Дослідження в математиці і механіці. — 2019. — Т. 24, вип. 2(34). — С. 31–44

УДК 517.9

О. В. Капустян, О. А. Капустян, О. В. Перегуда, І. В. Романюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНОГО АТРАКТОРА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З РОЗРИВНИМИ ТРАЄКТОРІЯМИ

Публікація містить результати досліджень, що проводяться в межах україно-німецького науково-дослідного проекту ДФФД та DFG "Стійкість та робастність щодо збурень атракторів нелінійних нескінченновимірних систем"

Робота присвячена дослідженню якісної поведінки розв'язків хвильового рівняння, траєкторії якого зазнають імпульсного збурення при досягненні фіксованої (імпульсної) підмножини в фазовому просторі. Користуючись загальною схемою побудови нескінченновимірної імпульсної динамічної системи та використовуючи поняття рівномірного атрактора — мінімальної компактної рівномірно притягуючої множини, отримано результат щодо існування та явного вигляду рівномірного атрактора для імпульсної динамічної системи, породженої хвильовим рівнянням. Траєкторії такої системи можуть мати нескінченну кількість імпульсних точок при зустрічі з імпульсною підмножиною фазового простору. Таким чином, рівномірний атрактор може мати непорожній перетин з імпульсною множиною, і, як результат, не мати властивості стійкості. Проте, завдяки додатковим умовам щодо імпульсних параметрів задачі, у даній роботі вдалося довести властивість стійкості для не імпульсної частини рівномірного атрактора.

MSC: 34D45, 35R12.
Ключові слова: імпульсна динамічна система, стійкість, імпульсне збурення, рівномірний атрактор, хвильове рівняння.
DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).190047.

1. Вступ

Описуючи поведінку багатьох еволюційних процесів з миттєвими змінами, досить поширеним є математичний підхід, що ґрунтується на теорії диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням [1]–[4]. Важливим підкласом систем з розривними траєкторіями є імпульсні (розривні) динамічні системи [5]–[8]. Зокрема системи, траєкторії яких зазнають імпульсних збурень у момент зустрічі з певною фіксованою підмножиною фазового простору. У випадку нескінченновимірного фазового простору одним з найефективніших інструментів для вивчення якісної поведінки розвязків таких систем є теорія глобальних атракторів [9], [10]. Проте при застосуванні основних понять та результатів цієї теорії до імпульсних динамічних систем виникає ряд ускладнень, перш за все повязаних з втратою в таких системах властивості неперервної залежності розвязків від початкових даних, що в свою чергу вимагає застосування нових концепцій як і для поняття глобального атрактора, так і для його основних властиво-

Надійшла 02.10.2019

стей (інваріантності, стійкості та робастності). Глобальну асимптотичну поведінку системи в цьому випадку можна описати за допомогою поняття рівномірного атрактору - компактної, мінімальної, рівномірно притягуючої множини [10], [11]. Виявилось, що у випадку, коли траєкторії імпульсної динамічної системи мають нескінченну кількість імпульсних збурень, перетин рівномірного атрактора Θ з імпульсною множиною M може бути не порожній, і, як наслідок, рівномірний атрактор може не мати властивості інваріантності та стійкості [16]. Проте вже найпростіші приклади показують, що цими властивостями може володіти не імпульсна частина рівномірного атрактора $\Theta \setminus M$. Основні абстрактні результати щодо інваріантності $\Theta \setminus M$ для різних класів імпульсних систем були одержані в роботах [13], [14], [15]. Стійкість $\Theta \setminus M$ для параболічних імпульсно-збурених рівнянь та систем вивчалась в [16], [17]. Для хвильових імпульсно-збурених систем існування рівномірного атрактору було доведене в [18]. У даній роботі , використовуючи результати [18], досліджується властивість стійкості не імпульсної частини рівномірного атрактора для імпульсної динамічної системи, породженої еволюційним рівнянням 2-го порядку.

2. Основні результати

1. Атрактори імпульсних напівпотоків.

Імпульсна (або розривна [1]) динамічна система, що задана на нормованому просторі E, складається з неперервної напівгрупи $V : R_+ \times E \to E$, імпульсної множини $M \subset E$ та імпульсного відображення $I : M \to E$. Рух в імпульсній динамічній системі відбувається по траєкторіям V до моменту часу τ, коли фазова точка системи $x(t)$ досягає множини M. У момент такої зустрічі вона зазнає імпульсного впливу величини I та миттєво опиняється в новому положенні $Ix(\tau)$.

Для коректності побудови такої імпульсної динамічної системи необхідне виконання наступних умов [5]:

$$\begin{gathered} M - \text{замкнена}, \ M \cap IM = \varnothing, \\ \forall x \in M \ \ \exists \tau = \tau(x) > 0 \ \ \forall t \in (0, \tau) \ \ V(t, x) \notin M, \\ \text{кожна імпульсна траєкторія визначена на } [0, +\infty). \end{gathered} \tag{1}$$

Введемо позначення:

$$\forall x \in M \ Ix = x^+, \ \ \forall x \in E \ \ M^+(x) = \left(\bigcup_{t>0} V(t, x) \right) \cap M.$$

Якщо $M^+(x) \neq \varnothing$, то з неперервності V і умов (1) виводимо, що існує момент часу $s > 0$ такий, що

$$\forall \ t \in (0, s) \ V(t, x) \notin M, \ V(s, x) \in M.$$

Тоді імпульсний напівпотік G описується наступним чином [5]:
якщо для $x \in E$ для всіх $t > 0$ $V(t,x) \notin M$, то

$$G(t,x) = V(t,x).$$

Інакше

$$G(t,x) = \begin{cases} V(t-t_n, x_n^+),\ t \in [t_n, t_{n+1}), \\ x_{n+1}^+,\ t = t_{n+1}, \end{cases} \tag{2}$$

де $t_0 = 0$, $t_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} s_k$, $x_{n+1}^+ = IV(s_n, x_n^+)$, $x_0^+ = x$, s_n — моменти імпульсного збурення, що характеризуються умовою $V(s_n, x_n^+) \in M$.

Формула (2) визначає (не обов'язково неперервну) напівгрупу $G : R_+ \times E \to E$ [8], яку будемо називати імпульсним напівпотоком.

Надалі будемо використовувати наступні позначення:

$$b(E) \ \text{– сукупність всіх обмежених підмножин } E;$$

$$dist(A,B) = \sup_{x\in A}\inf_{y\in B} \|x-y\|_E;$$

$$O_\delta(A) = \{x \in E \mid dist(x,A) < \delta\}.$$

Означення 1. [12] *Компактна множина $\Theta \subset E$ називається рівномірним атрактором імпульсного напівпотоку G, якщо*
1) Θ — рівномірно притягуюча множина, тобто

$$\forall B \in b(E) \ \ dist(G(t,B), \Theta) \to 0,\ t \to \infty;$$

2) Θ — мінімальна замкнена множина, що задовольняє умову 1).

Наступна теорема дає критерій існування рівномірного атратора.

Теорема 1. [13] *Нехай для імпульсного напівпотоку G виконується умова дисипативності, тобто*

$$\exists B_0 \in b(E) \quad \forall B \in b(E) \quad \exists T = T(B) \quad \forall t \geq T \quad G(t,B) \subset B_0. \tag{3}$$

Тоді G має рівномірний атрактор Θ тоді і тільки тоді, коли G — асимптотично компактний, тобто

$$\forall \{t_n \nearrow \infty\} \ \forall \{x_n\} \in b(E)$$

$$\text{послідовність } \{G(t_n, x_n)\} \ \text{ предкомпактна в } E. \tag{4}$$

При цьому справедливою є рівність

$$\Theta = \omega(B_0) := \bigcap_{\tau>0} \overline{\bigcup_{t\geq\tau} G(t,B_0)}. \tag{5}$$

Одним з означень стійкості інваріантної множини відносно напівпотоку (еквівалентних у випадку неперервних напівпотоків) є наступне.

Означення 2. [19] *Множина $A \subset E$ називається стійкою відносно напівпотоку G, якщо*

$$A = D^+(A) := \bigcup_{x \in A} \{y \mid y = \lim G(t_n, x_n),\ x_n \to x,\ t_n \geq 0\}. \tag{6}$$

Зауваження Оскільки $A \subset D^+(A)$ за побудовою, то властивість (6) еквівалентна вкладенню $D^+(A) \subset A$.

Відомо, що для неперервних напівпотоків, що задовольняють умови Теореми 1, рівномірний атрактор є інваріантним і стійким в сенсі (6). В даній роботі ми доведемо, що для імпульсного напівпотоку, породженого імпульсно-збуреним хвильовим рівнянням, рівномірний атрактор Θ задовольняє вкладення

$$D^+(\Theta \setminus M) \subset \overline{\Theta \setminus M}. \tag{7}$$

2. Імпульсно-збурене хвильове рівняння

Розглянемо триплет гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$ з компактним та щільним вкладенням, де $\|\cdot\|$ та $(\cdot,\cdot)$ відповідно норма та скалярний добуток в H. $A : V \to V^*$ — лінійний, неперервний, самоспряжений, коерцитивний оператор. Функція $\langle Au, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ визначає норму в V, яку будемо позначати $\|u\|_V$.

У даній роботі будемо розглядати таку еволюційну задачу ($\beta > 0$):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0, \\ y|_{t=0} = y_0 \in V, \\ y_t|_{t=0} = y_1 \in H, \end{cases} \tag{8}$$

яка в фазовому просторі $E = V \times H$ породжує неперервну напівгрупу $V : R_+ \times E \to E$, де

$$\text{для} \quad z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in E \quad V(t, z_0) = z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t(t) \end{pmatrix}.$$

Норма в E задається рівністю:

$$\text{для} \quad z = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \in E \quad \|z\|_E = \|y\|_V + \|w\|.$$

Вперше поведінка траєкторій еволюційного рівняння другого порядку з розривними траєкторіями була досліджена у роботі [20], де в якості імпульсної множини розглядалась множина рівня повної енергії. Проте, як показано в роботі [18], задача (8) з імпульсними параметрами

$$M = \Big\{z \in E \mid \|z\|_E = a\Big\},\ Iz = (1 + \mu)z$$

залишаючись дисипативною, не має рівномірного аторактора в фазовому просторі E. Тому в якості імпульсної множини природно розглядати лінію рівня деякої напівнорми l_p такої, що

$$\forall z \in E \;\; l_p(z) \to \|z\|_E,\; p \to \infty.$$

Надалі будемо використовувати $\{\lambda_i\}, \{\psi_i\}$ — розв'язки спектральної задачі:

$$\forall i \geq 1 \;\; A\psi_i = \lambda_i \psi_i,\;\; 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots,\; \lambda_i \to \infty,\; i \to \infty.$$

Для $p \geq 1$ виберемо $l_p : E \to R$ наступним чином:

$$\text{для } \; z = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \in E \quad l_p(z) = \Big(\sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i (y, \psi_i)^2 + (w, \psi_i)^2\} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

При фіксованих $\forall p \geq 1,\; a > 0,\; \mu > 0$ покладемо

$$M = \Big\{ z \in E |\; l_p(z) = a \Big\}, \tag{9}$$

$$M' = \Big\{ z \in E |\; l_p(z) = a(1+\mu) \Big\},$$

Щодо імпульсного відображення $I : M \to M'$, то будемо вважати, що воно змінює лише перші p координат фазового вектора, тобто

$$\text{для } z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M$$

$$I(z) \in \Big\{ \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i' \\ d_i' \end{pmatrix} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \;\Big| \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i (c_i')^2 + (d_i')^2\} = a^2 (1+\mu)^2 \Big\}.$$

Наприклад, відображення I може збільшувати в $1+\mu$ разів перші p координат фазового вектора

$$I \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \Big) = (1+\mu) \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i.$$

3. Існування та стійкість рівномірного атрактора задачі (8)–(10).

Результат щодо існування рівномірного атрактору для імпульсного напівпотоку, породженого задачею (8)–(10), було доведено в [18]. Ми наводимо його в тому обсязі, який необхідний для доведення основного результату про стійкість.

Теорема 2. *[18] Для довільного імпульсного відображення $I : M \mapsto M'$, що задовольняє (10), імпульсна задача (8), (9) породжує дисипативний імпульсний напівпотік $G : R_+ \times E \to E$, що має рівномірний атрактор Θ, причому*

$$\Theta \subset \left\{ \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \mid \sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i c_i^2 + d_i^2\} \in [a^2, a^2(1+\mu)^2] \right\} \bigcup \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Доведення.

Відносно розв'язків еволюційної задачі (8) $z(t) = V(t, z_0) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t(t) \end{pmatrix}$ маємо, що наступні функції

$$\forall i \geq 1 \ \ u_i(t) = (y(t), \psi_i), \ \ v_i(t) = u_i'(t) = (y_t(t), \psi_i)$$

задовольняють задачу Коші:

$$\begin{cases} u_i''(t) + 2\beta u_i' + \lambda_i u_i(t) = 0, \\ u_i(0) = (y_0, \psi_i), \ u_i'(0) = (y_1, \psi_i). \end{cases} \quad (12)$$

Крім того, справедливою є така рівність

$$\forall t \geq 0 \ \ \lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t) = \lambda_i u_i^2(0) + v_i^2(0) - 4\beta \int_0^t v_i^2(s)ds. \quad (13)$$

Беручи до уваги (12) та (13) отримуємо, що функція

$$t \to l_p^2(z(t)) = \sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t)\}, \text{ де } l_p(z_0) \neq 0 \quad (14)$$

є строго спадною на $[0, +\infty)$. Зокрема виконується умова (1). Більш того, з формули (12) отримуємо, що $\exists c > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall i \geq 1 \ \forall t \geq 0$

$$\lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t) \leq c^2(\lambda_i u_i^2(0) + v_i^2(0))e^{-2\eta t}. \quad (15)$$

Нехай $z_0 \in IM$. Враховуючи (13) та (15) $\exists \bar{t} > 0$ таке, що $z(\bar{t}) \in M$. Таким чином,

$$a^2 = a^2(1+\mu)^2 - 4\beta \int_0^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{p} v_i^2(s)ds \quad (16)$$

і в силу (13) справедливою є така нерівність:

$$\forall t \geq 0 \ \ \sum_{i=1}^{p} v_i^2(t) \leq a^2(1+\mu)^2. \quad (17)$$

Отже, враховуючи (16) та (17) отримуємо, що

$$\bar{t} \geq \frac{1}{4\beta}\big(1 - \frac{1}{(1+\mu)^2}\big). \tag{18}$$

З (18) випливає, що задача (8)–(10) породжує імпульсний напівпотік G за формулою (2).

При досягненні імпульсної множини M фазовим вектором z імпульсного збурення зазнають лише перші p координат даного вектора. Тому в силу (13) та (15) можемо отримати таку оцінку:

$$\forall z_0 \in E \;\; \forall t \geq 0 \;\; \|G(t, z_0)\|_E^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t)) \leq$$

$$\leq c^2 \|z_0\|_E^2 e^{-2\eta t} + a^2(1+\mu)^2, \tag{19}$$

яка гарантує властивість дисипативності (3).

Далі доведемо виконання умови асимптотичної компактності. Розглянемо таку послідовність

$$\xi_n = G(t_n, z_n^0), \text{ де } \|z_n^0\|_E \leq r, \; t_n \nearrow \infty.$$

Якщо для нескінченно багатьох $n \geq 1$ $V(\cdot, z_n^0)$ не мають перетину з імпульсною множиною M, то

$$\xi_n = V(t_n, z_n^0).$$

Так як в силу [9] $\exists c > 0, \eta > 0$ такі, що $\forall z_0 \in E$ для $z(t) = V(t, z_0)$ справедлива оцінка

$$\forall t \geq 0 \;\; \|z(t)\|_E \leq c\|z_0\|_E e^{-\eta t}, \tag{20}$$

то

$$\xi_n \to 0 \text{ в } E.$$

Якщо ж існують точки перетину з імпульсною множиною M, зокрема $\tau_n > 0$ є моментом першого потрапляння $V(\cdot, z_n^0)$ на множину M, то з (20) отримуємо таку оцінку

$$a^2 \leq \|V(\tau_n, z_n^0)\|_E^2 \leq c^2 r^2 e^{-2\eta\tau_n}.$$

Таким чином

$$\tau_n \leq \frac{1}{\eta} ln \frac{cr}{a}, \tag{21}$$

тобто фазова точка досягає множину M за невід'ємний час, який залежить лише від величини r. Тому без обмеження загальності можемо вважати, що

$$z_n^0 \in IM, \ \ \|z_n^0\|_E \le r.$$

Для $\forall i \ge p+1$ в силу (15)

$$\lambda_i(u_i^{(n)}(t_n)^2) + (v_i^{(n)}(t_n))^2 \le c^2(\lambda_i u_i^2(0)^2 + v_i^2(0))e^{-2\eta t_n}. \tag{22}$$

З іншого боку, враховуючи формулу (13)

$$\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i(u_i^{(n)}(t_n))^2 + (v_i^{(n)}(t_n))^2) \in [a^2, a^2(1+\mu)^2]. \tag{23}$$

Тоді можемо вважати, що по підпослідовності

$$\forall i \in \overline{1,p}, \ u_i^{(n)}(t_n) \to c_i, \ v_i^{(n)}(t_n) \to d_i.$$

Звідси,

$$\text{для } \ \xi = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i$$

$$\|\xi_n - \xi\|_E^2 \le \sum_{i=1}^{p}\{\lambda_i(u_i^{(n)}(t_n) - c_i)^2 + (v_i^{(n)}(t_n) - d_i)^2\} + c^2 e^{-2\eta t_n} r^2 \to 0, \ n \to \infty. \tag{24}$$

Таким чином з (24) одержуємо предкомпактність ξ_n, а отже, імпульсний напівпотік G має рівномірний атрактор Θ, причому в силу (20), (24) має місце вкладення (11). Теорема доведена.

Зауваження 1. *Кожна імпульсна траєкторія, що стартує з IM, має нескінчену кількість імпульсних збурень, часові проміжки між якими задовольняють* (18). *Це, зокрема, означає, що $\Theta \cap M \ne \emptyset$.*

Зауваження 2. *Кожна імпульсна траєкторія, що стартує з M, в силу* (14) *не має імпульсних збурень і в силу оцінки* (20) *прямує до нуля при $t \to \infty$. Це, зокрема, означає, що $0 \in \Theta$.*

Наступна теорема є основним результатом роботи.

Теорема 3. *Нехай імпульсне відображення $I : M \to M'$ є неперервним. Тоді рівномірний атрактор Θ імпульсного напівпотоку, породженого задачею (8)–(10), є стійким в тому сенсі, що*

$$D^+(\Theta \setminus M) \subset \overline{\Theta \setminus M}. \tag{25}$$

Доведення.

Нехай $\xi \in \Theta \setminus M$. Якщо $\xi = 0$, то $G(t,0) = 0 \in \Theta$ $\forall t \geq 0$. Інакше в силу (11)

$$\xi = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i, \text{ де } \sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i c_i^2 + d_i^2\} \in (a^2, a^2(1+\mu)^2]. \tag{26}$$

Враховуючи (14), маємо

$$\forall t \geq 0 \;\; l_p^2(V(t,\xi)) \in (a^2, a^2(1+\mu)^2]. \tag{27}$$

Крім того, оскільки для $\xi = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ маємо

$$(u_0, \psi_i) = (v_0, \psi_i) = 0 \;\; \forall\, i \geq p+1,$$

то в силу (12) для $V(t,\xi) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ маємо

$$(u(t), \psi_i) = (v(t), \psi_i) = 0 \;\; \forall\, t \geq 0 \; \forall\, i \geq p+1.$$

Це означає, що

$$\forall\, t \geq 0 \;\; G(t, \Theta \setminus M) \subset \Theta \setminus M \tag{28}$$

Доведемо рівність

$$\Theta = \overline{\Theta \setminus M} \tag{29}$$

В силу замкненості Θ маємо вкладення $\overline{\Theta \setminus M} \subset \Theta$. Тепер нехай $\xi \in \Theta \cap M$. В силу (11)

$$\xi = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i, \text{ де } \sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i c_i^2 + d_i^2\} = a^2. \tag{30}$$

Розглядаючи послідовність

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i + 1/n \\ d_i + 1/n \end{pmatrix} \psi_i, \text{ де } \sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i c_i^2 + d_i^2\} = a^2, \tag{31}$$

маємо, що $\xi_n \in \Theta$ і $\|\xi_n - \xi\|_E \to 0$. Звідси $\xi \in \overline{\Theta \setminus M}$ і шукана рівність доведена.

Тепер для того, щоб довести (25), достатньо довести вкладення

$$D^+(\Theta \setminus M) \subset \Theta. \tag{32}$$

Будемо міркувати від супротивного. Нехай для деяких $\xi_n \to \xi \in \Theta \setminus M$ та $\tau_n \geq 0$ виконується

$$z_n = G(\tau_n, \xi_n) \to z \notin \Theta. \tag{33}$$

Якщо $\tau_n \to \infty$, то в силу (5) і асимптотичної компактності напівпотоку G послідовність $\{z_n\}$ має принаймні одну граничну точку і всі її граничні точки належать Θ, тобто маємо протиріччя з (33).

Тоді можемо вважати, що $\tau_n \to \tau \geq 0$.

Оскільки $\xi \in \Theta \setminus M$, то $l_p(\xi) > a$, $l_p(\xi_n) > a$. Тоді в силу умови монотонності (14) виводимо, що існують $s_0^{(n)}$ та s_0 - моменти першого попадання траєкторій $V(\cdot, \xi_n)$ та $V(\cdot, \xi)$ на множину M і при цьому $s_0 > 0$. Крім того, в силу оцінки (21) можемо вважати, що по підпослідовності $s_0^{(n)} \to s_0$.

Якщо $\tau < s_0$, то $\tau_n < s_0^{(n)}$, отже, в силу (28)

$$z_n = V(\tau_n, \xi_n) \to V(\tau, \xi) = G(\tau, \xi) \in \Theta \setminus M \ \Rightarrow \ \text{протиріччя з (33)}.$$

Якщо $\tau = s_0$ і $\tau_n < s_0^n$, то

$$z_n = V(\tau_n, \xi_n) \to V(\tau, \xi) = V(s_0, \xi) \in M.$$

Оскільки для $\eta_n \searrow 0$ $\ \tau - \eta_n < s_0$, то з одного боку

$$V(\tau - \eta_n, \xi) \to V(\tau, \xi),$$

а з іншого,

$$V(\tau - \eta_n, \xi) = G(\tau - \eta_n, \xi) \in \Theta \setminus M.$$

Звідси, $z = V(\tau, \xi) \in \overline{\Theta \setminus M} \subset \Theta \ \Rightarrow$ протиріччя з (33).

Якщо $\tau = s_0$ і $\tau_n \geq s_0^n$, то $\tau_n = s_0^n + \alpha_n$, $\alpha_n \to 0+$. Нехай $z_1^{(n)+} = IV(s_0^{(n)}, \xi_n)$. В силу умов неперервності імпульсного відображення I маємо

$$z_1^{(n)+} \to IV(s_0, \xi) = z_1^+.$$

Отже,

$$z_n = V(\alpha_n, z_1^{(n)+}) \to z_1^+ = G(s_0, \xi) \in \Theta \setminus M \ \Rightarrow \ \text{протиріччя з (33)}.$$

Нехай $\tau > s_0$. Тоді $\tau_n > s_0^{(n)}$. Оскільки $z_1^{(n)+}, z_1^+ \in IM$, то $l_p(z_1^{(n)+}) = l_p(z_1^+) = a(1+\mu) > a$. Отже, існують $s_1^{(n)}$ та s_1 - моменти першого попадання траєкторій $V(\cdot, z_1^{(n)+})$ та $V(\cdot, z_1^+)$ на множину M, причому по підпослідовності $s_1^{(n)} \to s_1 > 0$. Користуючись формулою (2), можемо повторити попередні міркування для $s_0 < \tau \leq s_0 + s_1$ і т.д. і кожного разу одержувати протиріччя з (33). Отже,

$$D^+(\Theta \setminus M) \subset \Theta = \overline{\Theta \setminus M}$$

і теорема доведена.

3. Висновки

У роботі досліджується якісна поведінка імпульсного напівпотоку, породженого хвильовим рівнянням, розв'язки якої зазнають імпульсного збурення при досягненні фіксованої імпульсної підмножини в фазовому просторі. Для широких класів імпульсних відображень доведено існування та встановлено явний вигляд рівномірного атрактору. За додаткової умови неперервності імпульсного відображення доведено теорему про стійкість неімпульсної частини рівномірного атрактора.

Список літератури

1. **Самойленко А. М.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — К.: Вища школа, 1987. — 287 с.
2. **Lakshmikantham V.** Theory of impulsive differential equitations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov. – Singapore : World Scientific, 1989. — 288 p.
3. **Samoilenko A. M.** Impulsive differential equitations / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. — Singapore : World Scientific, 1995. — 462 p.
4. **Akhmet M.** Principles of Discontinuous Dynamical Systems / M Akhmet. — New York: Springer, 2010. — 176 p.
5. **Kaul S. K.** Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems / S. K. Kaul // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. — 1994. — Vol. 7. — №4. — P. 509–523.
6. **Pavlidis T.** Stability of a class of discontinuous dynamical systems / T. Pavlidis // Information and control. — 1996. — Vol. 9. — P. 298–322.
7. **Ciesielski K.** On stability in impulsive dynamical systems / K. Ciesielski //Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics — 2004. — Vol. 52. — P. 81–91.
8. **Bonotto E. M.** Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems / E. M. Bonotto // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2007. — Vol. 332. — P. 81–96.
9. **Temam R.** Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics / R. Temam. — New York: Springer, 1988. — 500 p.
10. **Chepyzhov V. V.** Attractors for Equations of Mathematical Physics / V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik — Rhode Island: American Mathematical Society, 2002. — 324 p.
11. **Perestyuk M. O.** Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects / M. O. Perestyuk, O. V. Kapustyan // Memoirs of Differential equations and Mathematical physics. — 2012. — Vol. 56. — P. 89–113.
12. **Perestyuk M. O.** Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems / M. O. Perestyuk, O. V. Kapustyan // Ukrainian Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 68. — №4. — P. 517–528.
13. **Dashkovskiy S.** Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems / S. Dashkovskiy, P. Feketa, O. Kapustyan and I. Romaniuk // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 458. — P. 193–218.
14. **Bonotto E. M.** Global attractors for impulsive dynamical systems — a precompact approach / E. M. Bonotto, M. C. Bortolan, A. N. Carvalho and R. Czaja // Journal of Differential Equations. — 2015. — Vol. 259. — P. 2602–2625.

15. **Bonotto E. M.** Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems / E. M.Bonotto, M. C. Bortolan, R. Collegari and R. Czaja // Journal of Differential Equations. — 2016. — Vol. 261. — P. 4338–4367.
16. **Kapustyan O. V.** Stability of global attractors of impulsive infinite-dimensional systems / O. V. Kapustyan, M. O. Perestyuk, I. V. Romaniuk // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 70. — №1. — P. 30–41.
17. **Капустян О. В.** Стійкість рівномірних атракторів для одного класу імпульсних параболічних систем / О. В. Капустян, О. В. Перегуда, І. В. Романюк // Дослідження в математиці і механіці. — 2018. — т. 23. — № 2(32). — С. 35–44.
18. **Kapustyan O. V.** Global attractors of an impulsive dynamical system generated by the wave equation / O. V. Kapustyan, I. V. Romaniuk // Journal of mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 236. — № 3. — P. 300-311.
19. **Bhatia N.P.** Stability theory of dynamical systems. / N. P. Bhatia , G. P. Szegö. — New York: Springer, 2002. — 255 p.
20. **Myshkis A. D.** Vibrations of the string with energy dissipation and impulsive feedback support // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. — 1996. — Vol. 26. — №7. — P. 1271–1278.

Капустян А. В., Капустян Е.А., Перегуда О. В., Романюк И. В.
Устойчивость равномерного аттрактора для эволюционного уравнения второго порядка с разрывными траекториями

Резюме

Работа посвящена исследованию качественного поведения решений волнового уравнения, траектории которого испытывают импульсное возмущение при достижении фиксированного (импульсного) подмножества в фазовом пространстве. Пользуясь общей схемой построения бесконечномерной импульсной динамической системы и используя понятие равномерного аттрактора — минимального компактного равномерно притягивающего множества, получен результат о существовании и явном виде равномерного аттрактора для импульсной динамической системы, порожденной волновым уравнением. Траектории такой системы могут иметь бесконечное количество импульсных точек при встрече с импульсным подмножеством фазового пространства. Таким образом равномерный аттрактор может иметь непустое пересечение с импульсным множеством и как результат не обладать свойством устойчивости. Однако благодаря дополнительным условиям на импульсные параметры задачи в данной работе удалось доказать свойство устойчивости для не импульсной части равномерного аттрактора.
Ключевые слова: импульсная динамическая система, устойчивость, импульсное возмущение, равномерный аттрактор, волновое уравнение.

Kapustyan O. V., Kapustian O. A., Pereguda O. V., Romaniuk I. V.
Stability of a uniform attractor for a second-order evolution equation with discontinuous trajectories

Summary

The work is devoted to the study of the qualitative behavior of solutions of the wave equation, whose trajectories have impulsive perturbations in moments when they reach a fixed (impulsive) subset of the phase space. Using the general constructing scheme of the infinite-dimensional impulsive dynamical system and using the concept of a uniform attractor — a minimal compact uniformly attracting set, we obtained the result about the existence and the

explicit form of a uniform attractor for the corresponding impulsive dynamical system. Trajectories of such system can have an infinite number of impulsive points when they encounter an impulsive subset of the phase space. Thus, a uniform attractor may have a non-empty intersection with the impulsive set and, as a result, may not have the stability property. However, due to the additional conditions on the impulsive parameters of the problem, we managed to prove the stability property for the non-impulsive part of the uniform attractor.
Key words: impulsive dynamical system, stability, impulsive perturbation, uniform attractor, wave equation.

References

1. Samoilenko A. M., Perestyuk M. O. (1987). *Dyfferentsyalnie uravnenyia s ympulsnim vozdeistvyem [Differential equations with impulsive action]*. Kyiv: Vyshcha shkola, 287 p.
2. Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. (1989). *Theory of impulsive differential equitations*. Singapore: World Scientific, 288 p.
3. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. (1995). *Impulsive differential equitations* . Singapore: World Scientific, 462 p.
4. Akhmet M. (2010). *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*. New York: Springer, 176 p.
5. Kaul S. K. (1994). *Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems. J Appl Math Stoch Anal*, Vol. 7, № 4, P. 509–523.
6. Pavlidis T. (1996). *Stability of a class of discontinuous dynamical systems. Information and control*, Vol. 9, P. 298–322.
7. Ciesielski K. (2004). *On stability in impulsive dynamical systems. Bulletin Polish Acad. Sci. Math.*, Vol. 52, P. 81–91.
8. Bonotto E. M. (2007). *Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems. J Math Anal Appl*, Vol. 332, P. 81–96.
9. Temam R. (1988). *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. New York: Springer, 500 p.
10. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. (2002). *Attractors for Equations of Mathematical Physics*. Rhode Island: American Mathematical Society, 324 p.
11. Perestyuk M. O., (2012). *Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects. Memoirs Diff eq and Math phys*, Vol. 56, P. 89–113.
12. Perestyuk M. O., Kapustyan O. V. (2016). *Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems. UMJ*, Vol. 68, № 4, P. 517–528.
13. Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O. V., Romaniuk I. V. (2018). *Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems*. Vol. 458, P. 193–218.
14. Bonotto E. M, Bortolan M. C., Carvalho A. N., Czaja R. (2015). *Global attractors for impulsive dynamical systems — a precompact approach. J Diff Eq*, Vol. 259, P. 2602–2625.
15. Bonotto E. M, Bortolan M. C., Collegari R. , Czaja R. (2016). *Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems. J Diff Eq*, Vol. 261, № 1, P. 4338–436.
16. Kapustyan O. V., Perestyuk M. O., Romaniuk I. V. (2018). *Stability of global attractors of impulsive infinite-dimensional systems. UMJ*, Vol. 70, №1, P. 30–41.
17. Kapustyan O. V., Pereguda O. V., Romaniuk I. V. (2018) *Stability of uniform attractors for one class of impulsive parabolic systems. RMM*, Vol. 23, № 2(32), P. 35–44.

18. Kapustyan O. V., Romaniuk I. V (2019) *Global attractors of an impulsive dynamical system generated by the wave equation. J Math Sci*, Vol. 236, № 3, P. 300-311.

19. Bhatia N. P., Szegö G. P. (2002). *Stability theory of dynamical systems.* New York: Springer, 255 p.

20. Myshkis A. D. (1996). *Vibrations of the string with energy dissipation and impulsive feedback support. Nonlin Anal: Theory, Methods and App.*, Vol. 26, №7, P. 1271–1278.