УДК 517.911

О. Р. Поліщук (Чайчук)

Одеська Маріїнська гімназія Одеської міської ради Одеської області

ЯКІСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКОГО СИНГУЛЯРНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНО–ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Розглядається сингулярна задача Коші для функціонально-диференціального рівняння деякого типу, яке розв'язано відносно похідної невідомої функції. Розв'язки шукаються в класі неперервно-диференційованих функцій. Доводиться, що існує непуста множина неперервно диференційовних розв'язків, що мають певні асимптотичні властивості в досить малому напівоколі особливої точки. Побудована асимптотика розв'язків є не менш важливою, ніж доведення існування розв'язків. Для дослідження поставленої задачі використовується методика, яка поєднує елементи теорії функцій і якісної теорії диференціальних рівнянь. При цьому якісний аналіз використано не тільки при побудові деякого нелінійного оператора,але і при доведені того, що цей оператор задовільняє умовам теореми о нерухомій точці. Ця методіка, на наш погляд, може бути використана при розв'язувані широкого класу задач нелінійної теорії звичайних диференціальних рівнянь.

MSC: 99A99, 88B88, 77C77, 66D66.

Ключові слова: функціонально-диференціальні рівняння,задача Коши, асимптотика розв'язків, сингулярна задача, неперервно-диференційований розв'язок, функції Ляпунова.

DOI: XXXX.

1. Вступ

Регулярні задачі для функціонально-диференціальних рівнянь вивчені досить докладно [1], [2], [3], [6], [18], [21]. Настільки ж докладно досліджені сингулярні початкові задачі для звичайних диференціальних рівнянь, головним чином, розв'язаних відносно старших похідних невідомих [11], [12], [13], [17], [19], [20], [22]. Разом з тим сингулярні крайові задачі для функціонально-диференціальних рівнянь вивчені порівняно мало; відзначимо роботи [3], [4], [5], [7], [8], [9], [23], у яких розглянуті питання існування й кількості розв'язків у різних функціональних просторах. Однак асимптотична поведінка розв'язків таких задач в околі особливої точки практично не досліджувалася навіть у простих випадках; відзначимо тут лише роботи [7], [14], [15], [16], [24], [25].

Надійшла 17.03.2020

У даній роботі розглядається сингулярна задача Коші для одного класу нелінійних функціонально-диференціальних рівнянь. Використовуючи методи якісної теорії диференціальних рівнянь [10], [11], а також [12], [13] і продовжуючи дослідження, розпочаті в [14], [15], [16], у роботі доводиться існування непустої множини неперервно диференційованих розв'язків, що мають певні властивості в досить малому напівоколі особливої точки.

Розглядається задача Коші

$$t^r x' = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \tag{1}$$

$$x(0) = 0 \tag{2}$$

де $r > 1$, $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — дійсна змінна, $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $f : D \to \mathbb{R}$ — неперервна функція,

$$D = \{(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \colon t \in (0, \tau), |y_i| < \lambda_i(t), i \in \{1, 2, 3, 4\}\},$$

де всі $\lambda_i : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервні функції, $g : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ і $h : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервні функції.

2. Основні результати

Означення 1. **Розв'язком задачі (1), (2)** *називається неперервно диференційована функція $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ (ρ — стала, $\rho \in (0, \tau)$) із наступними властивостями:*

1. $(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))) \in D$ *при всіх* $t \in (0, \rho]$ *;*
2. x *тотожньо задовольняє рівнянню (1) при всіх* $t \in (0, \rho]$ *;*
3. $\lim\limits_{t \to +0} x(t) = 0$.

Означення 2. *Назвемо умовами A сукупність наступних умов:*

1. $g : (0, \tau) \to (0, +\infty), h : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ *— неперервно диференційовані функції, причому* $g(t) \le t, h(t) \le t$ *при* $t \in (0, \tau)$*;*
2. *існують неперервно диференційовані функції* $\varphi : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ *та* $\omega : (0, \tau) \to (0, +\infty)$*, такі, що* $\lim\limits_{t \to +0} \omega(t) = 0, \lim\limits_{t \to +0} \omega(t) t^{1-r} = 0$, $\lim\limits_{t \to +0} \varphi(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +0} t\varphi'(t) = 0$*, і при цьому виконана умова*

$$\left| t^r \varphi'(t) - f(t, \varphi(t), \varphi(g), \varphi'(t), \varphi'(h(t))) \right| \le \omega(t),$$

$t \in (0, \tau)$;

3. $|f(t, x_1, y_1, u_1, v_1) - f(t, x_2, y_2, u_2, v_2)| \le l_2(t)\,|x_1 - x_2| + l_3(t)\,|y_1 - y_2| + {}$ $+ l_4(t)\,|u_1 - u_2| + l_5(t)\,|v_1 - v_2|$, $(t, x_i, y_i, u_i, v_i) \in D, i \in \{1, 2\}$, *де* $l_j : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ *— неперервні функції,* $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Позначимо через $U(\rho, M, q)$ множину неперервно диференційованих функцій $u : (0; \rho] \to \mathbb{R}$, що задовольняють нерівностям:

$$|u(t) - \varphi(t)| \le M \frac{\omega(t)}{t^{r-1}},\ \left|u'(t) - \varphi'(t)\right| \le (q + r)\, M \frac{\omega(t)}{t^r}, t \in (0, \rho]\,; \qquad (3)$$

тут ρ, q, M — додатні сталі, $\rho < \tau$.

Означення 3. *Назвемо* <u>**умовами B**</u> *сукупність умов:*

1. $l_2(t) = l_2 t^{r-1}$, $l_3(t) = l_3\,(g(t))^{r-1}\,\omega(t)/\omega(g(t))$, $l_4(t) = l_4 t^r$, $l_5(t) = l_5\,(h(t))^r\,, t \in (0, \tau)$, *де все* l_i *— додатні сталі,* $i \in \{2, 3, 4, 5\}$;
2. $l_2 + l_3 + (l_4 + l_5)(1 + \omega_0 + r) < \omega_0 - r + 1$;
3. $\lim\limits_{t \to +0} t\omega'(t)\omega^{-1}(t) = \omega_0, \omega_0 > r - 1$;
4. $\lim\limits_{t \to +0} tg'(t)g^{-1}(t) = g_0$, $\lim\limits_{t \to +0} th'(t)h(t) = h_0$

Теорема 1. *Нехай виконані умови A, B. Тоді існують сталі* M, q, ρ *такі, що задача Коші (1),(2) має хоча б один розв'язок* $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, *що належить множині* $U(\rho, M, q)$.

Доведення. Насамперед, обираємо сталі ρ, M, q. Нехай виконані наступні нерівності:

$$1 + \omega_0 + r < q < (\omega_0 - r + 1 - l_2 - l_3)(l_4 + l_5)^{-1},$$
$$M > (\omega_0 - r + 1 - l_2 - l_3 - (r + q)(l_4 + l_5))^{-1}.$$

Стала ρ задовольняє умові

$$\rho = \min_{1 \le i \le 8} \rho_i,$$

де всі сталі $\rho_i, i \in \{1, 2, ..., 8\}$ визначаються в процесі доведення теореми. Зрозуміло, що ρ достатньо мале. Вибір ρ, M, q забезпечує законність всіх подальших міркувань.

Нехай B — простір неперервно диференційованих функцій $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|u\| = \max_{t\in[0,\rho]} (|u(t)| + |u'(t)|). \tag{4}$$

Позначимо через U підмножину B, кожний елемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ якого задовольняє умовам

$$|u(t) - t^r\varphi(t)| \le Mt\omega(t)\,,\ \left|u'(t) - rt^{r-1}\varphi(t) - t^r\varphi'(t)\right| \le qM\omega(t)\,,\ t \in (0, \rho]\,, \tag{5}$$

причому $u(0) = 0, u'(0) = 0$ й, крім того, виконана умова:

$$\forall\varepsilon > 0 \forall u \in U \forall t_i \in [0, \rho]\,, i \in \{1, 2\} : |t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|u'(t_1) - u'(t_2)\right| \le \varepsilon; \tag{6}$$

тут $\delta(\varepsilon) = (1-l_4-l_5)(2B(t_\varepsilon))^{-1}\varepsilon$, де стала $B(t_\varepsilon)$ визначена рівністю $B(t_\varepsilon) = l_1(t_\varepsilon) + (h(t_\varepsilon))^{-2-r} + 2(g(t_\varepsilon)\omega(g(t_\varepsilon))^{-1}$; при цьому стала $t_\varepsilon \in (0, \rho)$ обрана так, щоб виконувалися умови

$$rt^{r-1}|\varphi(t)| \le \frac{1 - l_4 - l_5}{24}\varepsilon, \quad t^r\left|\varphi'(t)\right| \le \frac{1 - l_4 - l_5}{24}\varepsilon,$$
$$qM\omega(t) \le \frac{1 - l_4 - l_5}{24}\varepsilon, \quad t \in (0, t_\varepsilon]\,.$$

Неважко переконається в тому, що U — замкнена, обмежена, опукла множина. Відповідно до критерію Арцела, множина U компактна.

Розглянемо рівняння (1) і покладемо $x(t) = \frac{y(t)}{t^r}$, де y — нова невідома функція. Тоді рівняння (1) набуває вигляду:

$$ty'(t) = ry(t) + tf\left(t, \frac{y(t)}{t^r}, \frac{y(g(t))}{g^r(t)}, \frac{y'(t)}{t^r} - \frac{y(t)}{t^{r+1}}, \frac{y'(h(t))}{(h(t))^r} - \frac{y(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\right). \tag{$*$}$$

Очевидно, що існує таке, достатньо мале, $\rho_1 \in (0, \tau)$, що при $t \in (0, \rho_1]$ для всіх $u \in U$, якщо тільки $\rho \le \rho_1$.

Далі будемо розглядати диференціальне рівняння

$$ty'(t) = ry(t) + tf\left(t, \frac{u(t)}{t^r}, \frac{u(g(t))}{(g(t))^r}, \frac{u'(t)}{t^r} - \frac{ru(t)}{t^{r+1}}, \frac{u'(h(t))}{(h(t))^r} - \frac{u(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\right), \tag{7}$$

з початковою умовою $y(0) = 0$, де $u \in U$ — довільна фіксована функція.

Позначимо $D_0 = \{(t, y(t)) : t \in (0; \rho]\,, y \in \mathbb{R}\}$. При $(t, y) \in D_0$ для рівняння (7) виконані умови теореми існування й одиничності розв'язків й неперервної залежності розв'язків від початкових даних. Покладемо

$$\Phi_1 = \{(t,y) : t \in (0,\rho], |y - t^r\varphi(t)| = Mt\omega(t)\},$$
$$D_1 = \{(t,y) : t \in (0,\rho], |y - t^r\varphi(t)| < Mt\omega(t)\},$$
$$H = \{(t,y) : t = \rho, |y - \rho^r\varphi(\rho)| < M\rho\omega(\rho)\}.$$

Нехай допоміжна функція $A_1 : D_0 \to [0,+\infty)$ визначена рівністю $A_1(t,y) = (y - t^r\varphi(t))^2 (t\omega(t))^{-2}$ і нехай $a_1 : D_0 \to \mathbb{R}$ — похідна цієї функції в силу рівняння (7). Неважко переконатися в тому, що існує таке, достатньо мале $\rho_2 \in (0,\tau)$, що $a_1(t,y) < 0$ при $(t,y) \in \Phi_1$, якщо тільки $\rho \le \rho_2$. Тепер доведемо, що тоді кожна інтегральна крива $J : (t, y(t))$ рівняння (7), що перетинає Φ_1 розташована таким чином: $(t,y(t)) \in D_1$ при $t \in (t_0, t_0+\delta)$ й $(t,y(t)) \notin \overline{D}_1$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$, де (t_0, y_0) — точка перетину J з Φ_1, а $\delta > 0$ — досить мале. Дійсно, нехай $P(t_0,y_0) \in \Phi_1$ — будь-яка точка, а $J : (t, y_P(t))$ — інтегральна крива рівняння (7) така, що $y_P(t_0) = y_0$. Тоді $a_1(t_0, y_P(t_0)) = a_1(t_0,y_0) < 0$. Тому якщо $0 < t_0 < \rho$, то знайдеться таке, досить мале, $\delta > 0$, що $\mathrm{sign}(A_1(t,y_p(t)) - A_1(t_0,y_p(t_0))) = \mathrm{sign}(t_0 - t)$, $|t - t_0| < \delta$.

Так як $A_1(t_0, y_P(t_0)) = A_1(t_0,y_0) = M^2$, то маємо

$$\mathrm{sign}\left(|y_P(t) - t^r\varphi(t)|^2 (t\omega(t))^{-2} - M^2\right) = \mathrm{sign}(t_0 - t),$$

$|t_0 - t| < \delta$, або $\mathrm{sign}(|y_P(t) - t^r\varphi(t)| - Mt\omega(t)) = \mathrm{sign}(t_0 - t)$, $|t_0 - t| < \delta$

Це означає, що $(t, y_P(t))\overline{\in}\overline{D_1}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ й $(t, y_p(t)) \in D_1$, при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Якщо ж $t_0 = \rho$, то існує таке достатньо мале $\delta > 0$, що $A_1(t, y_p(t)) > A_1(\rho, y_p(\rho))$, $t \in (\rho - \delta, \rho)$. Це означає, що $|y_P(T) - t^r\varphi(t)|^2 (t\omega(t))^{-2} > M^2$, $t \in (\rho - \delta, \rho)$, або $|y_P(T) - t^r\varphi(t)| > Mt\omega(t)$, $t \in (\rho - \delta, \rho)$, або $(t, y_p) \notin \overline{D}_1$ при $t \in (\rho - \delta, \rho)$. Наше твердження доведене.

Доведемо, що кожна інтегральна крива рівняння (7), що перетинає H, залишається всередині D_1 при всіх $t \in (0,\rho]$ (і тому примикає до точки (0,0) при $t \to +0$, залишаючись в D_1). Дійсно, жодна з інтегральних кривих (7), які перетинають Φ_1, у разі подальшого зростання t не може перетнути Φ_1 знову. Отже, кожна така інтегральна крива перетне $\overline{H}$. Визначимо відображення $\Psi : \Phi_1 \to \overline{H}$, ставлячи у відповідність кожній точці $P \in \Phi_1$ точку $\Psi(\Phi_1) \in \overline{H}$, що лежить на тій же інтегральній кривій рівняння (7), що й точка P. Позначимо через $\Psi(\Phi_1)$ множину образів всіх точок Φ_1.

Відображення Ψ взаємно однозначно й взаємно неперервне. Множина Φ_1 незамкнута, тому що воно не містить свою граничну точку O(0,0). Тому образ цієї множини при неперервному відображенні Ψ теж є незамкнутою множиною.

Водночас множина $\overline{H}$ замкнута. Тому множина $\Omega = \overline{H} \backslash \Psi(\Phi_1)$ не порожня.

Розглянемо інтегральну криву $J_u : (t, y_u(\rho))$, рівняння (7) таку, що $(\rho, y_u(\rho)) \in \Omega$. На підставі вищезазначеного, якщо t спадає від $t = \rho$ до $t = t_-$, де (t_-, ρ) — лівий максимальний інтервал існування розв'язків y_u, то ця інтегральна крива не зможе перетнути Φ_1. Тому інтегральна крива $J : (t, y_u(t))$ визначена при всіх $t \in (0, \rho]$, лежить у D_1 при всіх $t \in (0, \rho]$ і входить у точку O(0,0) при $t \to +0$ (залишаючись у D_1 при $t \in (0, \rho]$), що й потрібно було довести.

Таким чином, $|y_u(t) - t^r\varphi(t)| \leq Mt\omega(t), t \in (0, \rho]$.

З тотожності

$$\begin{aligned} ty_u'(t) &= ry_u(t) \\ &+ tf\left(t, \frac{u(t)}{t^r}, \frac{u(g(t))}{(g(t))^r}, \frac{u'(t)}{t^r} - \frac{u(t)}{t^{r+1}}, \frac{u'(h(t))}{(h(t))^r} - \frac{u(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\right), t \in (0, \rho] \end{aligned}$$

неважко отримати, що $\left|y_u'(t) - rt^{r-1}\varphi(t) - t^r\varphi'(t)\right| \leq qM\omega(t), t \in (0, \rho]$, якщо тільки $\rho \leq \rho_3$, де ρ_3 — достатньо мале, $\rho_3 \in (0, \tau)$.

Доведемо тепер, що в рівняння (7) є тільки одна інтегральна крива (а саме — крива $J_u : (t, y_u(t))$), що перетинає H й лежить усередині D_1 при $t \in (0, \rho]$ (входячи при цьому в точку O(0,0) при $t \to +0$), а всі інші криві рівняння (7), що перетинають H, залишають множину $\overline{D_1}$ при $t \to +0$. Для цього розглянемо однопараметричні сімейства множин

$$\begin{aligned} \Phi_2(\upsilon) &= \{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| = \upsilon t\omega(t)(-\ln t)\}, \\ D_2(\upsilon) &= \{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| < \upsilon t\omega(t)(-\ln t)\}. \end{aligned}$$

де υ — параметр, $\upsilon \in (0, 1]$.

Нехай допоміжна функція $A_2 : D_0 \to [0; +\infty)$ визначається рівністю $A_2(t, y) = (y - y_u(t))^2 (t\omega(t)(-\ln t))^{-2}$ і нехай $a_2 : D_0 \to \mathbb{R}$ — похідна цієї функції відповідно до рівняння (7). Неважко переконатися в тому, що існує таке, достатньо мале, $\rho_4 \in (0, \tau)$, що $a_2(t, y) < 0$ при $(t, y) \in \Phi_2(\upsilon), \upsilon \in (0, \rho]$ і при всіх $t \in (0, \rho]$, якщо тільки $\rho \le \rho_4$. Звідси випливає, що для будь-якого фіксованого $\upsilon \in (0, \rho]$ інтегральна крива $J : (t, y(t))$ рівняння (7), яка перетинає $\Phi_2(\upsilon)$ в будь-якій точці (t_0, y_0), розташована таким чином: $(t, y(t)) \overline{\in} \overline{D_2(\upsilon)}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ й $(t, y(t)) \in D_2(\upsilon)$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, де $\delta > 0$ — досить мале. Це доводиться тими ж міркуваннями, що й при розгляді Φ_1.

Нехай тепер $(t_*, y_*)-$ будь-яка точка множини D_1 така, що $y_* \ne y_u(t_*)$.Найдеться таке $\upsilon_* \in (0, 1]$, що $(t_*, y_*) \in \Phi_2(\upsilon_*)$. Розглянемо інтегральну криву $J_* : (t, y_*(t))$ рівняння (7), що проходить через точку (t_*, y_*). На підставі вищезазначеного, при зменшені t $(t \le t_*)$ ця інтегральна крива не зможе перетнути $\Phi_2(\upsilon_*)$. Отже, вона лежить поза $D_2(\upsilon_*)$ при всіх припустимих $t < t_*$. Водночас $|y(t) - y_u(t)| \le |y(t) - t^r \varphi(t)| + |y_u(t) - t^r \varphi(t) t^r| \le$ $\le 2Mt\omega(t) < \upsilon t\omega(t)(-\ln t)$, якщо $t \in (0, t_{**}]$, де значення $t_{**} \in (0, \rho)$ обрано так, щоб при $t \in (0, t_{**}]$ виконувалася умова $-\dfrac{1}{\ln t} < \dfrac{\upsilon}{2M}$.

Покладемо за означенням $y_u(0) = 0, y_u'(0) = 0$. Неважко переконатися в тому, що функція $y_u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ задовольняє умові :

$$\forall \varepsilon > 0 \forall t_i \in [0, \tau], i \in \{1, 2\} : |t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| u'(t_1) - u'(t_2) \right| \le \varepsilon,$$

якщо тільки $\rho \le \rho_5$. (Тут $\delta(\varepsilon)$ — те ж, що й в умові (6).). Ми бачимо, що $y_u \in U$. Визначимо оператор $T : U \to U$, так : $Tu = y_u$. Доведемо, що оператор $T : U \to U$ неперервний. Дійсно, нехай $u_i \in U, i \in \{1, 2\}$ — довільні фіксовані функції. Позначимо $Tu_i = y_i, i \in \{1, 2\}$. Тоді $y_i \in U, i \in \{1, 2\}$ і виконуються тотожності

$$\begin{aligned} ty_i'(t) = ry_i(t) + tf\Bigg(t, \frac{u_i(t)}{t^r}, \frac{u_i(g(t))}{(g(t))^r}, \frac{u_i'(t)}{t^r} \\ - \frac{u_i(t)}{t^{r+1}}, \frac{u_i'(h(t))}{(h(t))^r} - \frac{u_i(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\Bigg), \quad i \in \{1, 2\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Нехай $\|u_1 - u_2\| = d$. Якщо $d = 0$, то $y_1 = y_2$. Далі вважаємо, що $d > 0$. Нехай υ — стала, яка задовольняє умовам: $\upsilon \in (0, 1)$, $\upsilon < (\omega_0 - r + 1) |g_0 + h_0 + g_0\omega_0 - 1|^{-1}$. Приймаючи до уваги вибір υ, неважко переконатися в тому, що

$$t\left|f\left(t,\frac{u_1(t)}{t^r},\frac{u_1(g(t))}{(g(t))^r},\frac{u_1'(t)}{t^r}-\frac{ru_1(t)}{t^{r+1}},\frac{u_1'(h(t))}{(h(t))^r}-\frac{ru_1(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\right)-\right.$$
$$\left.-f\left(t,\frac{u_2(t)}{t^r},\frac{u_2(g(t))}{(g(t))^r},\frac{u_2'(t)}{t^r}-\frac{ru_2(t)}{t^{r+1}},\frac{u_2'(h(t))}{(h(t))^r}-\frac{ru_2(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\right)\right|\leq$$
$$\leq K_0 d^{\upsilon} t\omega(t)\left(\frac{g(t)h(t)\omega(g(t))}{t}\right)^{-\upsilon}, t\in(0,\rho], \quad (10)$$

де $K_0=(l_2+l_3+r(l_4+l_5)+1)(2M)^{1-\upsilon}$.

Будемо вивчати поведінку інтегральних кривих диференціального рівняння

$$ty'(t)=ry(t)+tf\left(t,\frac{u(t)}{t^r},\frac{u(g(t))}{(g(t))^r},\frac{u'(t)}{t^r}-\frac{u(t)}{t^{r+1}},\frac{u'(h(t))}{(h(t))^r}-\frac{u(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\right). \quad (11)$$

Покладемо

$$\Phi_3=\left\{(t,y):t\in(0,\rho],|y-y_2(t)|=\gamma d^{\upsilon}t\omega(t)\left(\frac{g(t)h(t)}{t}\omega(g(t))\right)^{-\upsilon}\right\},$$
$$D_3=\left\{(t,y):t\in(0,\rho],|y-y_2(t)|<\gamma d^{\upsilon}t\omega(t)(\frac{g(t)h(t)}{t}\omega(g(t)))^{-\upsilon}\right\},$$

де γ — стала, $\gamma > 2K\left(\omega_0-r+1-\upsilon(g_0+h_0+g_0\omega_0-1)\right)^{-1}$. Визначимо допоміжну функцію $A_3:D_0\to\mathbb{R}$ рівністю

$$A_3(t,y)=(y-y_2(t))^2\left(t\omega(t)\left(\frac{g(t)h(t)}{t}\omega(g(t)\right)^{-\upsilon}\right)^{-2}.$$

Нехай $a_3:D_0\to\mathbb{R}$ — похідна функції $A_3(t,y)$ в силу рівняння (7). Легко з'ясувати, що існує таке, достатньо мале $\rho_7\in(0,\tau)$, що $a_3(t,y)<0$ при $(t,y)\in\Phi_3$, якщо тільки $\rho\leq\rho_7$. Тому інтегральна крива рівняння (11), що перетинає Φ_3 в будь-якій точці (t_0,y_0), розташована так: вона лежить в D_3 при $t\in(t_0,t_0+\delta)$ і лежить зовні $\overline{D_3}$ при $t\in(t_0-\delta,t_0)$, де $\delta>0$ — достатньо мале. Крім того,

$$|y_1(t)-y_2(t)|\leq|y_1(t)-t^r\varphi(t)|+|y_2(t)-t^r\varphi(t)|\leq$$
$$\leq 2Mt\omega(t)<\gamma d^{\upsilon}t\omega(t)\left(\frac{g(t)h(t)}{t}\omega(g(t))\right)^{-\upsilon},$$

якщо $t \in (0, t(d)]$, де $t(d)$ достатньо мале, $t(d) \in (0, \rho)$. Тому інтегральна крива $J : (t, y_1(t))$ рівняння (11) лежить всередині D_3 при $t \in (0, t(d)]$. На основі вищесказаного, якщо t збільшується від $t = t(d)$ до $t = \rho$, то вказана інтегральна крива не може мати спільних точок з Φ_3. Тому, вона (крива) лежить в D_3 при всіх $t \in (0, \rho]$. Отже,

$$|y_1(t) - y_2(t)| < \gamma d^{\upsilon} t\omega(t) \left(\frac{g(t)h(t)}{t} \omega(g(t)) \right)^{-\upsilon}, t \in (0, \rho] \qquad (12)$$

За допомогою (9), (12) неважко переконатися в тому, що

$$|y_1(t) - y_2(t)| + \left|y_1'(t) - y_2'(t)\right| \leq d^{\upsilon}(g(t)h(t)\omega(g(t)))^{-\upsilon}, t \in (0, \rho]. \qquad (13)$$

Перейдемо тепер безпосередньо до доведення неперервності оператора $T : U \to U$. Нехай $\varepsilon > 0$ дано. Існує таке $t_\varepsilon \in (0, \rho)$, що

$$2Mt\omega(t) + 2qM\omega(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

при $t \in (0, t_\varepsilon]$. Якщо $t \in (0, t_\varepsilon]$, то

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| + \left|y_1'(t) - y_2'(t)\right| &\leq |y_1(t) - t^r\varphi(t)| + |y_2(t) - t^r\varphi(t)| \\ &+ \left|y_1'(t) - rt^{r-1}\varphi(t) - t^r\varphi'(t)\right| + \left|y_2(t) - rt^{r-1}\varphi(t) - t^r\varphi'(t)\right| \\ &\leq 2Mt\omega(t) + 2qM\omega(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Якщо ж $t \in [t_\varepsilon, \rho]$, то з (13) маємо

$$|y_1(t) - y_2(t)| + \left|y_1'(t) - y'(t)\right| \leq d^{\upsilon}\left(g(t_\varepsilon)h(t_\varepsilon)\omega(g(t_\varepsilon))\right)^{-\upsilon}, \quad t \in [t_\varepsilon, \rho].$$

Покладемо $\delta(\varepsilon) = (\varepsilon/2)^{\frac{1}{\upsilon}} g(t_\varepsilon)h(t_\varepsilon)\omega(g(t_\varepsilon))$. Якщо $d < \delta(\varepsilon)$, то $|y_1(t) - y_2(t)| + + |y_1'(t) - y_2'(t)| \leq \varepsilon/2$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Крім того, $y_i(0) = 0$ і $y_i'(0) = 0, i \in \{1, 2\}$. Тому $\max\limits_{t \in [0, \rho]}(|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)|) \leq \varepsilon/2$ або $\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \varepsilon/2$.

Отже, доведено, що якщо $\|u_1 - u_2\| = \delta < \delta(\varepsilon)$, то

$$\|Tu_1 - Tu_2\| = \|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Ці міркування не залежать ані від вибору функції $u_i \in U, i \in \{1, 2\}$, ані від вибору $\varepsilon > 0$.

Неперервність оператора $T : U \to U$ доведена.

Застосуємо до оператора $T : U \to U$ принцип нерухомої точки Шаудера. В оператора $T : U \to U$ є хоча б одна нерухома точка $y_0 \in U$, тобто $Ty_0 = y_0$. Оскільки існує єдина функція $x_0 : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ така, що $x_0(t) = \frac{y_0(t)}{t^r}$, то маємо: $|x_0(t) - \varphi(t)| \le M\frac{\omega(t)}{t^{r-1}}$, $|x_0'(t) - \varphi'(t)| \le (q + r)M\frac{\omega(t)}{t^r}, t \in (0, \rho]$.

Теорему доведено.

Відмітимо, що з умови теореми, взагалі кажучи, не випливає, що $\varphi'(t) \to c$, $t \to +0$, $\frac{\omega(t)}{t^r} \to 0, t \to +0$, де c — стала.

Назвемо *умовами C* сукупність наступних умов:

1. $l_2(t) = l_2 t^{2r-2}\beta(t), l_3(t) = l_3 t^{r-1}(g(t))^{r-1}\beta(t), l_4(t) = l_4 t^{2r-1}\beta(t)$,

   $l_5(t) = l_5 t^{r-1}(h(t))^r \beta(t)$, де l_i — додатні сталі, $i \in \{2, 3, 4, 5\}$;

2. $\beta : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервна функція;

3. $\lim\limits_{t\to+0} \beta(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\omega(t)}{t^{r-1}\beta(t)} = 0$.

Теорема 2. *Нехай виконані умови B,C. Тоді існують сталі ρ, M, q такі, що задача Коші (1), (2) має єдиний розв'язок $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, що належить множині $U(\rho, M, q)$.*

Доведення. Насамперед, обираємо сталі ρ, M, q. Нехай виконані наступні нерівності:

$$M > 2/(\omega_0 - r + 1), \quad q > 1/2(\omega_0 + r + 1).$$

Умови, що визначають вибір ρ тут не наводимо. Ці умови можна було б конкретно виписати, таким самим чином, як і при доведенні теореми 1; зараз ми вкажемо, що ρ досить мало. Вибір ρ, M, q забезпечує законність всіх подальших міркувань.

Нехай B — простір неперервно диференційованих функцій $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ з нормою (4). Позначимо через U підмножину B, кожний елемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ якої при $t \in (0, \rho]$ задовольняє нерівностям (5), причому $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$. Множина U замкнена й обмежена. Розглянемо рівняння (1) і покладемо $x = \frac{y(t)}{t^r}$, де y — нова невідома функція. Тоді рівняння (1) матиме вигляд (*). Далі будемо розглядати задачу Коші (7), (8), де $u \in U$ — довільна фіксована функція. Тими самими міркуваннями, що й у теоремі 1, з'ясуємо, що існує єдиний розв'язок $y_u : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ задачі (7), (8) такий, що відповідає оцінкам

$$\begin{gathered} |y_u(t) - t^r \varphi(t)| \leq Mt\omega(t), \\ \left|y_u'(t) - rt^{r-1}\varphi(t) - t^r\varphi'(t)\right| \leq qM\omega(t), \quad t \in (0,\rho]. \end{gathered}$$

Покладемо за означенням $y_u(0) = 0$, $y_u'(0) = 0$. Тоді $y_u \in U$. Визначимо оператор $T : U \to U$, покладаючи $Tu = y_u(t)$. Доведемо, що оператор $T : U \to U$ — оператор стиску.

Нехай $u_i \in U, i \in \{1,2\}$ — довільні фіксовані функції. Позначимо $Tu_i = y_i$, $i \in \{1,2\}$. Тоді $y_i \in U, i \in \{1,2\}$ й виконуються тотожності (9). Нехай $\|u_1 - u_2\| = d$. Якщо $d = 0$, то $y_1 = y_2$. Нехай далі $d > 0$. Будемо досліджувати поведінку розв'язків диференціального рівняння (11).

Позначимо

$$\begin{aligned} \Phi_4 &= \{(t,y) : t \in (0,\rho], |y(t) - y_2(t)| = \gamma d t^r \beta(t)\}, \\ D_4 &= \{(t,y) : t \in (0,\rho], |y(t) - y_2(t)| < \gamma d t^r \beta(t)\}, \end{aligned}$$

де γ — стала, яка задовольняє умові:

$$\gamma > (\beta_0)^{-1}(l_2 + l_3 + (1+r)(l_4 + l_5)). \tag{14}$$

Розглянемо допоміжну функцію $A_4 : D_0 \to [0,+\infty)$, задану рівністю

$$A_4(t,y) = (y - y_2(t))^2 (t^r \beta(t))^{-2}$$

і позначимо через $a_4 : D_0 \to \mathbb{R}$ похідну цієї функції в силу рівняння (11). Так як ρ достатньо мале, то неважко переконатися в тому, що $a_4(t,y) < 0$ при $(t,y) \in \Phi_4$. Отже, кожна інтегральна крива $J : (t, y(t))$ рівняння (9), яка перетинає Φ_4 в будь-якій точці (t_0, y_0), розташована таким чином: $(t, y(t)) \overline{\in} \overline{D_4}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ і $(t, y(t)) \in D_4$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, де $\delta > 0$– досить мале.

При цьому маємо

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &\leq |y_1(t) - t^r\varphi(t)| + |y_2(t) - t^r\varphi(t)| \\ &\leq 2Mt\omega(t) = \gamma t^r d\beta(t) \frac{2Mt\omega(t)}{\gamma d t^r \beta(t)} < \gamma t^r d\beta(t), \end{aligned}$$

якщо $t \in (0, t(d)]$, де стала $t(d) \in (0, \rho)$ визначена з умови $\frac{\omega(t)}{t^{r-1}\beta(t)} < \frac{\gamma d}{2M}$ при $t \in (0, t(d)]$, тобто $t(d)$ — достатньо мале. Виходить, інтегральна крива $J_1 : (t, y_1(t))$ рівняння (11) лежить усередині D_4 при $t \in (0, t(d)]$. Водночас, на підставі сказаного вище, якщо t монотонно зростає від $t = t(d)$ до $t = \rho$, то ця інтегральна крива не може мати спільних точок з Φ_4. Тому дана інтегральна крива лежить у D_4 при всіх $t \in (0, \rho]$. Таким чином,

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le \gamma t^r d\beta(t), \quad t \in (0, \rho]\,. \tag{15}$$

За допомогою тотожностей (9) неважко одержати оцінку:

$$t\left|y_1'(t) - y_2'(t)\right| \le (\beta_0 + r)\gamma t^r \beta(t) d, \quad t \in (0, \rho]\,. \tag{16}$$

З (15) і (16) випливає, що

$$|y_1(t) - y_2(t)| + \left|y_1'(t) - y_2'(t)\right| \le \gamma t^r \beta(t) d + (\beta_0 + r)\gamma t^{r-1}\beta(t) d \le \frac{d}{2}, \quad t \in (0, \rho]\,,$$

оскільки ρ досить мале. Тому $\max\limits_{t \in [0,\rho]}(|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)|) \le 1/2d$, тобто, $\|y_1(t) - y_2(t)\| \le \dfrac{d}{2}$.

Таким чином, доведено, що $\|Tu_1 - Tu_2\| \le \dfrac{1}{2}\|u_1 - u_2\|$.

Наведені міркування не залежать від вибору функцій $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Тому $T : U \to U$ — стискаючий оператор. Для завершення доведення теореми залишається застосувати принцип стислих відображень Банаха.

3. Висновки

Дана методика може використовуватися для дослідження широкого класу задач Коши для функціонально - диференціальних рівнянь і дозволяє досліджувати асимптотичну поведінку розв'зків задач такого вигляду.

Список літератури

1. **Азбелев Н. В.** Современное состояние и тенденции развития теории функционально-дифференциальных уравнений Изв. вузов. Математика.– 1999.– №6.– С. 8–19.
2. **Азбелев Н. В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.

3. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: Институт Компьютерных Исследований, 2002. – 384 с.
4. **Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Бравый Е.И.** *О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка* Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 3–11.
5. **Алвеш М.Ж.** *О разрешимости двухточечной краевой задачи для сингулярного нелинейного функционально-дифференциального уравнения* Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 12–19.
6. **Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С, Родкина А.Е., Садовский Б.Н.** *Теория уравнений нейтрального типа* Итоги науки и техники. Математический анализ. – 1981. – Т.19. – С. 55–126.
7. **Бельский Д.В.** *Асимптотические свойства решений систем дифференциально-функциональных уравнений: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук.* –Киев, 2005 – 121 с.
8. **Бравый Е.И.** *О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения* Известия вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 17–23.
9. **Бравый Е.И.** *Линейные функционально-дифференциальные уравнения с внутренними сингулярностями. Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук.* – Пермь, 1996. – 18 с.
10. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
11. **Еругин Н.П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
12. **Зернов А.Е.** *О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши* Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 5. – С. 756–760.
13. **Зернов А.Е.** *Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши* Украинский матем. журнал. – 2001. – Т. 53. – № 3. – С. 302–310.
14. **Зернов А.Е.** *О разрешимости и асимптотике решений некоторого функционально-дифференциального уравнения с сингулярностью* Украинский матем. журнал. – 2001. – Т.53. – № 4. – С. 455–465.
15. **Зернов А.Е., Чайчук О.Р.** *Качественное исследование сингулярной задачи Коши для некоторого функционально- дифференциального уравнения* Украинский матем. журнал. – 2005. – Т. 57. – № 10. – С.1344–1358.
16. **Зернов А.Е., Чайчук О.Р.** *О сингулярных функционально-дифференциальных уравнениях* Современная математика и ее приложения – 2005. – Т. 36. – С. 86–94.
17. **Кигурадзе И.Т.** Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.

18. **Пелюх Г.П., Шарковский А.Н.** Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1974. – 120 с.
19. **Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.** Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
20. **Филиппов А.Ф.** Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004. –240 с.
21. **Хейл Дж.** Теория функционально–дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
22. **Чечик В.А.** *Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью* Труды Моск. матем. об-ва. – 1959. – № 8. – С. 155–198.
23. **Шиндяпин А.И.** *О краевой задаче для одного сингулярного уравнения* Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. - № 3. – С.450–455.
24. **Grimm L.J.** *Analytic solutions of a neutral differential equation near a singular point* Proceedings of the Amer. Math. Soc. – 1972. – V.36. – JM. – P. 187–190.
25. **Grimm L.J. and Hall L.M.** *Holomorphic solutions of singular functional differential equations* Journal of Math. Anal. and Appl. – 1975. – V.50. – № 3. – P. 627–638.

Полищук (Чайчук) О. Р.

Качественное исследование некоторого сингулярного функционально-дифференциального уравнения

Резюме

Рассматривается сингулярная задача Коши для функционально-дифференциального уравнения определенного типа, разрешенного относительно производной неизвестной функции. Решения ищутся в классе непрерывно-дифференцируемых функций. Доказывется, что существует непустое множество непрерывно-дифференцируемых решений, имеющих определенные асимптотические свойства в достаточно малой окрестности особой точки. Построение асимптотики решений является не менее важным результатом, чем доказательство существования решений. Для исследования поставленной задачи использована методика, соединяющая элементы теории функций и качественной теории дифференциальных уравнений. При этом качественный анализ применен не только при построении некоторого нелинейного оператора, но и при доказательстве того, что этот оператор удовлетворяет условиям теоремы о неподвижной точке. Эта методика, по нашему мнению, может быть использована при решении широкого класса задач нелинейной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, задача Коши, асимптотика решений, сингулярная задача, непрерывно -дифференцируемое решение, функции Ляпунова.

Polishchuk (Chaichook) O. R.

A qualitative investigation for some singular functional differential eqation

Summary

A singular Cauchy problem for functional differential equations of a certain type is considered, solved for the derivative of the unknown function. Solutions are sought in the class of continuously differentiable functions. It is proved that there exists a nonempty set of continuously differentiable solutions having certain asymptotic properties in a sufficiently small neighborhood of the singular point. Construction of the asymptotic behavior of solutions is as important result as proof of the existence of solutions. To study the task, a technique was used that combines elements of the theory of functions and the qualitative theory of differential equations. Moreover, a qualitative analysis was applied not only in constructing a certain nonlinear operator, but also in proving that this operator satisfies the conditions of the fixed-point theorem. This technique, in our opinion, can be used for a wide range of problems of the theory of nonlinear ordinary differential equations.
Key words: functional differential equation, initial value problem, solution asymptotics, singular problem, continuously differentiable solution, Lyapunov functions.

References

1. Azbelev, N. V.(1999). Sovremennoe sostoyanie i tendentsii razvitiya teorii funktsionalno-differentsialnyih uravneniy [Current state and development tendencies of the functional-differential equations theory] Izv. vuzov. Matematika № 6 8-19 p.

2. Azbelev, N.V., Maksimov, V.P., Rahmatullina, L.F. (1991). Vvedenie v teoriyu funktsionalno-differentsialnyih uravneniy [Introduction to the functional-differential equations theory] *M.: Nauka.*, P. 280.

3. Azbelev, N.V., Maksimov, V.P., Rahmatullina, L.F. (2002). *Elementyi sovremennoy teorii funktsionalno-differentsialnyih uravneniy. Metodyi i prilozheniya [Elements of the modern functional differential equations theory. Methods and applications]* Moscow: Institut Kompyuternyih Issledovaniy, 384 p.

4. Azbelev N.V., Alvesh M.Zh., Bravyiy E.I. (1999). *O singulyarnyih kraevyih zadachah dlya lineynogo funktsionalno-differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka [On singular boundary value problems for a second-order linear functional-differential equation]*. Izv. vuzov. Matematika № 2, 3-11 p.

5. Alvesh, M.Zh. (1999). O razreshimosti dvuhtochechnoy kraevoy zadachi dlya singulyarnogo nelineynogo funktsionalno-differentsialnogo uravneniya [On solvability of a two-point boundary problem for a singular nonlinear functional-differential equation]. *Izv. vuzov. Matematika*, № 2, P. 12-19.

6. Ahmerov, P.P., Kamenskiy, M.I., Potapov, A.S, Rodkina, A.E., Sadovskiy, B.N. (1981). Teoriya uravneniy neytralnogo tipa [Neutral type equations theory]. *Itogi nauki i tehniki. Matematicheskiy analiz*, P. 55-126.

7. Belskiy, D.V. (2005).Asimptoticheskie svoystva resheniy sistem differentsialno-funktsionalnyih uravneniy [Asymptotic properties of solutions for systems of differential-functional equations] *Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk.-Kiev* ,121 p.

8. Bravyiy, E.I. (1993). *O razreshimosti odnoy kraevoy zadachi dlya nelineynogo singulyarnogo funktsionalno-differentsialnogo uravneniya [On the solvability of a boundary value problem for a nonlinear singular functional-differential equation].* Izv. vuzov. Matematika № 5, 17-23 p.
9. Bravyiy, E.I. (1996). *Lineynyie funktsionalno-differentsialnyie uravneniya s vnutrennimi singulyarnostyami [Linear functional-differential equations with internal singularities].* Avtoref. dis.... kand. fiz.-mat. nauk.— Perm, 18 p.
10. Demidovich, B.P. (1967). *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti [Lectures on the mathematical theory of stability].* M.: Nauka, 472 p.
11. Erugin N.P. (1972). *Kniga dlya chteniya po obschemu kursu differentsialnyih uravneniy [A book for reading on the general course of differential equations.].* Minsk: Nauka i tehnika, 664 p.
12. Zernov, A.E. (1992). *O razreshimosti i asimptoticheskih svoystvah resheniy odnoy singulyarnoy zadachi Koshi [On the solvability and asymptotic properties of solutions for a singular Cauchy problem].* Differents. uravneniya.— 1992.— T. 28.,No 5, 756-760 p.
13. Zernov, A.E. (2001). *Kachestvennyiy analiz neyavnoy singulyarnoy zadachi Koshi [Qualitative analysis of an implicit singular Cauchy problem].* Differents. uravneniya.— T. 28.,No 5, 756-760 p.
14. Zernov, A.E. (2001). *O razreshimosti i asimptotike resheniy nekotorogo funktsionalno-differentsialnogo uravneniya s singulyarnostyu [On the solvability and asymptotics of solutions for a functional-differential equation with a singularity].* Ukrainskiy matem. zhurnal.—T.57, No 10, 1344-1358 p.
15. Zernov, A.E., Chaychuk, O.R. (2005). *O singulyarnyih funktsionalno-differentsialnyih uravneniyah [On singular functional-differential equations].* Sovremennaya matematika i ee prilozheniya- T.36.86-94 p.
16. Kiguradze, I. T. (1975). *Nekotoryie singulyarnyie kraevyie zadachi dlya obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy[Some singular boundary-value problems for ordinary differential equations].* Tbilisi: Izd-vo Tbilisskogo un-ta, 352 p.
17. Pelyuh, G.P., Sharkovskiy A.N. (1974). *Vvedenie v teoriyu funktsionalnyih uravneniy [Introduction to the theory of functional equations.].* Kiev: Naukova dumka, 1974.— 120 p.
18. Samoylenko, A.M., Perestyuk, M.O., Parasyuk, I.O. (2003). *DiferentsIalnI rivnyannya [Differential equations.].* K.: LibId, 600 p.
19. Filippov, A.F.(2004). *Vvedenie v teoriyu differentsialnyih uravneniy [Introduction to the theory of differential equations]* M.: Editorial URSS 240 p.
20. Heyl, Dzh. (1984). *Teoriya funktsionalno-differentsialnyih uravneniy [Theory of functional-differential equations]* M.: Mir, 421 p.
21. Chechik, V.A. (1959). *Issledovanie sistem obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy s singulyarnostyu [Investigation of systems of ordinary differential equations with singularity]* Trudyi Mosk. matem. ob-va, No 8, 155-198 p.

22. Shindyapin,A. I. (1984). . *O kraevoy zadache dlya odnogo singulyarnogo uravneniya [On a boundary-value problem for a singular equation]* Differents. uravneniya.— T.20.— No 3, 450-455 p.

23. Grimm, L.J. (1972). *Analytic solutions of a neutral differential equation near a singular point* Proceedings of the Amer. Math. Soc.— V.36.— JM. 187-190 p.

24. Grimm,L. J., Hall,L. M. (1975). *Holomorphic solutions of singular functional differential equations* Journal of Math. Anal. and Appl.— V.50.— No 3. 627-638 p.