

УДК 519.6

Д. Г. Карташов, М. С. Таїрова

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

## ПОБУДОВА МНОЖИНИ ДОСЯЖНОСТІ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ В $\mathbb{R}^3$

У статті запропоновані два алгоритми чисельної побудови опуклої оболонки множини в тривимірному просторі що використовують його опорну функцію. Проведено порівняння алгоритмів, знайдено асимптотичні оцінки. Показано застосування запропонованого апарату до знаходження множини досяжності для динамічних систем.

MSC: 00-02, 00A05, 00A06.

Ключові слова: опукла оболонка, множина досяжності, диференціальні вклучення, опорна функція.

DOI: 10.18524/2519-206X.2020.2(36).233801.

### 1. Вступ

Задачі оптимального керування виникають при дослідженні процесів в різноманітних сферах, таких як економіка, біологія, медицина, техніка і т.д. При аналізі систем з керуванням одним з ключових підходів є побудова множини досяжності, що дає інформацію про всі можливі стани системи в кожен момент часу. Також з задачею побудови множини досяжності ми зустрічаємось при побудові розв'язку дискретних вклучень. Багатозначні системи, що описуються дискретними вклученнями стають все більш актуальними, особливо у сферах, де є невизначеність або недостатні вихідні дані. Наразі широко відомі алгоритми побудови множини досяжності в  $\mathbb{R}^2$ . В даній роботі запропоновано два чисельних алгоритми, побудови множини досяжності в  $\mathbb{R}^3$ . Перший алгоритм базується на апараті опорних функцій, другий за основу бере функцію деформації.

У статті будуть використовуватися такі позначення:  $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -вимірний евклідов векторний простір з елементами  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ ,  $\|\cdot\|$  — евклідова норма,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярний добуток, який породжує евклідову норму в  $\mathbb{R}^n$ ,  $comp(\mathbb{R}^n)$  — множина всіх непустих компактів з  $\mathbb{R}^n$ ,  $intA$  — сукупність внутрішніх точок множини  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\delta A$  — границя множини  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $c(F, \psi) = \sup_{x \in F} \langle x, \psi \rangle$ ,  $F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\psi \in \mathbb{R}^n$  — опорна

функція множини  $F$ ,  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  — одинична сфера з  $\mathbb{R}^n$ ,  
 $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$  — замкнута куля радіуса  $r$  з центром в  $a \in \mathbb{R}^n$ ,

$$K_{a,b,c}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x^{(1)} - x_0^{(1)}| \leq a, |x^{(2)} - x_0^{(2)}| \leq b, |x^{(3)} - x_0^{(3)}| \leq c\}$$

— замкнутий паралелепіпед з вимірами  $a, b, c$  з центром в точці  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .  
 $F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\}$  — сума компактних множин  $F, G$ ,  $\lambda F = \{\lambda f : f \in F\}$  — добуток множини  $F$  та числа  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $AF = \{Af : f \in F\}$  — образ множини  $F$  при лінійному перетворенні, яке задано матрицею  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

## 2. Побудова опуклої оболонки множини в $\mathbb{R}^3$

Для побудови множини досяжності динамічної системи необхідно спочатку вирішити задачу побудови опуклої оболонки множини в  $\mathbb{R}^3$ . Нехай множина  $F \subset \mathbb{R}^3$  і відома її опорна функція  $c(F, \psi)$ . Запропоновано два алгоритми побудови опуклої оболонки множини  $F$  за допомогою його опорної функції  $c(F, \psi)$ .

### 2.1. АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ОПУКЛОЇ ОБОЛОНКИ МНОЖИНИ, ЩО БАЗУЄТЬСЯ НА ПЕРЕТИНІ ОПОРНИХ ГІПЕРПЛОЩИН

Нехай задано деяку множину  $F \subset \mathbb{R}^3$ . Побудуємо систему векторів  $\phi \in \mathbb{R}^3$ , рівномірно взятих на одиничній сфері.

Тепер розглянемо три найближчих вектори  $\phi$  за евклідовою метрикою  $(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \phi^{(3)})$  і знайдемо значення опорної функції множини  $F$  за напрямками  $c(F, \phi^{(1)})$ ,  $c(F, \phi^{(2)})$ ,  $c(F, \phi^{(3)})$ . Складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\begin{cases} x\phi_x^{(1)} + y\phi_y^{(1)} + z\phi_z^{(1)} = c(F, \phi^{(1)}) \\ x\phi_x^{(2)} + y\phi_y^{(2)} + z\phi_z^{(2)} = c(F, \phi^{(2)}) \\ x\phi_x^{(3)} + y\phi_y^{(3)} + z\phi_z^{(3)} = c(F, \phi^{(3)}). \end{cases}$$

Розв'язком СЛАР буде точка опуклої оболонки множини. Розглянувши всі такі трійки векторів  $\phi$ , ми зможемо знайти всі точки опуклої оболонки.

Нехай  $z \in [-1, 1]$ . Розіб'ємо відрізок  $[-1, 1]$  з кроком  $\Delta z$ , де  $\Delta z = \frac{2}{m}$  і  $m$  — число взятих точок на цьому інтервалі. Зафіксуємо  $z_1$  з проміжку

$[-1, 1)$  і  $z_2 = z_1 + \Delta z$ . Знайдемо  $x_1, y_1$  і  $x_2, y_2$  такі, що  $x_1^2 + y_1^2 = 1 - z_1^2$  і  $x_2^2 + y_2^2 = 1 - z_2^2$ . Отримаємо

$$x_1 = \sqrt{1 - z_1^2} \cos \alpha, y_1 = \sqrt{1 - z_1^2} \sin \alpha,$$

$$x_2 = \sqrt{1 - z_2^2} \cos \alpha, y_2 = \sqrt{1 - z_2^2} \sin \alpha,$$

де  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . На рисунку 1 зображено множину точок границі опуклої оболонки множина  $F$  для обраних рівнів  $z_1$  і  $z_2$ .

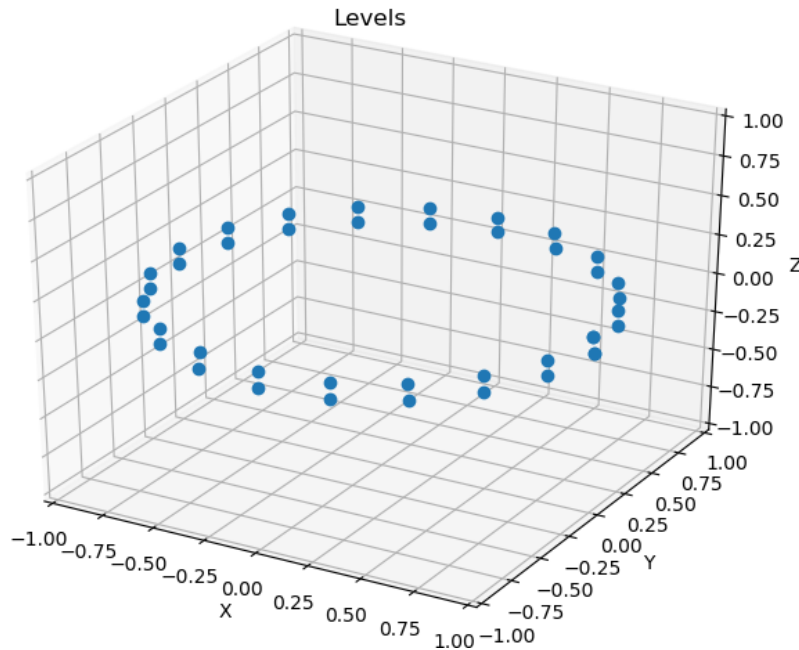


Рис. 1: Ілюстрація ітерації алгоритму

Зафіксуємо кут  $\alpha$  і оберемо по одній точці з верхнього і нижнього рівнів, що відповідають цьому куту (на Рис. 2 це точки  $A$  і  $B$ ). Будемо переміщатися по одній точці в напрямку збільшення кута на нижньому або верхньому рівні (на Рис. 2 переходимо до точки  $C$  на верхньому рівні, яка є найближчою із побудованих точок до прямої  $AB$ ). Знайдемо за трикутником точку опуклої оболонки на даному рівні, яка відповідає п.с. і є найближчою до неї. Будемо продовжувати, поки не пройдемо весь рівень. Така процедура здійснюється для кожного рівня  $z$  (Рис. 2).

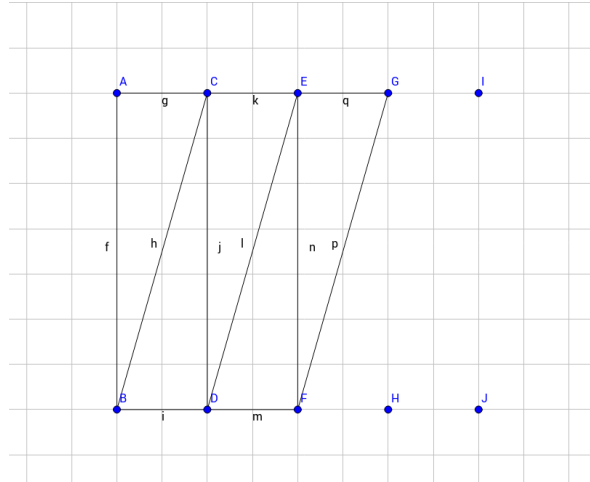


Рис. 2: Ілюстрація пошуку трикутників

За побудовою, кожна точка опуклої оболонки знайдена на  $i$ -тому рівні (рівень — два яруси точок одиничної сфери) буде з більшою компонентою  $z$ , ніж точки знайдені на рівні  $i - 1$ . Таким чином, на кожному ярусі будуть побудовані трикутники. Знайдені трикутники додаємо в список граней триангуляції опуклої оболонки множини  $F$  (Рис. 3).

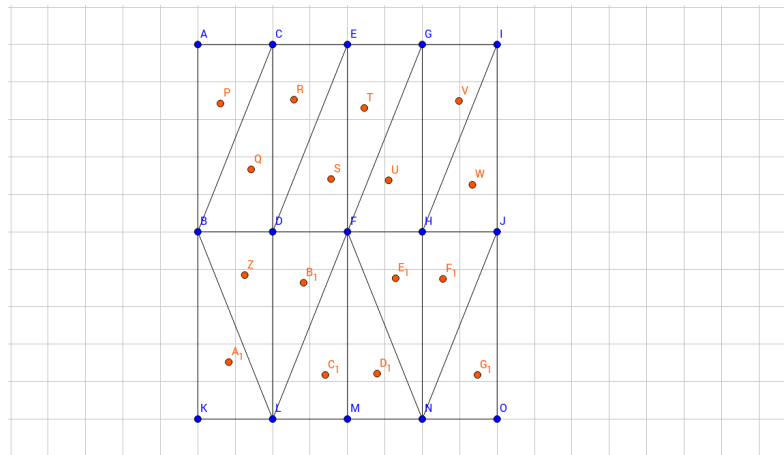


Рис. 3: Побудова триангуляції

Складність алгоритму —  $O(n)$ , де  $n$  — кількість векторів з  $S$  взятих при апроксимації.

**Приклад 1.** Побудова опуклої оболонку множини  $F = K_{1,1,1}((0, 0, 0)) +$

$S_1((0,0,0))$  за допомогою методу перетину гіперплощин зображена на Рис. 4.

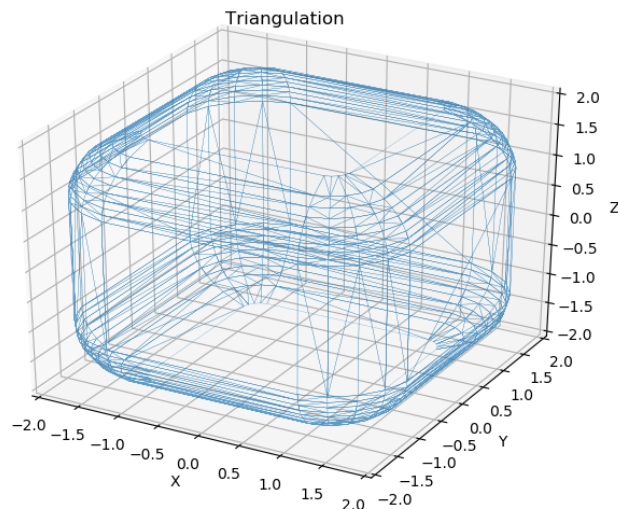


Рис. 4: Приклад побудови опуклої множини  $F = K_{1,1,1}((0,0,0)) + S_1((0,0,0))$ .

**Приклад 2.** Побудова опуклої оболонки множини  $F = S_1((0,0,0))$  за допомогою методу перетину гіперплощин зображена на Рис. 5.

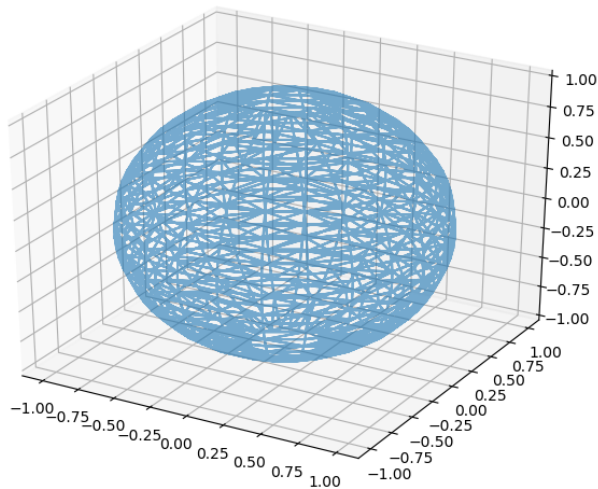


Рис. 5: Приклад побудови опуклої множини  $F = S_1((0,0,0))$ .

## 2.2. АЛГОРИТМ ПОВУДОВИ ОПУКЛОЇ ОБОЛОНКИ МНОЖИНИ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЇ ДЕФОРМАЦІЇ

**Означення 1.** Функцією деформації опуклої множини  $A \subset \text{conv}(\mathbb{R}^3)$ ,  $0 \in \text{int}A$  називається функція

$$d(A, \phi) = \sup\{\lambda > 0 : \lambda\phi \in A\}, \phi \in S.$$

Використовуючи функцію деформації, множину  $A \subset \text{conv}(\mathbb{R}^3)$  можна представити у вигляді

$$A = \bigcup_{\phi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda\phi, \lambda \in [0, d(A, \phi)]\}.$$

За властивістю опорної функції вектор  $f$  належить множині  $X$  тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність:

$$(f, \psi) \leq c(X, \psi)$$

для всіх  $\psi \in S$ . Тоді для кожного напрямку можна знайти максимальне  $\lambda$  використовуючи, що

$$(\lambda\phi, \psi) \leq c(X, \psi) \quad \forall \psi \in S \quad \forall \phi \in S.$$

Таким чином, отримуємо алгоритм знаходження функції деформації. Наведемо псевдокод алгоритму:

---

```

λ ← inf
for all ψ ∈ S do
  λcurr ←  $\frac{c(X, \phi)}{(\psi, \phi)}$ 
  if then (ψ, φ) ≠ 0 & λcurr > 0 & λ > λcurr
    λ ← λcurr
  end if
end for

```

---

Складність алгоритму —  $O(n^2)$ , де  $n$  — кількість векторів з  $S$  взятих при апроксимації.

Після завершення роботи алгоритму можна запустити алгоритм побудови триангуляції, проте в даному випадку, для коректної візуалізації цього не потрібно.

**Приклад 3.** Побудова опуклої оболонки множини

$$F = K_{1,1,1}((0, 0, 0)) + S_1((0, 0, 0))$$

за допомогою функції деформації представлена на Рис. 6.

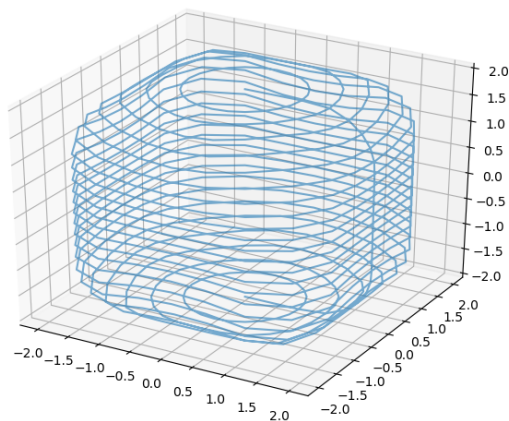


Рис. 6: Приклад побудови опуклої множини за допомогою функції деформації (без триангуляції).

**Приклад 4.** Побудова опуклої оболонки множини

$$F = S_1((0, 0, 0))$$

за допомогою функції деформації представлена на Рис. 7.

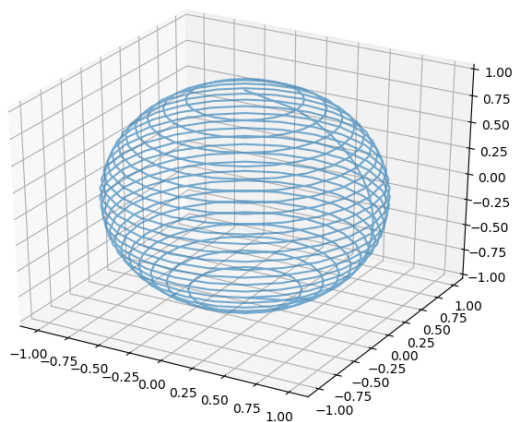


Рис. 7: Приклад побудови опуклої множини за допомогою функції деформації (без триангуляції).

### 2.3. ПОРІВНЯННЯ ДВОХ МЕТОДІВ

Метод перетину гіперплощин має набагато кращу часову оцінку, обчислення всієї опуклої оболонки залежить лінійно від кількості точок, обраних при розбитті одиничної сфери. Однак, його застосування до складних фігур пов'язане з появою артефактів в триангуляції. Другий метод має квадратичну часову складність, так як на кожному кроці потрібно обчислювати коефіцієнти на підставі властивості належності точки до множини за допомогою опорної функції. Проте простота його базових обчислень дозволяє в високою точністю відтворювати складні фігури.

## 3. ПОВУДОВА МНОЖИНИ ДОСЯЖНОСТІ В $\mathbb{R}^3$

### 3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо лінійне диференціальне включення

$$\frac{dx}{dt} \in A(t)X + F, \quad x(t_0) \in X_0, \quad (1)$$

$t \in I \subset \mathbb{R}$  — час,  $x \in \mathbb{R}^4$  — фазовий вектор,  $A(t)$  — неперервна  $n \times n$  матриця,  $F: I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$  — неперервне багатозначне відображення,  $X_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ .

$R$ -розв'язком включення (1) називається абсолютно неперервне відображення  $R: I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ ,  $R(t_0) = X_0$ , якщо

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} \frac{1}{\sigma} h \left( R(t + \sigma), \bigcup_{x \in R(t)} \{x + \sigma F(t, x)\} \right) = 0 \quad (2)$$

при майже всіх  $t$ .

Розглянемо питання побудови  $R$ -розв'язку включення (1). Оскільки  $A(t)$  — неперервна  $n \times n$  матриця, а  $F: I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$  — неперервне багатозначне відображення, то  $A(t)x + F(t)$  — неперервне багатозначне відображення, що приймає значення в  $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ . Тоді розв'язок існує. Крім того, оскільки

$$h(A(t)x_1 + F(t), A(t)x_2 + F(t)) = h(A(t)x_1, A(t)x_2) \leq \|A(t)\| \|x_1 - x_2\|,$$

то неперервне багатозначне відображення  $A(t)x + F(t)$  задовольняє умову Ліпшиця по  $x$ , розв'язок єдиний та збігається з множиною досяжності в



момент часу  $t$  з початковою умовою  $X_0$ . Таким чином,  $R(t) = X(t, X_0)$ , де  $X(t, X_0)$  — множина досяжності. Тоді маємо

$$R(t) = e^{\int_0^t A(s) ds} X_0 + \int_0^t e^{\int_s^t A(s) ds} F(s) ds$$

її опорна функція:

$$c(R(t), \psi) = c\left(X_0, \left(e^{\int_0^t A(s) ds}\right)^T \psi\right) + \int_0^t c\left(F(s), \left(e^{\int_s^t A(s) ds}\right)^T \psi\right) ds.$$

### 3.2. ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ В $\mathbb{R}^3$

Скориставшись запропонованими вище алгоритмами побудови опуклої оболонки множини, можна побудувати розв'язок включення (1). Це буде послідовність тривимірних фігур.

**Приклад 5.** Нехай задана динамічна система виду (1) з параметрами

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad X(t_0) = K_{1,2,3}((10, 10, 10)), \quad F = S_3((0, 0, 0)), \quad A = 2I$$

Побудуємо  $R$ -розв'язок включення (1), використовуючи алгоритм перетину гіперплощин. Розв'язок включення (1) для моментів часу 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1 представлено на Рис. 8.

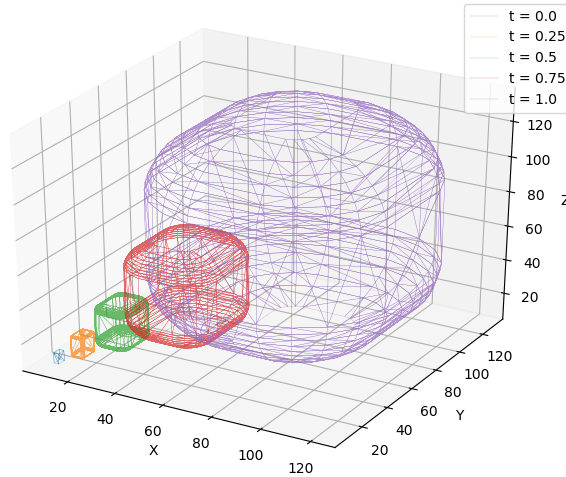


Рис. 8: Приклад побудови множини досяжності методом перетину гіперплощин.

**Приклад 6.** Нехай задана динамічна система виду (1) з параметрами

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad X(t_0) = K_{4,4,4}((0, 0, 0)), \quad F = S_2((0, 0, 0)), \quad A = I$$

Побудуємо  $R$ -розв'язок включення (1) з використанням алгоритму на основі функції деформації. Розв'язок включення (1) для моментів часу 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1 представлено на Рис. 9.

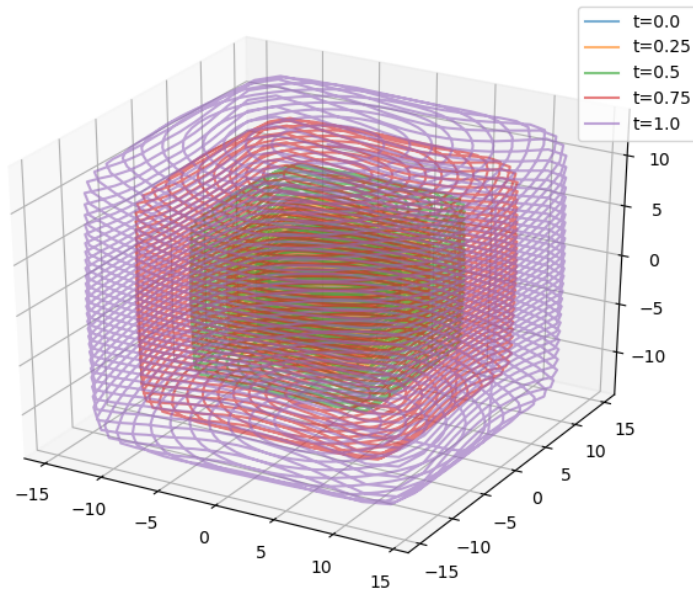


Рис. 9: Приклад побудови множини досяжності методом функції деформації.

#### 4. ВИСНОВКИ

У статті були приведені алгоритми чисельної побудови опуклої оболонки множини в тривимірному просторі. Було проведено порівняння алгоритмів, знайдено асимптотичні оцінки, наведені приклади побудови множин в  $\mathbb{R}^3$ . За допомогою описаних алгоритмів була побудована множина досяжності для динамічної системи що представлена диференціальним включенням.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. А. В. Арсирій, О. Д. Кичмаренко, Н. В. Скрипник. Многочаный анализ и линейные задачи управления. Методические указания и варианты контрольных

работ для студентов 3–6 курсов. — Одесса. «Астропринт» 2008. — 72 с.

2. **Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.** Оптимальное управление. Линейная теория и приложения: Учебное пособие для студентов факультета ВМиК МГУ. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.), 2007. — 270 с.
3. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление (линейная теория): Учебник / В.И. Благодатских. Под ред. В.А. Садованичего. — М.Ж Высш. шк., 2001. — 239 с.: ил.
4. **Филатов О.П.** Лекции по многозначному анализу дифференциальным включениям. — Самара: Изд-во «Самарский университет», 2000. — 116 с.
5. Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова (11–16 июня 2018 г., г. Одесса, Украина): Тезисы докладов / сост. и отв. ред. О. Д. Кичмаренко. — Одесса: Астропринт, 2018. — 96 с. Стр. 80.

*Карташов Д. Г., Таирова М. С.*

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В  $\mathbb{R}^3$

*Резюме*

В статье предложены два алгоритма численного построения выпуклой оболочки множества в трехмерном пространстве используя его опорную функцию. Проведено сравнение алгоритмов, найдены асимптотические оценки. Показано применение предложенного аппарата к нахождению множества достижимости для динамических систем.

*Ключевые слова:* выпуклая оболочка, множество достижимости, дифференциальные включения, опорная функция.

*Kartashov D. G., Tairova M. S.*

CONSTRUCTION OF THE DESTINATION SET OF A DYNAMIC SYSTEM IN  $\mathbb{R}^3$

*Summary*

The article proposes two algorithms for the numerical construction of the convex hull of a set in three-dimensional space using its support function. The first uses the hyperplane intersection method to find the pivot points of a set. The second one is based on the deformation function and allows you to find an arbitrary point of the convex hull of a set, which is convenient in many applications. The algorithms are compared, and asymptotic complexities are found. The application of the proposed apparatus to finding the destination set of dynamical systems is shown. The dynamic system will be based on differential inclusion.

*Key words:* convex hull, destination set, differential inclusions, support function.

## REFERENCES

1. Arsirij, A. V., Kicmarenko, O. D., Skripnik, N. V. (2008). *Mnogoznacnyj analiz i linejnye zadaci upravlenija. Metodiceskie ukazania i varianty kontrol'nih rabot dla studentov 3 -*

- 6 kursov [Multivalued analysis and linear control problems. Methodical instructions and options for tests for students of 3 - 6 courses]. Odessa: Astroprint, 72 p.
2. Kiselev, U.N., Avvakumov, S.N., Orlov, M.V. (2007) *Optimal'noe upravlenie. Linejnaja teorija i prilozhenia: Ucebnoe posobie dla studentov fakul'teta VMiK MGU [Optimal control. Linear theory and applications: A textbook for students of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University]*. Moscow: Izdatel'skij otdel fakul'teta VMiK MGU im. M.V. Lomonosova (licenzia ID N 05899 ot 24.09.2001 g.), 270 p.
  3. Blagodatskih, V.I. (2001) *Vvedenie v optimal'noe upravlenie (linejnaja teorija): Ucebnyk/V.I. Blagodatskih. Pod red. V.A. Sadovanicego [Introduction to optimal control (linear theory): Textbook / V.I. Blagodatskikh. Ed. V.A. Sadovanichy]*. Moscow: Z Vyssh. sk., 239 p.
  4. Filatov, O.P. (2000) *Lekcii po mnogoznacnomu analizu differencial'nym vkluceniam [Lectures on multivalued analysis of differential inclusions]*. Samara: "Samarskij universitet 116 p.
  5. *Mezdunarodnaa letnaa matematičeskaa škola pamati V. A. Plotnikova(11-16 iuna 2018 g., g. Odessa, Ukraina): Tezisy dokladov / sost. i otv. red. O. D. Kichmarenko [International Summer Mathematical School in memory of V. A. Plotnikov (June 11-16, 2018, Odessa, Ukraine): Abstracts / comp. and otv. ed. O.D. Kichmarenko]*. Odessa: Astroprint, 96 p.