УДК 519.7

Н. А. Якімова
Одеський національний університет ім. І. І. Мечнікова

ПРЕДИКАТНІ ЛОГІЧНІ МАТРИЦІ

У класичній лінійній алгебрі широко використається апарат матриць. Але класична лінійна алгебра має справу із безперервними об'єктами. Логічна алгебра, побудована за аналогією з класичною лінійною алгеброю, будує ті ж самі моделі за допомогою дискретних об'єктів, що мають логічну структуру і підкоряються відповідним законам. Це призводить до суттєвих відмінностей у функціонуванні побудованих моделей. Дана стаття присвячена матрицям, в якості елементів для яких взято елементарні логічні елементи, а саме скінченні предикати довільної арності. В роботі досліджені властивості таких матриць та особливості їх застосування. Також розглянуті основні операції над такими матрицями. Крім звичайних операцій, що мають місце в класичній лінійній алгебрі, логічні структури дозволяють виконувати це декілька операцій.
MSC: 03G05, 03G25, 03F52, 06E25, 15B34.
Ключові слова: скінченний предикат, булева матриця, предикатна матриця, диз'юнкція, кон'юнкція, заперечення, ортогональна матриця, скаляр, обертання матриці.
DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).190052.

1. Вступ

Устояні уявлення про математичну логіку як про науку, що вивчає закони мислення із застосуванням апарата математики, головним чином, для потреб самої математики, у сучасних умовах стає занадто вузьким [1]. З розширенням галузей застосування й подальшим розвитком математичної логіки змінюється й погляд на неї. Об'єктами математичної логіки є будь-які дискретні скінченні системи, а її головна задача структурне моделювання таких систем. Людська мова, як явище дискретне, природно, повинна описуватися засобами дискретної математики. Для опису природної людської мови найкраще підійшов би апарат рівнянь, подібний до апарата, використовуваного в математичному аналізі, але відмінного від останнього тим, що він призначений для формалізації не безперервних, а дискретних процесів. Таку мову дають логічні вирахування, а саме: вирахування висловлень і вирахування предикатів. Однак щоб мати можливість ефективно вирішувати зазначені рівняння, необхідно довести ці вирахування до рівня алгебраїчної системи.

2. Попередні результати

Однією з важливіших алгебраїчних моделей є апарат матриць. Логічні матриці мають два різновиди: булеві та предикатні.

Надійшла 01.10.2019

Означення 1. *Логічна матриця називається булевою, якщо її елементами є логічні скаляри із поля $K = \{0, 1\}$ [2].*

Тобто елементами булевої матриці є нулі та одиниці [1]. Наприклад, булевою буде матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Означення 2. *В свою чергу, логічна матриця називається предикатною, якщо усі її елементи узяті із одного й того ж поля скінченних предикатів довільної арності.*

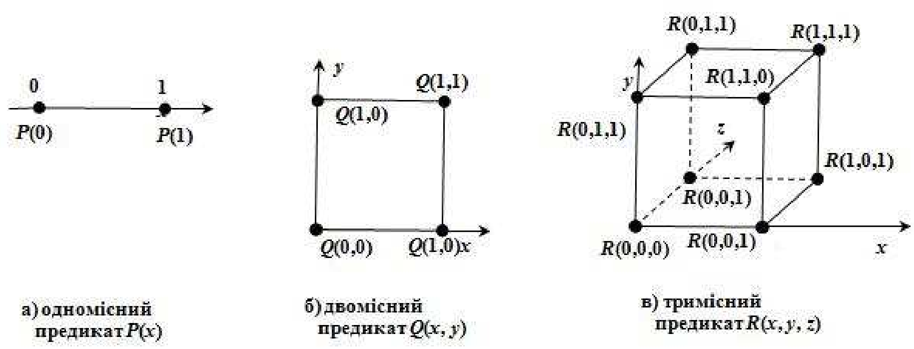
Означення 3. *Скінченним n-місним предикатом (предикатом арності n) над алфавітом A називається будь-яка функція $t = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від n буквених аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заданих на множині A, що приймає логічні значення t.*

Іноді скінченний предикат f називають k-їчним, підкреслюючи, що його алфавіт A складається з k букв [4].

Якщо матриця є булевою, усі існуючі операції з нею, що описані в [2], не викликають труднощів та непорозумінь. Але якщо матриця є предикатною, то операції з нею не завжди очевидні і потребують додаткових досліджень.

3. Основні результати

Графічно елементи предикатних скалярних полів, в залежності від арності предиката, можна подати наступним чином:



Мал. 1.: Графічне подання предикатних логічних скалярів

Таким чином, кожен елемент предикатної логічної матриці може бути поданий у вигляді гіперкуба розмірності n[3]. Наприклад, на мал. 1в) розглянуто випадок тримісного предиката $R(x, y, z)$, який заданий над алфавітом $K = \{0, 1\}$ із $k = 2$ символів. При цьому кожній вершині гіперкуба відповідає значення предиката при певних значеннях аргументів x, y і z, які створили дану вершину. Роль одиничного елементі поля скалярів відіграє предикат, що дорівнює одиниці при всіх значеннях його аргументів. Відповідно, роль нульового елемента відіграє предикат, що при всіх значення його аргументів дорівнює нулю. Графічно одиничний елемент подається гіперкубом, усім вершинам якого відповідають одиниці, а нульовий – гіперкубом, усім вершинам якого відповідають нулі. Згідно визначенням предикатних операцій [4; 5], всі дії над такими елементами поля логічних скалярів виконуються порозрядно.

Означення 4. *Під розрядом розуміється значення розглянутого предиката при одному з можливих наборів аргументів.*

Таким чином, бінарні операції (диз'юнкція й кон'юнкція) припускають, що їхнім результатом буде елемент, кожному розряду якого відповідає значення виконаної бінарної операції над однойменними розрядами предикатів, що беруть участь в операції.

Означення 5. *Під однойменними розрядами розуміються значення цих предикатів від однакових наборів аргументів.*

Операція заперечення також проводиться порозрядно. Ці операції будуть обчислюватися за наступними правилами:

$$(P_i \vee P_j)(x_1, \ldots, x_n) = P_i(x_1, \ldots, x_n) \vee P_j(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

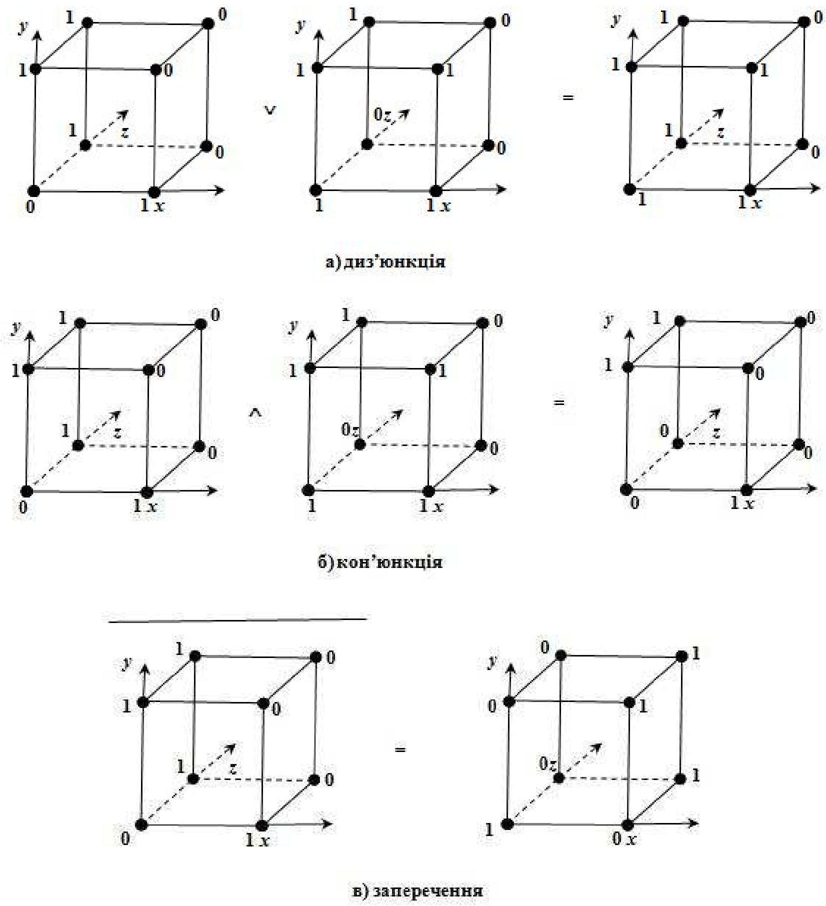
$$(P_i \wedge P_j)(x_1, \ldots, x_n) = P_i(x_1, \ldots, x_n) \wedge P_j(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

$$\overline{P_i}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{P_i(x_1, K, x_n)}. \tag{3}$$

Графічно ці операції над елементами предикатних матриць подані на мал. 2.

Наприклад, як поле логічних скалярів візьмемо множину одномісних предикатів $P_i(x), i = 0, \ldots, 3$, де $x \in \{0, 1\}$ Ця множина задана таблицею 1.

Далі одномісні предикати подаються рядками $P = (P(0), P(1))$. Тоді $P_0 = (0, 0), P_1 = (0, 1), P_2 = (1, 0), P_3 = (1, 1)$. Позначимо це скалярне поле через $\mathbf{P}$. Тоді результати операцій добутку на скаляр, диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення над предикатними матрицями, заданими, наприклад,



Мал. 2.: Графічне подання операцій над скінченними предикатами однакової арності

над полем одномісних предикатів, будуть наступними:

$$P_1\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_1\\ P_0 & P_3 & P_1\\ P_2 & P_0 & P_3\end{pmatrix}=(0,1)\begin{pmatrix}(0,1) & (1,0) & (0,1)\\ (0,0) & (1,1) & (0,1)\\ (1,0) & (0,0) & (1,1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(0,1) & (0,0) & (0,1)\\ (0,0) & (0,1) & (0,1)\\ (0,0) & (0,0) & (0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & P_0 & P_1\\ P_0 & P_0 & P_1\\ P_0 & P_0 & P_1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_1\\ P_0 & P_3 & P_1\\ P_2 & P_0 & P_3\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}P_3 & P_2 & P_1\\ P_1 & P_0 & P_2\\ P_2 & P_1 & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(0,1) & (1,0) & (0,1)\\ (0,0) & (1,1) & (0,1)\\ (1,0) & (0,0) & (1,1)\end{pmatrix}\vee$$

x	P_0	P_1	P_2	P_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблиця 1: Множина одномісних предикатів, заданих на алфавіті $K = \{0, 1\}$

$$\vee \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} \wedge$$

$$\wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix};$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{P_1} & \overline{P_2} & \overline{P_1} \\ \overline{P_0} & \overline{P_3} & \overline{P_1} \\ \overline{P_2} & \overline{P_0} & \overline{P_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{(0,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(1,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Операція добутку предикатних матриць виконується за правилом, спільним для усіх логічних матриць. Відповідні необхідні до виконання операції над їх елементами обчислюються за формулами (1) і (2). Але щодо операції обертання, то у випадку предикатних матриць її визначення дещо складніше, ніж для булевих логічних матриць. Якщо розглядати булеві матриці як окремий випадок предикатних матриць (вони задані над полем нуль-місних предикатів), то можна стверджувати, що за цієї умови наступні визначення і твердження розповсюджуються на булеві матриці також. Але для них все це можна обчислювати простіше [2].

Означення 6. *Квадратна логічна матриця A називається ортогональною, якщо диз'юнкція всіх елементів кожного її рядка й диз'юнкція всіх елементів кожного її стовпця дорівнюють тотожній одиниці, а кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її рядку й кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її стовпці дорівнюють тотожному нулю.*

Наприклад, логічна матриця A над полем P одномісних предикатів

$$A\begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

є ортогональною, а матриця

$$A\begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} -$$

ні, тому що, наприклад, $a_{12} \wedge a_{13} = P_3 \wedge P_2 = (1,1) \wedge (1,0) \neq 0$

Теорема 1. *Щоб для квадратних логічних матриць A и B над полем логічних скалярів $G = \{0,1\}$ або полем скінченних предикатів довільної арності виконувалася рівність $AB = E$, необхідно й досить, щоб A и B були ортогональними матрицями й підкорялися умові $B = AT$.*

Доведення. Привласнимо кожному розряду елементів скалярного поля, над яким задані матриці A і B, деякий індекс $v = 1, \ldots, (k_1 \times \ldots \times k_n)$, де n-арність предикатів, що є елементами поля скалярів, а $k_i, i = 1, \ldots, n$, - кількість символів в алфавіті, над яким заданий аргумент x_i цих предикатів. Таким чином, матриці A й B розпадаються на $(k_1 \times \ldots \times k_n)$ матриць над булевою множиною $G = \{0,1\}$

$$A^v = \begin{pmatrix} a_{11}^v & \ldots & a_{1s}^v \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1}^v & \ldots & a_{ss}^v \end{pmatrix} \text{ й } B^v = \begin{pmatrix} b_{11}^v & \ldots & b_{1s}^v \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s1}^v & \ldots & b_{ss}^v \end{pmatrix},$$

складених з v-тих розрядів елементів матриць A й B. Отже, якщо твердження справедливо для матриць над булевим полем скалярів $G = \{0,1\}$, то воно вірно й для матриць, елементами яких є предикати довільної арності. У силу цього досить довести твердження для випадку скалярного поля $G = \{0,1\}$ [2]. Нехай розмірність матриць A^v й $B^v - s \times s$. Виберемо довільно ціле t, $1 \leq t \leq s$. Якщо t-тий рядок матриці A^v нульовий, то й t-тий рядок матриці $(AB)^v$ буде нульовим. Тому в кожному рядку матриці A^v є хоча б одна одиниця, і цій одиниці відповідає деяка одиниця в матриці B^v (нехай це буде елемент $a_{tj}^v = 1$, якому відповідає b_{jt}^v). При $f \neq t$ $(1 \leq f \leq s)$ маємо $a_{fj}^v = 0$, тому що інакше $(AB)_{ft}^v = a_{fj}^v b_{jt}^v = 1$, тобто $(AB)^v \neq E$. Аналогічно, у матриці B^v всі елементи рядка j, за винятком b_{jt}^v, дорівнюють нулю. Таким чином, у кожному рядку матриці A^v є хоча б одна одиниця, причому всі ці одиниці розташовані в різних стовпцях. Тому матриця A^v - ортогональна. Аналогічно, ортогональна й матриця B^v. Рівність $(B)^v = (A^v)^T$ тепер очевидна (кожному елементу $a_{tj}^v = 1$ відповідає $b_{jt}^v = 1$). Теорему доведено.

4. Висновки

Таким чином, предикатна модель логічних матриць узагальнює розглянуту в [1; 2] булеву модель. Кожна операція над предикатними матрицями складається із 2^n операцій над булевими матрицями по кількості розрядів у відповідних елементах предикатного скалярного поля. Таким чином, предикатні логічні матриці можна розглядати як тривимірні булеві матриці, де третій вимір буде відповідати розрядам використаних предикатів. Відповідно, кількість впорядкованих «шарів» по третьому виміру буде складати 2^n. В свою чергу, булеві матриці можна розглядати як окремий випадок предикатних матриць, при якому арність застосованих предикатів дорівнює нулю. За цієї умови $2^n = 2^1 = 1$, тобто третій вимір буде складатися лише з одного шару. Таким чином, до предикатних матриць також можна застосовувати той апарат, що вважається притаманним булевим матрицям, зокрема апарат бінарних предикатів [6].

Список літератури

1. **Сигорский В. П.** Математический аппарат инженера / В. П. Сигорский — Киев: Техника, 1975. — 768с.
2. **Гвоздинская Н. А.** О логических матрицах / Н. А. Гвоздинская, З. В. Дударь, С. А. Пославский, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Проблемы бионики. Вып.48, 1998. — С. 12 — 22.
3. **Гвоздинская Н. А.** Булевы и предикатные логические пространства / Н. А. Гвоздинская // Проблемы бионики. Вып.51. 1999. — С. 106 — 115.
4. **Шабанов-Кушнаренко Ю. П.** Теория интеллекта. Математические средства. / Ю. П. Шабанов-Кушнаренко — Харьков: Вища школа, 1984. — 143с.
5. **Клини С.** Математическая логика. / С. Клини — М.: Мир, 1973. — 480с.
6. **Гвоздинский А. Н.** Представление булевых логических матриц в виде бинарных предикатов / А. Н. Гвоздинский , Н. А. Якимова, В. А. Губин // Радиоэлектроника и информатика. Вып.2. 2007. — С. 108 — 110.

Якимова Н. А.
Предикатные логические матрицы

Резюме

В классической линейной алгебре широко используется аппарат матриц. Но классическая линейная алгебра имеет дело с непрерывными объектами. Логическая алгебра, построенная по аналогии с классической линейной алгеброй, строит те же самые модели с помощью дискретных объектов, имеющих логическую структуру и подчиняющихся соответствующим законам. Это приводит к существенным отличиям в функционировании построенных моделей. Данная статья посвящена матрицам, в качестве элементов для которых берутся элементарные логические элементы, а именно конечные предикаты произвольной арности. В работе исследованы свойства таких матриц и особенности их применения. Также рассмотрены основные операции над такими матрицами. Кроме обычных операций, имеющих место в классической линейной алгебре, логические структуры позволяют выполнять еще несколько операций.
Ключевые слова: конечный предикат, булева матрица, предикатная матрица, дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, ортогональная матрица, скаляр, обращение матрицы.

Yakimova N. A.
Predicative logical matrices

Summary

In classical linear algebra the machine of matrices is widely used. But the classic linear algebra deals with continuous objects. Logical algebra, built by analogy with the classical linear algebra, builds the same models using discrete objects that have logical structure and obey the relevant laws. This leads to a significant difference in the functioning of the constructed models. This article is devoted to matrices, as elements for which the elementary logical elements are taken, namely the finite predicates of any quality of variables. In the work investigated the properties of such matrices and features of their application. Basic operations on such matrices are also considered. Besides the usual operations that take place in classical linear algebra, logical structures allow to perform this several operations.
Key words: finite predicate, Boolean matrix, predicative matrix, disjunction, conjunction, inversion, orthographic matrix, scalar, rotation of matrix.

References

1. Sigorskiy, V. P. (1975). *M*atematicheskiy apparat ingenera [Mathematical Apparatus Engineer]. Kiyv: Tekhnika, 768 p.
2. Gvozdinskaya, N. A., Dudar, Z. V., Poplavskiy, S. A., Shabanov-Kushnarenko, Y. P. (1998).*O logicheskikh matitzakh*[On logical matrix]. *Problemy bioniki.* Vol. 48, P. 12 — 22.
3. Gvozdinskaya, N. A. (1999). Bulevy i predikatnye logicheskie prostranstva [Boolean and predicative logical spaces]. *Problemy bioniki.* Vol. 51, P. 106 — 115.
4. Shabanov-Kushnarenko, Y. P. (1984). *Teoriya intellekta. Matematicheskie sreddstva. [Theory of Intelligence. Mathematical means].* Kharkiv: Vyscha shkola, 143 p.
5. Kliny, S. (1973). *Matematicheskaya logika. [Mathematical Logic].* Moscow: Mir, 480 p.
6. Gvozdinsky, A. N., Yakimova, N. A., Gubin, V. A. (2007). Predstavlenie bulevykh logicheskikh matritz v vide binarnykh predikatov [Presentation of the bullet logical matrix in the form of binary predicates]. *Radioelektronika i informatika.* Vol .2, P. 108 — 110.