Дослідження в математиці і механіці. — 2019. — Т. 24, вип. 2(34). — С. 45–66

УДК 517.9

Т. А. Комлева[1], И. В. Молчанюк[1], Н. В. Скрипник[2], А. В. Плотников[1]
[1]Одесская государственная академия строительства и архитектуры
[2]Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОДНА ЛИНЕЙНАЯ МНОГОЗНАЧНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

В последнее время многие авторы рассматривали вопросы существования, единственности и свойства решений многозначных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, уравнений высших порядков, исследовали импульсные и управляемые системы в рамках теории многозначных уравнений. Очевидно, что получение всех этих результатов было бы невозможно без развития теории многозначного анализа. В последние появились новые определения производной для многозначных отображений, которые в отличие от использовавшейся ранее производной Хукухары, дали возможность дифференцировать многозначные отображения, диаметр которых не только не убывающая функция. В результате были рассмотрены многозначные дифференциальные уравнения, решения которых являются многозначные отображения, диаметр которых не является монотонной функцией. В данной статье рассматривается новая постановка задачи оптимального управления (задача быстродействия), которая стала возможна благодаря этим новым производным и дифференциальным уравнениям, а так же приведен метод решения данной задачи.
MSC: 34A60, 34A12.
Ключевые слова: многозначные уравнения, управление, задача быстродействия, производная Хукухары.
DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).190048.

1. Введение

В последнее время в рамках теории многозначных уравнений были рассмотрены свойства решений многозначных дифференциальных уравнений, многозначных дифференциальных включений, многозначных интегро-дифференциальных уравнений и многозначных интегральных уравнений, а также исследовались дискретные многозначные системы, импульсные многозначные системы и управляемые многозначные системы (см. [1–7] и ссылки в них). Очевидно, что получение всех этих результатов было невозможно без развития теории многозначного анализа (см. [1–4; 7] и ссылки в них).

В последние десятилетия в работах А.В. Плотникова и Н.В. Скрипник [8–11], M.T. Malinowski [12; 13], H. Vu, L.S. Dong [14], H. Vu, N. Van Hoa [15] и Ş.E. Amrahov, A. Khastan, N. Gasilov, A.G. Fatullayev [16] появились определения производной от многозначного отображения, которые в отличие от уже ставшей классической производной Хукухары [17], дали возможность дифференцировать многозначные отображения, диаметр ко-

Получена 27.09.2019

торых является не монотонной функцией. Это дало возможность не только рассматривать новые типы многозначных дифференциальных уравнений, но и новые задачи оптимального управления многозначными отображениями.

В данной статье рассмотрена задача быстродействия многозначным объектом, поведение которого описывается линейным многозначным дифференциальным уравнением и предложен метод ее разрешения.

1. Необходимые определения и обозначения. Пусть R^n - n-мерное пространство с евклидовой метрикой $d(\cdot,\cdot)$ и $conv(R^n)$ - метрическое пространство всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \max\left\{\max_{a\in A}\min_{b\in B} d(a,b),\ \max_{b\in B}\min_{a\in A} d(a,b)\right\},$$

где $A, B \in conv(R^n)$.

Как известно, пространство $conv(R^n)$ не является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на скаляр, так как в общем случае нельзя ввести понятие противоположного для $A \in conv(R^n)$ элемента, то есть в общем случае $A+(-1)A \neq \{0\}$, хотя, если $A = \{a\} \in R^n$, то для него противоположный элемент существует.

Отсутствие противоположного элемента в пространстве $conv(R^n)$ приводит к неоднозначному введению понятия разности множеств и условиям ее существования. Наиболее распространенной и используемой в научных публикациях является разность Хукухары [17].

Определение 1 ([17])**.** *Пусть $X, Y \in conv(R^n)$, а множество $Z \in conv(R^n)$ таково, что $X = Y + Z$. Тогда множество Z мы будем называть разностью по Хукухаре множеств X и Y и писать $Z = X \overset{H}{-} Y$.*

Основными свойствами разности Хукухары [2] являются следующие:

1) если разность Хукухары двух множеств $A \overset{H}{-} B$ существует, то она единственная;

2) $A \overset{H}{-} A = \{0\}$ для любого $A \in conv(R^n)$;

3) $(A + B) \overset{H}{-} B = A$ для любых $A, B \in conv(R^n)$.

M. Hukuhara ввел понятие H-дифференцируемости [17] для многозначных отображений, используя разность Хукухары.

Определение 2 ([17])**.** *Будем говорить, что $X(\cdot) : [0,T] \to conv(R^n)$ имеет производную по Хукухаре (H-производную) $D_H X(t) \in conv(R^n)$ в* *точке $t \in (0, T)$, если для всех малых $\Delta > 0$ соответствующие разности Хукухары существуют и выполняется условие:*

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1}(X(t+\Delta) \overset{H}{-} X(t)) = \lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t-\Delta)) = D_H X(t).$$

Свойства производной Хукухары рассматривались в работах [1–4; 17]. Приведем некоторые из них.

Теорема 1 ([17])**.** *Если многозначное отображение $X : [0, T] \to conv(R^n)$ является дифференцируемым по Хукухаре на $[0, T]$, тогда*

$$X(t) = X(0) + \int\limits_0^t D_H X(s) ds,$$

где интеграл понимается в смысле Хукухары [17].

Замечание 1. *Если многозначное отображение $X(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре на промежутке $[0, T]$, то функция $diam(X(\cdot))$ является неубывающей функцией на $[0, T]$.*

Замечание 2 ([18])**.** *Обратное утверждение не будет верным. Например, пусть $X(\cdot) : [0, 1] \to conv(R^2)$ такое, что $X(t) = A(t)C(t)$, где $C(t) = \{x \in R^2 \mid |x_i| \leq t,\ i = 1, 2\}$ – квадрат, $A(t) = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$ – матрица поворота. Очевидно, что $diam(X(t)) = \sqrt{2}t$. Однако, многозначное отображение $X(\cdot)$ не является дифференцируемым по Хукухаре на $[0, 1]$ (так как отсутствует разность Хукухары $X(t_2) \overset{h}{-} X(t_1)$ для всех точек $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$.*

Замечание 3. *Если функция $diam(X(\cdot))$ является убывающей функцией на $[0, T]$, то многозначное отображение $X(\cdot)$ не является дифференцируемой по Хукухаре на $[0, T]$.*

Очевидно, что последнее замечание качественно ухудшает возможности применения производной Хукухары для дифференцирования многозначных отображений и использования ее при рассмотрение многозначных дифференциальных уравнений.

В последующем были предприняты различные подходы для исправления этого недочета. Одним из первых был предложен в работах H.T. Banks, M.Q. Jacobs [19] и Ю.Н.Тюрин [20]. В этих работах метрическое пространства $(conv(R^n), h(\cdot, \cdot))$ при помощи теоремы Radström [1–4] вкладывается в линейное пространство над полем действительных чисел $\mathcal{B}$ и вводится понятие π-производной. Некоторые свойства этой производной рассматривались в работах [1–4; 19; 21; 22]. Там же было доказано, что если многозначное отображение $X(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре на $[0,T]$, то оно $\pi-$дифференцируемо на $[0,T]$. Однако, π-производная от многозначного отображения $X(\cdot)$ может быть элементом пространства $\mathcal{B}$, которое не имеет аналога в пространстве $conv(R^n)$ и ее применение при рассмотрение многозначных дифференциальных уравнений очень затруднительно (смотри [1–3; 21; 22]).

Далее в работе [23] была введена T-производная, которая обобщает производную Хукухары и аналогична π-производной. Однако, данная производная так же затрудняет запись и рассмотрение соответствующего многозначного дифференциального уравнения [2; 3; 23].

Впоследствии, А.В. Плотников и Н.В. Скрипник, используя основные идеи T-производной [3; 23], ввели новое определение производной для многозначных отображений.

Определение 3 ([8])**.** *Будем говорить, что* $X(\cdot):[0,T]\to conv(R^n)$ *имеет обобщенную производную (PS-производную)* $D_{ps}X(t)\in conv(R^n)$ *в точке* $t\in(0,T)$*, если для всех малых* $\Delta>0$ *соответствующие разности Хукухары существуют и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(i) $\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t+\Delta)\overset{H}{-}X(t))=\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t)\overset{H}{-}X(t-\Delta))=D_{ps}X(t)$;

(ii) $\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t)\overset{H}{-}X(t+\Delta))=\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t-\Delta)\overset{H}{-}X(t))=D_{ps}X(t)$;

(iii) $\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t+\Delta)\overset{H}{-}X(t))=\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t-\Delta)\overset{H}{-}X(t))=D_{ps}X(t)$;

(iv) $\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t)\overset{H}{-}X(t+\Delta))=\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(X(t)\overset{H}{-}X(t-\Delta))=D_{ps}X(t)$.

Замечание 4. *Если многозначное отображение дифференцируемо по Хукухаре, то оно PS-дифференцируемо и* $D_{ps}X(t)=D_HX(t)$ *(обратное не верно).*

Проиллюстрируем это на следующем примере:

Пример 1. *Многозначное отображение* $X(t)=B_{|t|}(0)$ *имеет PS-производную на* R *и* $D_{ps}X(t)\equiv B_1(0)$ *для всех* $t\in R$*. Однако производная Хукухары будет существовать только на интервале* $(0,+\infty)$ *и* $D_HX(t)=B_1(0)$*. На интервале* $(-\infty,0)$ *многозначное отображение* $X(\cdot)$ *не будет дифференцируемо по Хукухаре так как его диаметр является убывающей функцией.*

Теорема 2 ([8])**.** *Если многозначное отображение* $X:[0,T]\to conv(R^n)$ *дифференцируемо в обобщенном смысле на отрезке* $[0,T]$*, тогда для всех* $t\in[0,T]$

(i) если функция $diam(X(t))$ *– неубывающая функция на* $[0,T]$*, то*

$$X(t) = X(0) + \int\limits_0^t D_{ps}X(s)ds;$$

(ii) если функция $diam(X(t))$ *– убывающая функция на* $[0,T]$*, то*

$$X(t) = X(0) \underline{H} \int\limits_0^t D_{ps}X(s)ds.$$

Более подробно свойства PS-производной изучены в работах [8–11].

В дальнейшем в работах M.T. Malinowski [12; 13], H. Vu, L.S. Dong [14], H. Vu, N. Van Hoa [15] и Ş.E. Amrahov, A. Khastan, N. Gasilov, A.G. Fatullayev [16] была обобщена прозводная Bede-Gal [24] для интервальнозначных отображений на многозначные отображения.

Определение 4 ([14; 16])**.** *Будем говорить, что* $X(\cdot) : [0,T] \to conv(R^n)$ *имеет Bede-Gal производную (BG-производную)* $D_{bg}X(t) \in conv(R^n)$ *в* $t \in (0,T)$*, если для всех малых* $\Delta > 0$ *соответствующие разности Хукухары существуют и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(i) $\lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta^{-1}(X(t+\Delta) \underline{H} X(t)) = \lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta^{-1}(X(t) \underline{H} X(t-\Delta)) = D_{bg}X(t)$

(ii) $\lim\limits_{\Delta\to 0} (-\Delta)^{-1}(X(t) \underline{H} X(t+\Delta)) = \lim\limits_{\Delta\to 0} (-\Delta)^{-1}(X(t-\Delta) \underline{H} X(t)) = D_{bg}X(t)$

(iii) $\lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta^{-1}(X(t+\Delta) \underline{H} X(t)) = \lim\limits_{\Delta\to 0} (-\Delta)^{-1}(X(t-\Delta) \underline{H} X(t)) = D_{bg}X(t)$

(iv) $\lim\limits_{\Delta\to 0} (-\Delta)^{-1}(X(t) \underline{H} X(t+\Delta)) = \lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta^{-1}(X(t) \underline{H} X(t-\Delta)) = D_{bg}X(t)$.

Замечание 5. *В работах [12; 13] M.T. Malinowski рассматривает отображения, которые удовлетворяю условию (ii) и называет производную второй производной Хукухары.*

Замечание 6. *Если многозначное отображение дифференцируемо по Хукухаре [17], то оно дифференцируемо в смысле Bede-Gal производной и* $D_{bg}X(t) = D_H X(t)$ *(обратное не верно, смотри пример 1).*

Теорема 3 ([16])**.** *Если многозначное отображение* $X : [0,T] \to conv(R^n)$ *BG-дифференцируемо на* $[0,T]$*, тогда для всех* $t \in [0,T]$
(i) если функция $diam(X(t))$ *есть неубывающая функция на* $[0,T]$*, то*

$$X(t) = X(0) + \int\limits_0^t D_{bg}X(s)ds;$$

(ii) если функция $diam(X(t))$ есть убывающая функция на $[0,T]$, то

$$X(t) = X(0)\overset{H}{-}(-1)\int\limits_0^t D_{bg}X(s)ds.$$

Замечание 7. *Из замечаний 4 и 6 следует, что если многозначное отображение $X(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре на $[0,T]$, то оно BG-дифференцируемо на $[0,T]$ и PS-дифференцируемо на $[0,T]$, а так же $D_H X(t) = D_{ps}X(t) = D_{bg}X(t)$.*

Замечание 8. *Из примера 1, мы видим, что многозначное отображение $X(t) = B_{|t|}(0)$ BG-дифференцируемо на R и PS-дифференцируемо на R, а так же $D_{bg}X(t) \equiv D_{ps}X(t) \equiv B_1(0)$ для всех $t \in R$.*

Замечание 9. *Так же отметим, что существуют многозначные отображения $X(\cdot)$ такие, что $D_{bg}X(t) \neq D_{ps}X(t)$.*

Проиллюстрируем это на следующих примерах:

Пример 2. *Пусть многозначное отображение $X : [-1,1] \to conv(R^2)$ такое, что*

$$X(t) = \begin{cases} \{x \in R^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq |t|,\, x_2 \geq 0\}, & t \in [-1,0], \\ \{x \in R^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq t,\, x_2 \leq 0\}, & t \in (0,1] \end{cases} \quad \textit{(смотри Рис. 1).}$$

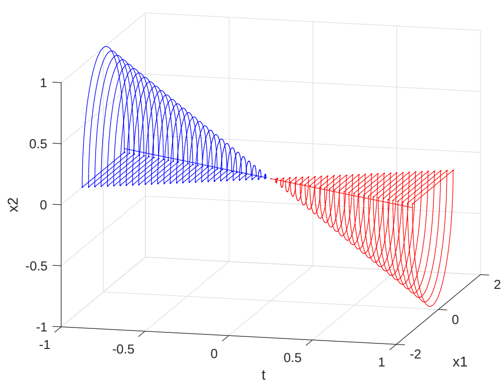

Рис. 1: $X(t)$, $t \in [-1,1]$

Многозначное отображение $X(\cdot)$ BG-дифференцируемо на $(-1,1)$ и его BG-производная $D_{bg}X(t) \equiv \{x \in R^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\, x_2 \leq 0\}$. Однако, многозначное отображение $X(\cdot)$ PS-дифференцируемо на $(-1,0)$ и его PS-производная $D_{ps}X(t) \equiv \{x \in R^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\, x_2 \geq 0\} \neq D_{bg}X(t)$. Так *же, многозначное отображение $X(\cdot)$ PS-дифференцируемо на $(0,1)$ и его PS-производная $D_{ps}X(t) \equiv \{x \in R^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_2 \ge 0\} = D_{bg}X(t)$. Следовательно, PS-производная $D_{ps}X(t)$ в точке $t = 0$ не существует (смотри Рис. 2 и Рис. 3).*

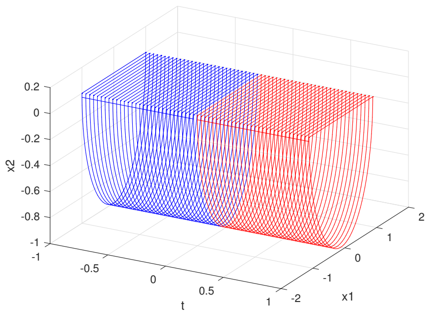

Рис. 2: $D_{bg}X(t),\ t \in [-1,1]$

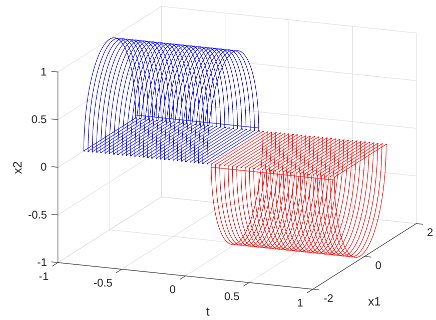

Рис. 3: $D_{ps}X(t),\ t \in [-1,1]$

Пример 3. *Пусть многозначное отображение $X : [0,2] \to conv(R^2)$ такое, что*

$$X(t) = \begin{cases} \{x \in R^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \le t,\ x_2 \ge 0\}, & t \in [0,1], \\ \{x \in R^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \le 2 - t,\ x_2 \ge 0\}, & t \in (1,2] \end{cases} \quad \textit{(смотри Рис. 4).}$$

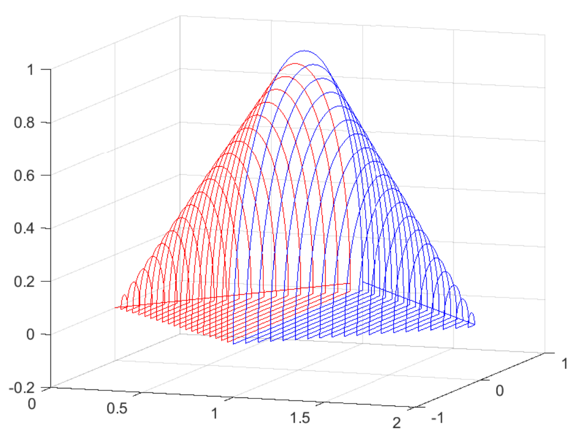

Рис. 4: $X(t),\ t \in [0,2]$

Многозначное отображение $X(\cdot)$ PS-дифференцируемо на $(0,2)$ и его PS-производная $D_{ps}X(t) \equiv \{x \in R^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \le 1, x_2 \ge 0\}$. Однако, многозначное отображение $X(\cdot)$ BG-дифференцируемо на $(0,1)$ и его

BG-производная $D_{bg}X(t) \equiv D_{ps}X(t)$. *Так же, отображение* $X(\cdot)$ *BG-дифференцируемо на* $(1,2)$ *и его BG-производная* $D_{bg}X(t) \equiv (-1)D_{ps}X(t)$. *Очевидно, BG-производная* $D_{bg}X(t)$ *в точке* $t=1$ *не существует (смотри Рис. 5 и Рис. 6).*

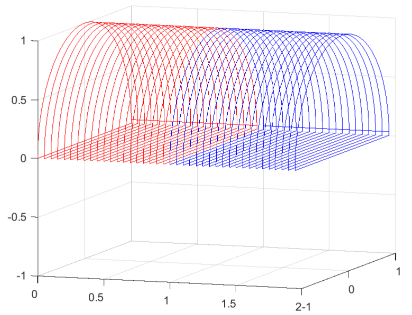

Рис. 5: $D_{ps}X(t)$, $t \in [0,2]$

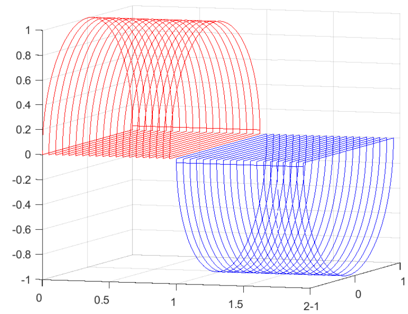

Рис. 6: $D_{bg}X(t)$, $t \in [0,2]$

Замечание 10. *Далее мы будем использовать только PS-производную.*

2. Задача быстродействия. Пусть поведение объекта описывается следующей системой

$$D_{ps}X = X + u, \quad X(0,u) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in conv(R^n)$ – фазовое множество, $u \in U \subset R^n$ – вектор управления, $U \in conv(R^n)$ – некоторое заданное множество допустимых значений управления такое, что $0 \in intU$, $X_0 \in conv(R^n)$ – начальное множество, $0 \in intX_0$.

Определение 5. *Вектор-функция* $u(\cdot)$ *называется допустимым управлением для системы (1) на отрезке* $[0,T]$, *если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) суммируема на $[0,T]$;

2) $u(t) \in U$ *для всех* $t \in [0,T]$.

Определение 6. *Многозначное отображение* $X(\cdot,u)$ *будем называть решением системы (1) на отрезке* $[0,T]$, *соответствующим допустимому управлению* $u(\cdot)$, *если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1) $X(\cdot,u)$ *– непрерывно на* $[0,T]$;

2) $X(\cdot,u)$ *– PS-дифференцируемо почти всюду на* $[0,T]$;

3) $X(0,u) = X_0$;

4) $D_{ps}X(t,u) \equiv X(t,u) + u(t)$ *для почти всех* $t \in [0,T]$.

Замечание 11. *Для любого допустимого управления $u(\cdot)$ любое решение $X(\cdot, u)$ системы (1) обладает следующим свойством: для всех $t \in [0, T]$ всегда найдутся такое число $a(t) > 0$ и вектор $b(t) \in R^n$, что $X(t, u) = a(t)X_0 + b(t)$, то есть сечение любого решения системы (1) сохраняет форму начального множества.*

Определение 7. *Многозначное отображение $X_1(\cdot, u)$ будем называть первым базовым решением системы (1) на отрезке $[0, T]$, соответствующее допустимому управлению $u(\cdot)$, если функция его диаметра $diam(X_1(\cdot, u))$ является монотонно неубывающей функцией на отрезке $[0, T]$.*

Замечание 12. *Первое базовое решение системы (1) на отрезке $[0, T]$, будет решением следующего интегрального уравнения*

$$X(t, u) = X_0 + \int_0^t [X(s, u) + u(s)]ds.$$

Определение 8. *Многозначное отображение $X_2(\cdot, u)$ будем называть вторым базовым решением системы (1) на отрезке $[0, T]$, соответствующее допустимому управлению $u(\cdot)$, если функция его диаметра $diam(X_2(\cdot, u))$ является монотонно убывающей функцией на отрезке $[0, T]$.*

Замечание 13. *Второе базовое решение системы (1) на отрезке $[0, T]$, будет решением следующего интегрального уравнения*

$$X(t, u) = X_0 \overset{H}{-} \int_0^t [X(s, u) + u(s)]ds.$$

Определение 9. *Многозначное отображение $X_{ms}(\cdot, u)$ будем называть смешанным решением системы (1) на отрезке $[0, T]$, соответствующее допустимому управлению $u(\cdot)$, если функция его диаметра $diam(X_{ms}(\cdot, u))$ не является монотонно убывающей или монотонно возрастающей функцией на отрезке $[0, T]$.*

Замечание 14. *Если многозначное отображение $X_{ms}(\cdot, u)$ является смешанным решением системы (1) на отрезке $[0, T]$, то существует некоторое разбиение не пересекающихся интервалов (t_i, t_{i+1}), $i = 0, 1, ..., k$ такое, что $[t_0, t_1) \cup [t_1, t_2) \cup ... \cup [t_k, t_{k+1}] = [0, T]$ и на каждом из интервалов многозначное отображение $X_{ms}(\cdot, u)$ удовлетворяет одному из интегральных уравнений*

$$X_{ms}(t, u) = X_{ms}(t_i, u) + \int_{t_i}^t [X_{ms}(s, u) + u(s)]ds$$

или

$$X_{ms}(t,u) = X_{ms}(t_i,u) \overset{H}{-} \int\limits_{t_i}^{t} [X_{ms}(s,u) + u(s)]ds,$$

где $t \in [t_i, t_{i+1}],\ i = 0, 1, ..., k.$

Замечание 15. *Для любого допустимого управления $u(\cdot)$ система (1) на любом отрезке $[0,T]$ имеет два базовых решения и бесконечно много смешанных решений.*

Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 4. *Пусть поведение объекта описывается системой (1), где $X \in conv(R^2)$, $X_0 = B_1(0)$, $T = 1$ и $u(t) \equiv 0$ для $t \in [0,1]$, то есть мы рассмотрим следующую систему*

$$D_{ps}X(t) = X(t), \quad X(0) = B_1(0),\ t \in [0,1]. \tag{2}$$

Легко получить, что первым базовым решением будет многозначное отображение $X_1(t) = B_{e^t}(0)$, а многозначное отображение $X_2(t) = B_{e^{-t}}(0)$ будет вторым базовым решением (смотри Рис. 7 и Рис. 8).

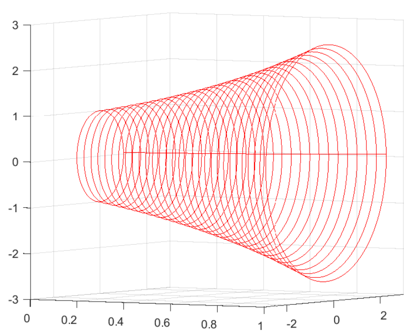

Рис. 7: $X_1(t)$, $t \in [0,1]$

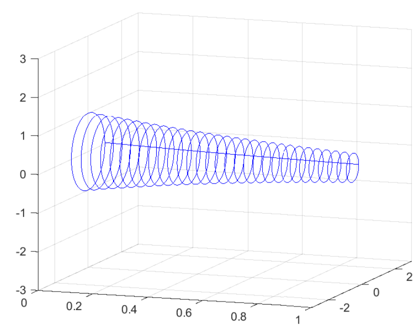

Рис. 8: $X_2(t),\ t \in [0,1]$

Используя эти два базовые решения легко построить смешаные решения. Например, смешаными решениями будут следующие многозначные отображения

$$X^1_{ms}(t) = \begin{cases} B_{e^t}(0), & t \in [0, 0.5] \\ B_{e^{1-t}}(0), & t \in [0.5, 1] \end{cases} \qquad X^2_{ms}(t) = \begin{cases} B_{e^{-t}}(0), & t \in [0, 0.5] \\ B_{e^{t-1}}(0), & t \in [0.5, 1] \end{cases}$$

(смотри Рис. 9 и Рис. 10).

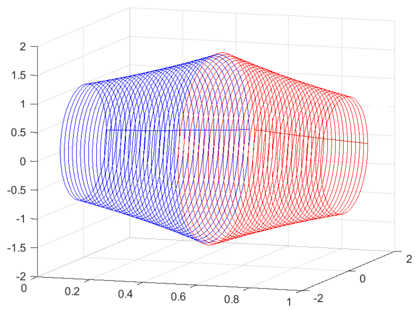

Рис. 9: $X^1_{ms}(t)$, $t \in [0, 1]$

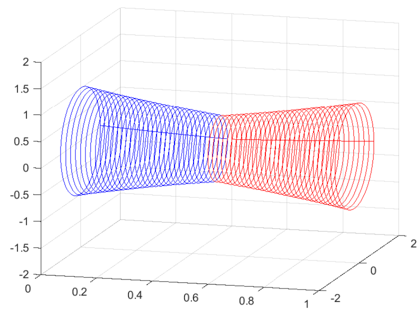

Рис. 10: $X^2_{ms}(t)$, $t \in [0, 1]$

Теперь зададим некоторое множество $X_K \in conv(R^n)$. Предположим, что множество X_K имеет такую же форму как и множество X_0 (X_0 и X_K гомотетичные фигуры с коэффициентом $k > 0$), то есть существуют число $a > 0$ и вектор $b \in R^n$ такие, что $X_K = aX_0 + b$.

Рассмотрим следующую задачу быстродействия: требуется перевести объект $X(t, u)$ согласно системы (1) из начального множества X_0 в конечное множество X_K за минимальное время $T > 0$ так, чтобы $X(T, u) = X_K$.

Предположим, что $X_0 = B_1(0)$. Следовательно, $X_K = B_a(b)$.

Решим данную задачу. Рассмотрим следующие две классические задачи быстродействия:

Первая задача: требуется перевести объект $x(t, u)$ согласно системы $\dot{x} = x + u$ из начальной точки 0 в конечную точку b за минимальное время $T > 0$;

Вторая задача: требуется перевести объект $x(t, u)$ согласно системы $\dot{x} = -x - u$ из начальной точки 0 в конечную точку b за минимальное время $T > 0$.

Решим данные классические задачи оптимального управления и найдем для первой задачи оптимальное управление $u^1_*(\cdot)$ и минимальное время $T^1_* < \infty$ и для второй задачи оптимальное управление $u^2_*(\cdot)$ и минимальное время $T^2_* < \infty$.

Так же легко можно записать соответствующие оптимальные траектории

$$x^1_*(t, u^1_*) = \int\limits_0^t e^{t-s} u^1_*(s) ds,$$

$$x^2_*(t, u^2_*) = -\int\limits_0^t e^{s-t} u^2_*(s) ds.$$

Замечание 16. *Как известно, вторая задача может для некоторых $b \in R^n$ не иметь решение. Это следует из того, что область достижимости $X^2_{ad}(t)$ для второй задачи имеет вид*

$$X^2_{ad}(t) = (1 - e^{-t})U.$$

Следовательно, если $b \notin (1 - e^{-t})U$ для всех $t \geq 0$, то вторая задача не имеет решение.

Замечание 17. *Так как $X^1_{ad}(t) = (e^t - 1)U$ и $X^2_{ad}(t) = (1 - e^{-t})U$, то $X^2_{ad} \subset X^1_{ad}$ для всех $t > 0$.*

Замечание 18. *Если оба оптимальных решения существуют, то $T^1_* < T^2_*$ и существует допустимое управление $u(\cdot)$ для первой задачи, что $x^1(T^2_*, u) = x^2(T^2_*, u^2_*) = b$, т.е.*

$$\int\limits_0^{T^2_*} e^{T^2_* - s} u(s) ds = \int\limits_0^{T^2_*} e^{s - T^2_*} u^2_*(s) ds.$$

В начале предположим, что оба оптимальных решения существуют.

Подставим управление $u^1_*(\cdot)$ в систему (1) и получим следующее линейное многозначное дифференциальное уравнение с PS-производной

$$D_{ps}X(t, u_*) = X(t, u_*) + u^1_*(t), \quad X(0, u^1_*) = B_1(0) \tag{3}$$

и найдем первое базовое решение этого уравнения:

$$X_1(t, u^1_*) = B_{e^t}(0) + \int\limits_0^t e^{t-s} u^1_*(s) ds. \tag{4}$$

Далее подставим управление $u^2_*(\cdot)$ в систему (1) и получим следующее линейное многозначное дифференциальное уравнение с PS-производной

$$D_{ps}X(t, u_*) = X(t, u_*) + u^2_*(t), \quad X(0, u^2_*) = B_1(0) \tag{5}$$

и найдем второе базовое решение этого уравнения:

$$X_2(t, u^2_*) = B_{e^{-t}}(0) + \int\limits_0^t e^{s-t} u^2_*(s) ds. \tag{6}$$

Учитывая замечание 18 и свойства базовых решений имеем, что $X^2_*(T^2_*, u^2_*) \subset X^1_*(T^1_*, u^1_*)$. Следовательно, возможны следующие три случая:

1) $X_K \subseteq X_*^2(T_*^2, u_*^2) \subset X_*^1(T_*^1, u_*^1)$;
2) $X_*^2(T_*^2, u_*^2) \subset X_*^1(T_*^1, u_*^1) \subseteq X_K$;
3) $X_*^2(T_*^2, u_*^2) \subset X_K \subset X_*^1(T_*^1, u_*^1)$.

1. Рассмотрим первый случай.

а) Если $X_K = X_*^2(T_*^2, u_*^2)$, то управление $u_{op}(\cdot) = u_*^2(\cdot)$ и время $T_{op} = T_*^2 = -\ln(b)$ $(0 < b < 1)$ являются оптимальными.

б) Если $X_K \subset X_*^2(T_*^2, u_*^2)$, то, следовательно, "объем" второго базового решения в момент времени T_*^2 превышает "объем" конечного множества X_K, т.е. $T_*^2 < -\ln(a)$ $(0 < a < 1)$. Поэтому построим следующее управление, которое будет оптимальным

$$u_{op}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, -\ln(a) - T_*^2), \\ u_*^2(t + \ln(a) + T_*^2), & t \in [-\ln(a) - T_*^2, -\ln(a)], \end{cases}$$

и $T_{op} = -\ln(a)$. Если для примера взять $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, то смотри Рис. 11,12.

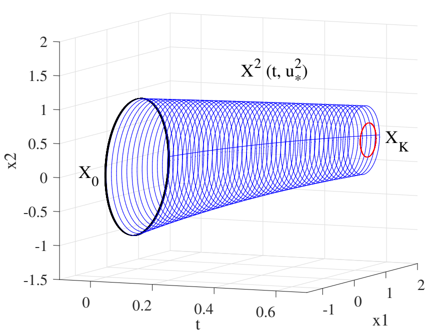

Рис. 11.

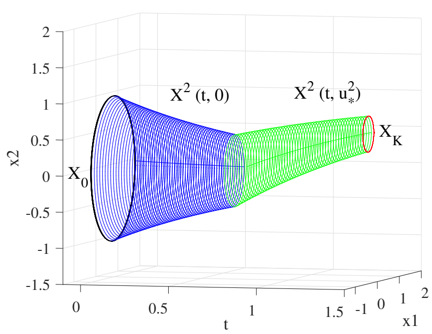

Рис. 12.

Замечание 19. *Очевидно, что в данном случае можно построить и другие допустимые управления, которые будут оптимальными. Данное допустимое управление должно удовлетворять условию*

$$-\int\limits_0^{-\ln(a)} e^{s+\ln(a)} u^2(s) ds = b.$$

2. Теперь рассмотрим второй случай.

а) Если $X_K = X_*^1(T_*^1, u_*^1)$, то управление $u_{op}(\cdot) = u_*^1(\cdot)$ и время $T_{op} = T_*^1$ являются оптимальными.

б) Если $X_*^1(T_*^1, u_*^1) \subset X_K$, то, следовательно, "объем" первого базового решения в момент времени T_*^1 меньше "объема" конечного множества X_K, т.е. $T_*^1 < \ln(a)$ $(a > 1)$. Поэтому построим следующее управление, которое будет оптимальным

$$u_{op}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \ln(a) - T_*^2), \\ u_*^1(t - \ln(a) + T_*^2), & t \in [\ln(a) - T_*^2, \ln(a)], \end{cases}$$

и $T_{op} = \ln(a)$. Если для примера взять $a = 2,\ b = \frac{1}{2}$, то смотри Рис. 13,14.

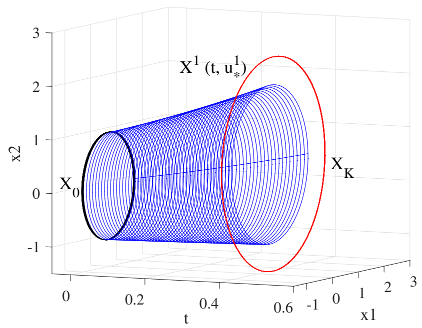

Рис. 13.

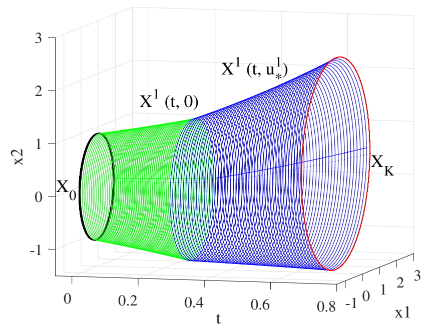

Рис. 14.

Замечание 20. *Очевидно, что в данном случае можно построить и другие допустимые управления, которые будут оптимальными. Данное допустимое управление должно удовлетворять условию*

$$\int\limits_0^{\ln(a)} e^{\ln(a)-s} u^1(s)ds = b.$$

3. Теперь рассмотрим третий случай. В этом случае решением данной задачи должно быть смешанное решение.

1) Первым будем искать такое смешанное решение, диаметр которого с начала убывает, а потом возрастает. Для этого воспользуемся оптимальными управлениями первой и второй задач, то есть $u_*^1(\cdot)$ и $u_*^2(\cdot)$ и найдем время переключения τ и время окончания процесса T.

Решаем систему $\dot{x} = -x - u_*^2(t), x(0) = 0$. Очевидно, что

$$x(t) = -e^{-t} \int\limits_0^t e^s u_*^2(s)ds.$$

Тогда при $t = \tau$ имеем $x(\tau) = -e^{-\tau} \int\limits_0^\tau e^s u_*^2(s)ds$. Следовательно, это начальная точка для системы $\dot{x} = x + u_*^1(t)$. Тогда

$$x(t) = -e^{t-2\tau} \int\limits_0^\tau e^s u_*^2(s)ds + e^t \int\limits_\tau^t e^{-s} u_*^1(s)ds.$$

Очевидно, при $t = T$ имеем $x(T) = -e^{T-2\tau}\int\limits_0^{\tau} e^s u_*^2(s)ds + e^T \int\limits_{\tau}^{T} e^{-s}u_*^1(s)ds$.

Так как в начале диаметр убывает, то $diam(X(t)) = 2e^{-t}$. Доходим до точки $t = \tau$ и $diam(X(\tau)) = 2e^{-\tau}$. После этого диаметр возрастает и $diam(X(t)) = e^t diam(X(\tau))$. При $t = T$ будем иметь диаметр $diam(X(T)) = e^T diam(X(\tau))$. Получаем систему

$$\begin{cases} e^{-2\tau+T} = a, \\ e^T \int\limits_{\tau}^{T} e^{-s}u_*^1(s)ds - e^{T-2\tau}\int\limits_0^{\tau} e^s u_*^2(s)ds = b. \end{cases} \tag{7}$$

Если, например, $u_*^1(t) \equiv 1$ и $u_*^2(t) \equiv -1$, то получим систему

$$\begin{cases} -2\tau + T = \ln(a), \\ e^T \int\limits_{\tau}^{T} e^{-s}ds - e^{T-2\tau}\int\limits_0^{\tau} e^s ds = b. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \tau = \ln\left(\frac{b+a+1}{2a}\right), \\ T = 2\ln\left(\frac{b+a+1}{2\sqrt{a}}\right). \end{cases} \tag{8}$$

Например, возьмем $a = 1/2$, $b = 9/10$. Следовательно, первое базовое решение соответствующее оптимальному управлению $u_*^1(t) \equiv 1$ будет иметь вид согласно Рис. 15 и в конечный момент $T = \ln(19/10)$ будет выполняться условие $X_K \subset X^1(T, u_*^1)$, а второе базовое решение соответствующее оптимальному управлению $u_*^2(t) \equiv -1$ будет иметь вид согласно Рис. 16 и в конечный момент $T = -\ln(1/10)$ будет выполняться условие $X^2(T, u_*^2) \subset X_K$. Однако, если взять $\tau_1 = \ln\left(\frac{12}{5}\right)$ и $T_1 = 2\ln\left(\frac{12}{5\sqrt{2}}\right)$ и построим соответствующее смешанное решение, то смотри Рис. 15, 16 и 17.

2) Теперь второй случай. Будем искать такое смешанное решение, диаметр которого с начала возрастает, а потом убывает. Для этого воспользуемся оптимальными управлениями первой и второй задач, то есть $u_*^1(\cdot)$ и $u_*^2(\cdot)$ и найдем время переключения τ и время окончания процесса T аналогично, как это было сделано в первом случае, то есть получим систему

$$\begin{cases} 2\tau - T = \ln(a), \\ e^{-T} \int\limits_{\tau}^{T} e^{s}u_*^2(s)ds + e^{-T+2\tau}\int\limits_0^{\tau} e^{-s} u_*^1(s)ds = b. \end{cases} \tag{9}$$

Если, например, $u_*^1(t) \equiv 1$ и $u_*^2(t) \equiv -1$, то получим систему

$$\begin{cases} \tau = \ln\left(\frac{-2a}{b-1-a}\right), \\ T = 2\ln\left(\frac{-\sqrt{2}a}{b-1-a}\right). \end{cases}$$

Аналогично возьмем, $a = 1/2$, $b = 9/10$. Тогда $\tau_2 = \ln(\frac{5}{3})$, $T_2 = 2\ln(\frac{5\sqrt{2}}{3})$ и построим соответствующее смешанное решение, то смотри Рис. 15, 16 и 18.

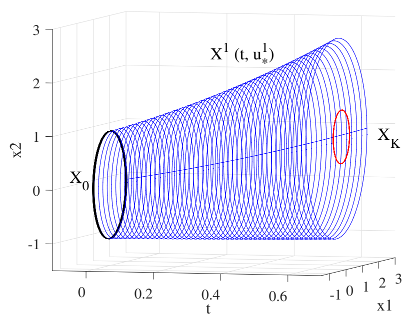

Рис. 15.

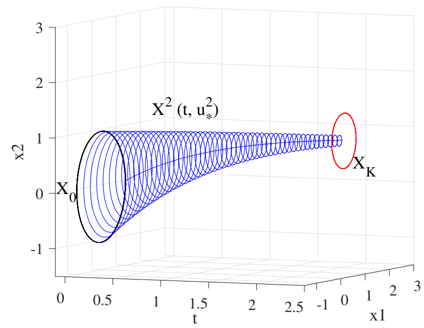

Рис. 16.

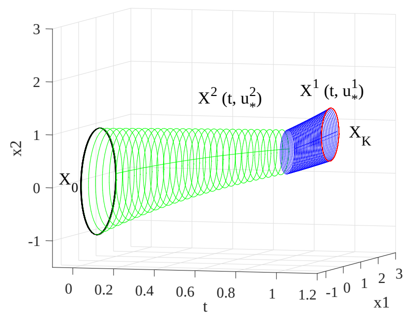

Рис. 17.

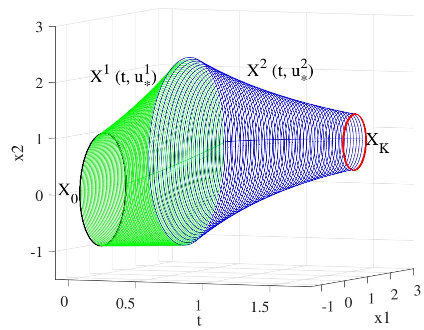

Рис. 18.

Легко проверить, что $T_1 < T_2$. Поэтому в первом случае было получено оптимальное решение.

Теперь рассмотрим случай, когда разрешима только первая задача оптимального управления, то есть $b \notin (1 - e^{-t})U$ для всех $t \geq 0$.

Решим первую задачу оптимального управления и найдем оптимальное управление $u_*^1(\cdot)$ и минимальное время $T_*^1 < \infty$.

Подставим управление $u_*^1(\cdot)$ в систему (1) и получим следующее линейное многозначное дифференциальное уравнение с PS-производной

$$D_{ps}X(t, u_*) = X(t, u_*) + u_*^1(t), \quad X(0, u_*^1) = B_1(0) \tag{10}$$

и найдем первое базовое решение этого уравнения:

$$X_1(t, u_*^1) = B_{e^t}(0) + \int\limits_0^t e^{t-s}u_*^1(s)ds. \tag{11}$$

Возможны три случая:

1) $X(T_*^1) = X_K$; 2) $X_*^1(T_*^1, u_*^1) \subset X_K$; 3) $X_K \subset X_*^1(T_*^1, u_*^1)$.

В первом случае – управление $u_*^1(\cdot)$ и время T_*^1 являются оптимальными для исходной задачи.

Во втором случае – построим оптимальное управление так, как это было сделано ранее в случае 2б), когда обе задачи разрешими.

Теперь рассмотрим последний третий случай. Очевидно, в этом случае решением данной задачи должно быть смешанное решение. Будем искать такое смешанное решение, диаметр которого с начала убывает, а потом возрастает. Для этого воспользуемся оптимальным управлением первой задач $u_*^1(\cdot)$, найдем $u_*^2(\cdot)$ из условия $\min\limits_{x \in X_K} \|x - u_*^2(t)\| = \min\limits_{x \in X_K} \max\limits_{u \in U} \|x - u\|$ и найдем время переключения τ_1 и время окончания процесса T_1 из системы (7).

Проиллюстрируем данный метод на следующем примере: $X_K = B_2(3)$, $U = B_1(0)$. Тогда $u_*^1(t) \equiv 1$ и $u_*^2(t) \equiv -1$. Следовательно, $\tau_1 = \ln(1.5)$ и $T_1 = 2\ln(\frac{3\sqrt{2}}{2})$. (Смотри Рис. 19, 20.)

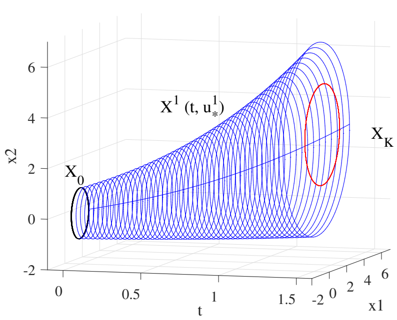

Рис. 19.

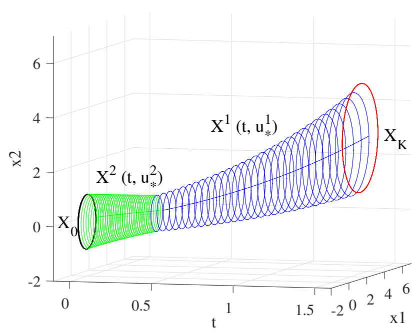

Рис. 20.

Замечание 21. *В результате выше приведенного анализа, для заданного конечного множества X_K можно найти допустимое оптимальное управление $u_{op}(\cdot)$ и оптимальное время T_{op} при которых некоторое решение системы*

$$D_{ps}X = X + u_{op}, \quad X(0, u) = X_0, \tag{12}$$

будет удовлетворять условию $X(T_{op}, u_{op}) = X_K$. То есть учитывая замечание 15, система (12) имеет бесконечно много решений, но имеет решение, для которого выполняется условие $X(T_{op}, u_{op}) = X_K$, а так же имеет решения для которых это условие не выполняется. Однако в случае, если $T < T_{op}$, то для всех допустимых управлений $u(\cdot)$ и для всех соответствующих решений условие $X(T, u) = X_K$ выполняться не будет.

2. Заключение

В заключение сделаем несколько замечаний:

Замечание 22. *В случае, если X_0 не является шаром (но X_0 и X_K гомотетичные фигуры с коэффициентом $k > 0$), то опишем вокруг множеств X_0 и X_K шары и решим задачу так, как это было сделано для шаров.*

Замечание 23. *В случае, если множества X_0 и X_K имеют разную форму (негомотетичные фигуры с коэффициентом $k > 0$), то условие $X(T, u) = X_K$ не будет выполняться никогда, то есть не существует $T > 0$ и допустимого управления $u(\cdot)$ чтобы это условие выполнялось. В этом случае необходимо использовать условие $X(T, u) \subset X_K$ или $X(T, u) \supset X_K$. Далее, в первом случае, необходимо вписать в множество X_K максимально возможное множество, которое по форме совпадает с множеством X_0, а во втором - описать. Далее решать задачу, как это было предложено в предыдущем замечании.*

Замечание 24. *В случае, когда вместо PS-производной используется BG-производная и начальное множество X_0 удовлетворяет условию, что разность $X_0 \overset{H}{-} (-1)X_0$ существует, то задача будет решаться аналогично. В случае, если разность $X_0 \overset{H}{-} (-1)X_0$ не существует, то соответствующее дифференциальное уравнение будет иметь только первое базовое решение (второе базовое решение система (1) иметь не будет) и бесконечно много смешаных решений. Следовательно, рассматриваемая задача быстродействия может не иметь ни одного решения (например, если X_K гомотетично X_0 с коэффициентом $k \in (0, 1)$).*

Список литературы

1. **Perestyuk N.A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities / N.A. Perestyuk, V.A. Plotnikov, A.M. Samoilenko, N.V. Skripnik. – de Gruyter Stud. Math. Vol. 40. – Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co, 2011, 309 p.
2. **Плотников А.В.** Дифференциальные уравненения с четкой и нечеткой правой частью. Асимптотические методы / А.В. Плотников, Н.В. Скрипник. – Одесса: АстроПринт, 2009, 192 с.
3. **Плотников В.А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999, 355 с.
4. **Половинкин Е.С.** Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин. – М.: Физматлит, 2014, 597 с.
5. **Комлева Т.А.** Одна многозначная дискретная система и ее свойства / Т.А. Комлева, Л.И. Плотникова, А.В. Плотников. // УМЖ. – 2018. – Т. 70, №11. – С. 1519–1524.
6. **Komleva, T.A.** Partial averaging of discrete-time set-valued systems / T.A. Komleva, L.I. Plotnikova, A.V. Plotnikov. // Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. – 2018. – V. 63, №4. – P. 539–548.

7. **Plotnikov A.V.** Averaging of a system of set-valued differential equations with the Hukuhara derivative / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva, L.I. Plotnikova. // Journal of Uncertain Systems. – 2019. – V. 13, №1. – P. 3–13.
8. **Plotnikov A.V.** Set-Valued differential equations with generalized derivative / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // J. Adv. Res. Pure Math. – 2011. – V. 3, №1. – P. 144–160.
9. **Plotnikov A.V.** Existence and uniqueness theorems for generalized set differential equations / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // Int. J. Control Sc. Eng. – 2012. – V. 2, №1. – P. 1–6.
10. **Plotnikov A.V.** An existence and uniqueness theorem to the Cauchy problem for generalised set differential equations / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal. – 2013. – V. 20, №4. – P. 433–445.
11. **Plotnikov A.V.** Conditions for the existence of local solutions of set-valued differential equations with generalized derivative / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // Ukr. Math. J. – 2014. – V. 65, №10. – P. 1498–1513.
12. **Malinowski M.T.** Second type Hukuhara differentiable solutions to the delay set-valued differential equations/ M.T. Malinowski. // Appl. Math. Comput. – 2012. – № 218. – P. 9427–9437.
13. **Malinowski M.T.** On set differential equations in Banach spaces – a second type Hukuhara differentiability approach / M.T. Malinowski. // Appl. Math. Comput. – 2012. – № 219. – P. 289–305.
14. **Vu H.** Initial value problem for second-order random fuzzy differential equations / H. Vu, L.S. Dong. // Adv. Difference Equ. – 2015. – №373. – 23 p.
15. **Vu H.** On impulsive fuzzy functional differential equations / H. Vu, N. Van Hoa. // Iranian Journal of Fuzzy Systems. – 2016. – V.13, №4. – P. 79–94.
16. **Amrahov Ş.E.** Relationship between Bede-Gal differentiable set-valued functions and their associated support functions / Ş.E. Amrahov, A. Khastan, N. Gasilov, A.G. Fatullayev. // Fuzzy Sets Syst. – 2016. – №265. – P. 57–72.
17. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe / M. Hukuhara. // Funkcial. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 205–223.
18. **Комлева Т.А.** Некоторые замечания к абсолютной непре-рывности множественнозначных отображений / Т.А. Комлева, Л.И. Плотникова, А.В. Плотников. // Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – Т. 22, №2(30) – С. 17–27.
19. **Banks H.T.** A differential calculus for multifunctions / H.T. Banks, M.Q. Jacobs. // J. Math. Anal. Appl. – 1970. – №29. – P. 246–272.
20. **Tyurin Yu.N.** Mathematical statement of the simplified model of industrial planning / Yu.N. Tyurin. // Econ. math. meth. – 1965. – №3. – P. 391—409.
21. **Chalco-Cano Y.** Generalized derivative and π-derivative for set-valued functions / Y. Chalco-Cano, H. Roman-Flores, M.D. Jimenez-Gamero. // Inform. Sci. – 2011. – V. 181, №11. – P. 2177–2188.
22. **Plotnikova N.V.** Systems of linear differential equations with p-derivative and linear differential inclusions / N.V. Plotnikova. // Sb. Math. – 2005. – №196. – P. 1677— 1691.
23. **Plotnikov A.V.** Differentiation of multivalued mappings. T-derivative / A.V. Plotnikov. // Ukr. Math. J. – 2000. – V. 52, №8. – P. 1282–1291.
24. **Bede B.** Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equation / B. Bede, S.G. Gal. // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – V. 151. – P. 581–599.

Комлєва Т. О., Молчанюк І. В., Скрипник Н. В., Плотніков А. В.
Одна лінійна багатозначна задача керування

Резюме

Останнім часом багато авторів розглядали питання існування, єдиності та властивості розв'язків багатозначних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, рівнянь вищих порядків, досліджували імпульсні і керовані системи в рамках теорії багатозначних рівнянь. Очевидно, що отримання всіх цих результатів було б неможливо без розвитку теорії багатозначного аналізу. В останні роки з'явилися нові визначення похідної для багатозначних відображень, які на відміну від похідної Хукухари, дали можливість диференціювати багатозначні відображення, діаметр яких не тільки не спадна функція. В результаті були розглянуті багатозначні диференціальні рівняння, розв'язки яких є багатозначні відображення, діаметр яких не є монотонною функцією. У даній статті розглядається нова постановка задачі оптимального керування (задача швидкодії), яка стала можлива завдяки цим новим похідним та диференціальним рівнянням, а також наведено метод розв'язання даної задачі.
Ключові слова: багатозначні рівняння, керування, задача швидкодії, похідна Хукухари.

Komleva T. A., Molchanyuk I. V., Skripnik N. V., Plotnikov A. V.
One linear set-valued control problem

Summary

Recently, many authors have considered questions of the existence, uniqueness, and properties of solutions of set-valued differential and integro-differential equations, higher order equations, and have investigated impulse and control systems in the framework of the theory of set-valued equations. Obviously, obtaining all these results would be impossible without the development of the theory of set-valued analysis. In the latter, new definitions of the derivative have appeared for set-valued mappings, which, unlike the previously used Hukuhara derivative, made it possible to differentiate set-valued mappings whose diameter is not only a non decreasing function. As a result, set-valued differential equations were considered whose solutions are set-valued mappings whose diameter is not a monotonic function. This article discusses the new formulation of the optimal control problem (the time-optimality problem) that became possible due to these new derivatives and differential equations, as well as a method for solving this problem.
Key words: set-valued equations, control, time-optimality problem, Hukuhara derivative.

References

1. Perestyuk, N.A., Plotnikov, V.A., Samoilenko, A.M., Skripnik, N.V. (2011). *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities.* de Gruyter Stud. Math. Vol. 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co, 309 p.
2. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2009). *Differential equations with "clear" and fuzzy multivalued right-hand side. Asymptotics methods.* Odessa: AstroPrint, 192 p.
3. Plotnikov, V.A., Plotnikov, A.V., Vityuk, A.N. (1999). *Differential equations with multivalued right-hand side. Asymptotic methods.* Odessa: AstroPrint, 355 p.
4. Polovinkin, E.S. (2014) *Multivalued analysis and differential inclusions.* Moscow: FIZMATLIT, 597 p.
5. Komleva, T.A., Plotnikova, L.I., Plotnikov, A.V. (2018). One set-valued discrete system and its properties. *Ukr. Math. J.*, V. 70, №11, P. 1519–1524.
6. Komleva, T.A., Plotnikova, L.I., Plotnikov, A.V. (2018). Partial averaging of discrete-time set-valued systems. *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.*, V. 63, №4, P. 539–548.
7. Plotnikov, A.V., Komleva, T.A., Plotnikova, L.I. (2019). Averaging of a system of set-valued differential equations with the Hukuhara derivative. *Journal of Uncertain Systems*, V. 13, №1, P. 3–13.
8. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2011). Set-Valued differential equations with generalized derivative. *J. Adv. Res. Pure Math.*, V. 3, №1, P. 144–160.
9. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2012). Existence and uniqueness theorems for generalized set differential equations. *Int. J. Control Sc. Eng.*, V. 2, №1, P. 1–6.
10. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2013). An existence and uniqueness theorem to the Cauchy problem for generalised set differential equations. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal.*, V. 20, №4, P. 433–445.
11. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2014). Conditions for the existence of local solutions of set-valued differential equations with generalized derivative. *Ukr. Math. J.*, V. 65, №10, P. 1498–1513.
12. Malinowski, M.T. (2012). Second type Hukuhara differentiable solutions to the delay set-valued differential equations. *Appl. Math. Comput.*, № 218, P. 9427–9437.
13. Malinowski, M.T. (2012). On set differential equations in Banach spaces – a second type Hukuhara differentiability approach. *Appl. Math. Comput.*, № 219, P. 289–305.
14. Vu, H., Dong, L.S. (2015). Initial value problem for second-order random fuzzy differential equations. *Adv. Difference Equ.*, №373, 23 p.
15. Vu, H., Van Hoa, N. (2016). On impulsive fuzzy functional differential equations. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, V.13, №4, P. 79–94.
16. Amrahov, Ş.E., Khastan, A., Gasilov, N., Fatullayev, A.G. (2016). Relationship between Bede-Gal differentiable set-valued functions and their associated support functions. *Fuzzy Sets Syst.*, № 265, P. 57–72.
17. Hukuhara, M. (1967). Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcial. Ekvac.*, №10, P. 205–223.
18. Komleva, T.A., Plotnikova, L.I., Plotnikov, A.V. (2017). Some remarks on the absolute continuity of set-valued mappings. *Researches of Mathematics and Mechanics*, V. 22, №2(30), P. 17–27.
19. Banks, H.T., Jacobs, M.Q. (1970). A differential calculus for multifunctions. *J. Math. Anal. Appl.*, №29, P. 246–272.

20. Tyurin, Yu.N. (1965). Mathematical statement of the simplified model of industrial planning. *Econ. math. meth.*, №3, P. 391—409.
21. Chalco-Cano, Y., Roman-Flores, H., Jimenez-Gamero, M.D. (2011). Generalized derivative and π-derivative for set-valued functions. *Inform. Sci.*, V. 181, №11, P. 2177–2188.
22. Plotnikova, N.V. (2005). Systems of linear differential equations with p-derivative and linear differential inclusions. *Sb. Math.*, №196, P. 1677— 1691.
23. Plotnikov, A.V. (2000). Differentiation of multivalued mappings. T-derivative. *Ukr. Math. J.*, V. 52, №8, P. 1282–1291.
24. Bede, B., Gal, S.G. (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equation. *Fuzzy Sets Syst.*, V. 151, P. 581–599.