \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, матрица X принадлежит некоторой замкнутой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^{N\times N}$, где $\mathbb{C}^{N\times N}$ – пространство комплекснозначных $(N\times N)$-матриц вещественного аргумента. Матрица-функция $\Phi(t,\varepsilon,\theta,X)$ предполагается принадлежащей классу $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$ относительно t,ε,θ и непрерывной по X в D. $\mu \in [0,\mu_0]$ — малый вещественный параметр.

Изучается вопрос о существовании частных решений классов $F_2(m_1;\varepsilon_1;\theta)$ $(m_1 \le m, \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$ уравнения (2).

3. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть задано скалярное линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка*

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t,\varepsilon)x + u(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) \tag{3}$$

где $\lambda(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} |\text{Re } \lambda(t,\varepsilon)| = \gamma > 0$, $u(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. *Тогда уравнение (3) имеет единственное частное решение* $x(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. *Это решение даётся формуло:*

$$x(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \int\limits_T^t u(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon)) \exp\left(\int\limits_\tau^t \lambda(s,\varepsilon)ds\right) d\tau,$$

где

$$T = \begin{cases} -\infty, \ if \ \text{Re } \lambda(t,\varepsilon) \le -\gamma < 0, \\ +\infty, \ if \ \text{Re } \lambda(t,\varepsilon) \ge \gamma > 0, \end{cases}$$

и, кроме того, существует $K_0 \in (0,+\infty)$,*такое, что:*

$$\|x(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le K_0 \|u(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Доказательство леммы приведено в работе [7].

Лемма 2. *Пусть уравнение (2) таково, что существуют матрицы* $L_1(t,\varepsilon), L_2(t,\varepsilon) \in S_2(m;\varepsilon_0)$ *такие, что*

а) $|\det L_k(t,\varepsilon)| \ge a_0 > 0$, $(k = 1,2)$,

б) $L_1^{-1}(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)L_1(t,\varepsilon) = D_1(t,\varepsilon) = (d_{jk}^1(t,\varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}}$,
$L_2(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)L_2^{-1}(t,\varepsilon) = D_2(t,\varepsilon) = (d_{jk}^2(t,\varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}}$,

где $D_1(t,\varepsilon), D_2(t,\varepsilon)$ *– нижние треугольные матрицы* N*-го порядка, принадлежащие классу* $S_2(m;\varepsilon_0)$.

Тогда подстановкой

$$X = L_1(t,\varepsilon)YL_2(t,\varepsilon) \tag{4}$$

уравнение (2) приводится к виду:

$$\frac{dY}{dt} = D_1(t,\varepsilon)Y - YD_2(t,\varepsilon) - \varepsilon H_1(t,\varepsilon)Y - \varepsilon YH_2(t,\varepsilon) +$$
$$+ F_1(t,\varepsilon,\theta) + \mu\Phi_1(t,\varepsilon,\theta,Y), \tag{5}$$

где

$$H_1(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\ L_1^{-1}(t,\varepsilon)\frac{dL_1(t,\varepsilon)}{dt},\quad H_2(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\ \frac{dL_2(t,\varepsilon)}{dt}\ L_2^{-1}(t,\varepsilon),$$

$$F_1(t,\varepsilon,\theta)=L_1^{-1}(t,\varepsilon)F(t,\varepsilon,\theta)L_2^{-1}(t,\varepsilon),$$

$$\Phi_1(t,\varepsilon,\theta,Y)=L_1^{-1}(t,\varepsilon)\Phi(t,\varepsilon,\theta,L_1(t,\varepsilon)YL_2(t,\varepsilon))L_2^{-1}(t,\varepsilon).$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости леммы, достаточно в уравнении (2) произвести подстановку (4) и использовать условия леммы.

Лемма 3. *Пусть линейное матричное уравнение*

$$\frac{dY_0}{dt}=D_1(t,\varepsilon)Y_0-Y_0D_2(t,\varepsilon)+F_1(t,\varepsilon,\theta), \tag{6}$$

где матрицы $D_1(t,\varepsilon),D_2(t,\varepsilon),F_1(t,\varepsilon,\theta)$ *те же, что и в уравнении (5), таково, что*

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}\left|\operatorname{Re}\left(d_{jj}^1(t,\varepsilon)-d_{kk}^2(t,\varepsilon)\right)\right|\geq b_0>0\ (j,k=\overline{1,N}). \tag{7}$$

Тогда уравнение (6) имеет единственное частное решение $Y_0(t,\varepsilon,\theta)\in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, *и существует* $K_1\in(0,+\infty)$ *такое, что*

$$\|Y_0(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)}\leq K_1\|F_1(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть

$$Y_0=(y_{jk}^0(t))_{j,k=\overline{1,N}},\quad F_1(t,\varepsilon,\theta)=\left(f_{jk}^1(t,\varepsilon,\theta)\right)_{j,k=\overline{1,N}}.$$

Тогда, расписывая уравнение (6) в покомпонентной форме, придём к скалярной линейной системе дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dy_{jk}^0}{dt}=\sum_{s=1}^{j}d_{js}^1(t,\varepsilon)y_{sk}^0-\sum_{s=k}^{N}d_{sk}^2(t,\varepsilon)y_{js}^0+f_{jk}^1(t,\varepsilon\theta),\ j,k=\overline{1,N}.$$

Или

$$\frac{dy_{1N}^0}{dt}=\left(d_{11}^1(t,\varepsilon)-d_{NN}^2(t,\varepsilon)\right)y_{1N}^0+f_{1N}^1(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\ldots$$

$$\frac{dy_{11}^0}{dt}=\left(d_{11}^1(t,\varepsilon)-d_{11}^2(t,\varepsilon)\right)y_{11}^0-\sum_{s=2}^{N}d_{s1}^2(t,\varepsilon)y_{1s}^0+f_{11}^1(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\frac{dy_{2N}^0}{dt} = \left(d_{22}^1(t,\varepsilon) - d_{NN}^2(t,\varepsilon)\right) y_{2N}^0 + d_{21}^1(t,\varepsilon) y_{1N}^0 + f_{2N}^1(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\ldots$$

$$\frac{dy_{21}^0}{dt} = \left(d_{22}^1(t,\varepsilon) - d_{11}^2(t,\varepsilon)\right) y_{21}^0 + d_{21}^1(t,\varepsilon) y_{11}^0 - \sum_{s=2}^{N} d_{s1}^2(t,\varepsilon) y_{2s}^0 + f_{21}^1(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\ldots$$

$$\frac{dy_{NN}^0}{dt} = \left(d_{NN}^1(t,\varepsilon) - d_{NN}^2(t,\varepsilon)\right) y_{NN}^0 + \sum_{s=1}^{N-1} d_{Ns}^1(t,\varepsilon) y_{sN}^0 + f_{NN}^1(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\ldots$$

$$\frac{dy_{N1}^0}{dt} = \left(d_{NN}^1(t,\varepsilon) - d_{11}^2(t,\varepsilon)\right) y_{N1}^0 + \sum_{s=1}^{N-1} d_{Ns}^1(t,\varepsilon) y_{s1}^0 -$$

$$- \sum_{s=2}^{N} d_{s1}^2(t,\varepsilon) y_{Ns}^0 + f_{N1}^1(t,\varepsilon,\theta).$$

На основании леммы 1 с использованием условий настоящей леммы убеждаемся, что каждое из уравнений этой системы имеет решение класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. И, следовательно, уравнение (6) имеет единственное решение класса $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, и справедлива оценка (8).

4. Основные результаты.

Определим область:

$$\Omega = \left\{ Y \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta) : \|Y - Y_0\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \leq \beta;\ \beta > 0 \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть уравнение (5) таково, что*

1) $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} \left| \mathrm{Re}\left(d_{jj}^1(t,\varepsilon) - d_{kk}^2(t,\varepsilon) \right) \right| \geq b_0 > 0$ $(j,k = \overline{1,N})$;

2) *матрица-функция* $\Phi_1(t,\varepsilon,\theta,Y)$ *непрерывна по* Y, *и если* $Y \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, *то* $\Phi_1(t,\varepsilon,\theta,Y)$ *также принадлежит классу* $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$;

3) *существует* $L(\beta) \in (0,+\infty)$ *такое, что* $\forall\ Y_1, Y_2 \in \Omega$ *выполнено неравенство:*

$$\|\Phi_1(t,\varepsilon,\theta,Y_1) - \Phi_1(t,\varepsilon,\theta,Y_2)\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \leq L(\beta) \|Y_1 - Y_2\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Тогда можно указать такое $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$ *и такое* $\mu_1 \in [0,\mu_0)$, *что* $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$, *и* $\forall \mu \in [0,\mu_1)$ *уравнение (5) имеет единственное частное решение* $Y(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_2(m-1;\varepsilon_1;\theta)$.

Доказательство. Решение класса $F_2(m-1;\varepsilon_1;\theta)$ уравнения (5) будем искать методом последовательных приближений, выбрав в качестве начального приближения $Y_0(t,\varepsilon,\theta)$, а последующие приближения определив как решения класса $F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ линейных неоднородных матричных уравнений:

$$\frac{dY_{k+1}}{dt} = D_1(t,\varepsilon)Y_{k+1} - Y_{k+1}D_2(t,\varepsilon) - \varepsilon H_1(t,\varepsilon)Y_k - \varepsilon Y_k H_2(t,\varepsilon) + \\ + F_1(t,\varepsilon,\theta) + \mu\Phi_1(t,\varepsilon,\theta,Y_k),\ k = 0,1,2,\dots \quad . \tag{9}$$

Применяя обычную методику принципа сжимающих отображений [8], несложно показать, что при достаточно малом ε и достаточно малом μ все приближения (9) остаются внутри области Ω, и процесс (9) сходится по норме $\|\cdot\|_{F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)}$ к решению $Y(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ класса $F_2(m-1;\varepsilon_1;\theta)$ уравнения (5).

Теорема доказана.

Непосредственным следствием теоремы 1 является теорема 2.

Теорема 2. *Пусть уравнение (2) таково, что:*

1) выполнены условия леммы 2;

2) для уравнения (5), получающегося из уравнения (2) с помощью подстановки (4), справедлива теорема 1.

Тогда существуют такие $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$, $\mu_1 \in [0,\mu_0)$, *что* $\forall\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$, $\forall\ \mu \in [0,\mu_1)$ *уравнение (2) имеет единственное частное решение класса* $F_2(m-1;\varepsilon_1;\theta)$.

5. Заключение

Таким образом, для квазилинейного матричного дифференциального уравнения с коэффициентами, представимыми абсолютно и равномерно сходящимися рядами Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены достаточные условия существования частного решения аналогичной структуры.

Щоголев С. А., Карапетров В. В.

Про один клас розв'язків квазілінійних матричних диференціальних рівнянь

Резюме

Для квазілінійного матричного диференціального рівняння, коефіцієнти якого зображувані у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними

коефіцієнтами та частотою, отримано достатні умови існування розв'язку аналогічної структури.
Ключові слова: матриця, диференціальне рівняння, квазілінійний.

Shchogolev S. A., Karapetrov V. V.

On one class of solutions of the quasilinear matrix differential equations

Summary

In the mathematical description of various phenomena and processes that arise in mathematical physics, electrical engineering, economics, one has to deal with matrix differential equations. Therefore, these equations are relevant both for mathematicians and for specialists in other areas of natural science. Many studies are devoted to them, in which the solvability of matrix equations in various function spaces, boundary value problems for matrix differential equations, and other problems were investigated. In this article, a quasilinear matrix equation is considered, the coefficients of which can be represented in the form of absolutely and uniformly converging Fourier series with coefficients and frequency slowly varying in a certain sense. The problem is posed of obtaining sufficient conditions for the existence of particular solutions of a similar structure for the equation under consideration. For this purpose, the corresponding linear equation is considered first. It is written down in component-wise form, and, based on the assumptions made, the existence of the only particular solution of the specified structure is proved. Then, using the method of successive approximations and the principle of contracting mappings, the existence of a unique particular solution of the indicated structure for the original quasilinear equation are proved.
Key words: matrix, differential equation, quasilinear.

References

1. **Chuiko S. M.** To issue of generalization of matrix differential-algebraic boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – **227**. – № 1. – P. 13 – 25.
2. **Chuiko S. M.** On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – **220**. – № 5. – P. 591 – 602.
3. **Чуйко С. М.** Элементы теории линейных матричных уравнений. – Славянск, 2017. – 163 с.
4. **Panasenko E. V., Pokutnui O. O.** Bifurcation conditions for the solutions of the Lyapunov equation in a Hilbert space // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – **236**. – № 3. – P. 313 – 332.
5. **Panasenko E. V., Pokutnui O. O.** Nonlinear boundary-value problems for the Lyapunov equation in the space L^p // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – **246**. – № 3. – P. 394 – 409.
6. **Kostin A. V., Shchogolev S. A.** On the Stability of Oscillations Representable by a Fourier Series with Slowly Varying Parameters // Differential Equations. – 2008. – V. 44. – № 1. – P. 45 - 51.

7. **Костин А.В., Щёголев С.А.** О решениях квазилинейной дифференциальной системы второго порядка, представимых рядами Фурье, содержащими медленно меняющиеся параметры // Укр. матем. журн. – 1998. – т.50, № 5. – С. 654 – 664.

8. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.