

УДК 517.925

А. В. Дрожжина

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИКА НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Для дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$, где $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_i равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_i} — некоторая односторонняя окрестность Y_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, исследуются при некоторых ограничениях на функцию f вопросы о существовании, асимптотике и количестве $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решений для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Такие решения относятся к особым случаям класса $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, который был введен в работах В. М. Евтухова, посвященных дифференциальным уравнениям типа Эмдена-Фаулера n -го порядка. Данные особые случаи требуют отдельного их рассмотрения в связи со специфическими априорными асимптотическими свойствами таких решений. Исследование поставленных задач осуществляется при предположении, что дифференциальное уравнение является в некотором смысле асимптотически близким к двучленному дифференциальному уравнению с правильно меняющимися нелинейностями.

MSC: 34D05, 34C11.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, правильно меняющиеся функции, асимптотика решений, $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решения.

DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).189938.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1)$$

где $n \geq 2$, $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_j равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_j} — некоторая односторонняя окрестность Y_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Определение 1. Решение y дифференциального уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (2)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t)y^{(n)}(t)} = \lambda_0. \quad (3)$$

Случаи, когда $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ ($i = \overline{1, n-1}$) являются особыми при изучении таких решений и требуют отдельного их рассмотрения. В силу результатов из [1] (Глава 3, §10) имеет место следующее утверждение об априорных асимптотических свойствах таких решений.

Лемма 1. Если $y : [t_0, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ является $P_\omega \left(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решением при некотором $i \in \{1, \dots, n-1\}$ дифференциального уравнения (1), то для этого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические соотношения

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{i-k}}{(i-k)!} y^{(i-1)}(t) \quad (k = \overline{1, i-1}),^* \quad y^{(i)}(t) = o\left(\frac{y^{(i-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right), \quad (4)$$

$$y^{(k)}(t) \sim (-1)^{k-i} \frac{(k-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{k-i}} y^{(i)}(t) \quad (k = \overline{i+1, n}), \quad (5)$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases}$$

причем в случае, когда $i = n-1$, соотношение (5) имеет место при дополнительном условии существования конечного или равного $\pm\infty$ предела $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$.

Асимптотическое поведение $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решений при $i \in \{1, \dots, n-1\}$ в работах [2] и [3], [4] исследовалось для неавтономных дифференциальных уравнений n -го порядка, которые содержат в правой части одно или несколько слагаемых с правильно меняющимися нелинейностями, и в работе Л.И. Кусик [5] для уравнения (1) общего вида при $n = 2$, т.е. в случае дифференциального уравнения второго порядка. При этом в [5] предполагалось, что уравнение (1) является в некотором смысле асимптотически близким к дифференциальному уравнению

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'),$$

где $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функция порядка σ_j , Y_j равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_j} — некоторая односторонняя окрестность Y_j , $j = 0, 1$.

Теория правильно меняющихся функций подробно изложена в монографиях Е. Сенета [6] и Н.Н. Bingham, С.М. Goldie, J.L. Teugels [7]. Согласно этой теории каждая правильно меняющаяся при $y \rightarrow Y$ функция

*При $i = 1$ эти соотношения отсутствуют.

$\varphi : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$ порядка σ , где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_Y - некоторая односторонняя окрестность Y , допускает представление вида

$$\varphi(y) = |y|^\sigma L(y), \quad (6)$$

в котором $L : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$ медленно меняющаяся функция при $y \rightarrow Y$, т.е. такая, что

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \quad \text{для будь-якого } \lambda > 0. \quad (7)$$

Среди свойств медленно меняющихся при $y \rightarrow Y$ функций $L : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_Y - некоторая односторонняя окрестность Y , отметим следующие.

\mathcal{M}_1 . Предельное соотношение (7) выполняется равномерно по λ на любом отрезке $[c, d] \subset]0, +\infty[$;

$$\mathcal{M}_2. \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{\ln L(y)}{\ln |y|} = 0.$$

\mathcal{M}_3 . Существует непрерывно дифференцируемая функция $L_0 : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$, которая носит название нормализованная медленно меняющаяся функция при $y \rightarrow Y$, такая, что

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{L_0(y)}{L(y)} = 1, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yL_0'(y)}{L_0(y)} = 0.$$

\mathcal{M}_4 . При $\gamma \neq 0$

$$\int_B^y \frac{|z|^{\gamma-1} dz}{L(z)} = \frac{\nu|y|^\gamma}{\gamma L(y)} [1 + o(1)] \quad \text{при } y \rightarrow Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

где

$$\nu = \text{sign } y, \quad B = \begin{cases} y_0, & \text{если } \left| \int_{y_0}^Y \frac{|z|^{\gamma-1} dz}{L(z)} \right| = +\infty, \\ Y, & \text{если } \left| \int_{y_0}^Y \frac{|z|^{\gamma-1} dz}{L(z)} \right| < +\infty \end{cases} \quad y_0 \in \Delta_Y.$$

Введем также для медленно меняющихся функций условие S_0 .

Определение 2. Будем говорить, что медленно меняющаяся при $y \rightarrow Y$ функция $L : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, и Δ_Y - односторонняя окрестность Y , удовлетворяет условию S_0 , если

$$L\left(\nu e^{[1+o(1)] \ln |y|}\right) = L(y)[1 + o(1)] \quad \text{при } y \rightarrow Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

где $\nu = \text{sign } y$.

Условию S_0 заведомо удовлетворяют функции, которые имеют отличный от нуля конечный предел при $y \rightarrow Y$ и функции вида

$$|\ln |y||^{\gamma_1}, \quad \ln^{\gamma_2} |\ln |y||, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}.$$

Целью настоящей работы является распространение результатов из [5] на случай произвольного $n \geq 2$, а именно установление условий существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega \left(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решений при $i \in \{1, \dots, n-1\}$ и асимптотических представлений для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно. Для таких решений $i-1$ -я производная является медленно меняющейся функцией при $t \uparrow \omega$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 3. Будем говорить, что функция f в дифференциальном уравнении (1) удовлетворяет условию $(RN)_{\lambda_0}$ при $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n-1\}$, если существует число $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, непрерывная функция $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ и непрерывные правильно меняющиеся при $z_j \rightarrow Y_j$ ($j = \overline{0, n-1}$) функции $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ ($j = \overline{0, n-1}$) порядков σ_j ($j = \overline{0, n-1}$) такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_j : [a, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_j}$ ($j = \overline{0, n-1}$), которые удовлетворяют условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_j(t) = Y_j, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z_j'(t)}{z_j(t)} = i - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (8)$$

имеет место асимптотическое представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (9)$$

Поскольку в (9) каждая из функций φ_j является правильно меняющейся функцией порядка σ_j при $z_j \rightarrow Y_j$, то согласно (6)

$$\varphi_j(z_j) = |z_j|^{\sigma_j} L_j(z_j) \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (10)$$

где каждая $L_j : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ ($j = \overline{0, n-1}$) — непрерывная медленно меняющаяся функция при $z_j \rightarrow Y_j$.

При выполнении для некоторого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ условия $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ наряду с (10) будем использовать следующие обозначения:

$$\nu_j = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_j = +\infty, \text{ либо} \\ & Y_j = 0 \text{ и } \Delta_{Y_j} \text{ — правая окрестность нуля,} \\ -1, & \text{если } Y_j = -\infty, \text{ либо} \\ & Y_j = 0 \text{ и } \Delta_{Y_j} \text{ — левая окрестность нуля} \end{cases} \quad (j = \overline{0, n-1}),$$

$$\begin{aligned}\gamma &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j, & \gamma_i &= 1 - \sum_{j=i}^{n-1} \sigma_j, \\ \mu_i &= n - i - 1 + \sum_{j=0}^{i-2} \sigma_j(i - j - 1) - \sum_{j=i+1}^{n-1} \sigma_j(j - i), \\ C_i &= \frac{1}{(n-i)!} \prod_{j=0}^{i-1} [(i-j-1)!]^{-\sigma_j} \prod_{j=i+1}^{n-1} [(j-i)!]^{\sigma_j}, \\ J_i(t) &= \int_{A_i}^t p(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_i} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j(\nu_j |\pi_\omega(s)|^{i-j-1}) ds, \\ J_{ii}(t) &= \int_{A_{ii}}^t |J_i(s)|^{\frac{1}{\gamma_i}} ds,\end{aligned}$$

где каждый из пределов интегрирования A_i , A_{ii} выбирается равным точке $a_0 \in [a, \omega[$ (справа от которой, т.е. при $t \in [a_0, \omega[$ подинтегральная функция непрерывна), если при этом значении предела интегрирования соответствующий интеграл стремится к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, и равным ω если при таком значении предела интегрирования он стремится к нулю при $t \uparrow \omega$.

Теорема 1. Пусть $n > 2$, $i \in \{1, \dots, n-2\}$, функция f удовлетворяет условию $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$, выполняется неравенство $\gamma\gamma_i \neq 0$ и функции L_j при всех $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i-1\}$ удовлетворяют условию S_0 . Тогда для существования y дифференциального уравнения (1) $P_\omega\left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$ -решений необходимо, а если алгебраическое относительно ρ уравнение

$$\sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{(j-i)!} \prod_{m=1}^{j-i} (m-\rho) + \sigma_i = \frac{1}{(n-i)!} \prod_{m=1}^{n-i} (m-\rho) \quad (11)$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы соблюдались неравенства

$$\nu_j \nu_{j-1} (i-j) \pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при всех } j \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i\}, \quad (12)$$

$$\nu_i \nu_{i-1} \gamma \gamma_i J_{ii}(t) > 0, \quad \nu_i \alpha_0 \gamma_i (-1)^{n-i-1} \pi_\omega^{n-i-1}(t) J_i(t) > 0 \quad (13)$$

в некоторой левой окрестности ω , а также условия

$$\nu_{j-1} \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{i-j} = Y_{j-1} \quad \text{при всех } j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}, \quad (14)$$

$$\nu_{i-1} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} = Y_{i-1}, \quad (15)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_i'(t)}{J_i(t)} = -\gamma_i, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_{ii}'(t)}{J_{ii}(t)} = 0. \quad (16)$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{i-j}}{(i-j)!} y^{(i-1)}(t) [1 + o(1)] \quad (j = 1, \dots, i-1), \quad (17)$$

$$y^{(j)}(t) = (-1)^{j-i} \frac{(j-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{j-i}} \cdot \frac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)} y^{(i-1)}(t) [1 + o(1)] \quad (j = i, \dots, n-1), \quad (18)$$

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^\gamma}{L_{i-1}(y^{(i-1)}(t))} = |\gamma_i C_i| \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\gamma_i} [1 + o(1)], \quad (19)$$

причем таких решений в случае $\omega = +\infty$ существует $l + i$ -параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ и $l + i - 1$ -параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$, а в случае $\omega < +\infty$ существует $n - i - l + 1$ -параметрическое семейство таких решений при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ и $n - i - l$ -параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$, где l — число корней (с учетом кратных) уравнения (11) с отрицательной действительной частью.

Замечание 1. Алгебраическое уравнение (11) заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если $\sum_{j=i}^{n-1} |\sigma_j| \leq 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $y : [t_0, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решение дифференциального уравнения (1). Тогда в силу условий (2) определения 1 существует $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что на промежутке $[t_1, \omega[$ это решение и его производные до порядка $n - 1$ включительно сохраняют знаки, причем $\text{sign } y^{(j)}(t) = \nu_j$ ($j = \overline{0, n-1}$) при $t \in [t_1, \omega[$. Кроме того, в силу леммы 1 имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические соотношения (4), (5), из которых, в частности, вытекает справедливость асимптотических представлений (17). Кроме того, из (4) и (5) следует, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = i - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (20)$$

откуда вытекает справедливость неравенств (12) и условий (14). В силу (20) также ясно, что для функций $z_j(t) = y^{(j)}(t)$ ($j = \overline{0, n-1}$) выполняются условия (8) и поэтому согласно условию $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ из (1) получим

асимптотическое соотношение

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j \left(y^{(j)}(t) \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

или с учетом представлений (10) – соотношение вида

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t) [1 + o(1)] \prod_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(t)|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}(t)) \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (21)$$

Здесь согласно условиям теоремы функции L_j при всех $j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{i-1\}$ удовлетворяют условию S_0 и в силу (20)

$$\ln |y^{(j)}(t)| = [i - j - 1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому для всех $j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{i-1\}$

$$\begin{aligned} L_j(y^{(j)}(t)) &= L_j \left(\nu_j e^{[1+o(1)] \ln |\pi_\omega(t)|^{i-j-1}} \right) = \\ &= L_j \left(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

С учетом (20) также находим, что

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \cdots \frac{y^{(i+2)}(t)}{y^{(i+1)}(t)} y^{(i+1)}(t) = \\ &= \frac{(-1)^{n-i-1} (n-i)!}{\pi_\omega^{n-i-1}(t)} y^{(i+1)}(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Используя эти асимптотические соотношения, а также асимптотические соотношений (4), (5) и введенные обозначений μ_i , γ , γ_i и C_n из (21) получим соотношение вида

$$\begin{aligned} &\frac{y^{(i+1)}(t) |y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{i-1}(y^{(i-1)}(t))} = \\ &= \alpha_0 (-1)^{n-i-1} (\text{sign} [\pi_\omega(t)]^{n-i-1}) C_i p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i} \times \\ &\times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j \left(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (22) \end{aligned}$$

В силу свойства \mathcal{M}_3 медленно меняющихся функций существует непрерывно дифференцируемая нормализованная медленно меняющаяся при

$y^{(i-1)} \rightarrow Y_{i-1}$ функция $L_{0i-1} : \Delta_{Y_{i-1}} \rightarrow]0, +\infty[$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\substack{y^{(i-1)} \rightarrow Y_{i-1} \\ y^{(i-1)} \in \Delta_{Y_{i-1}}}} \frac{L_{i-1}(y^{(i-1)})}{L_{0i-1}(y^{(i-1)})} = 1, \quad \lim_{\substack{y^{(i-1)} \rightarrow Y_{i-1} \\ y^{(i-1)} \in \Delta_{Y_{i-1}}}} \frac{y^{(i-1)} L'_{0i-1}(y^{(i-1)})}{L_{0i-1}(y^{(i-1)})} = 0. \quad (23)$$

С использованием этих условий, (2) и (20) находим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \right)' = \frac{\nu_i y^{(i+1)}(t) |y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \times \\ & \quad \times \left(\gamma_i + (\gamma - \gamma_i) \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i+1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i+1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i-1)}(t) L'_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))}{L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \right) = \\ & = \frac{y^{(i+1)}(t) |y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} [\nu_i \gamma_i + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Поэтому (22) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \right)' = \\ & = \nu_i \alpha_0 (-1)^{n-i-1} \gamma_i (\text{sign} [\pi_\omega(t)]^{n-i-1}) C_i p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i} \times \\ & \quad \times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j (\nu_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1}) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t и учитывая, что дробь под знаком производной в силу условия $\gamma_i \neq 0$ стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} = \\ & = \nu_i \alpha_0 (-1)^{n-i-1} \gamma_i (\text{sign} [\pi_\omega(t)]^{n-i-1}) C_i J_i(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Отсюда, прежде всего, следует, что выполняется второе из неравенств (13). Кроме того, отсюда и (22) ввиду эквивалентности функций L_{i-1} и L_{0i-1} при $y^{(i-1)} \rightarrow Y_{i-1}$ следует, что

$$\frac{y^{(i+1)}(t)}{y^{(i)}(t)} = \frac{J'_i(t)}{\gamma_i J_i(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

откуда с учетом (20) при $j = i$ вытекает справедливость первого из условий (16).

Из полученного соотношения также имеем

$$\frac{y^{(i)}(t)}{|y^{(i-1)}(t)|^{\frac{\gamma_i - \gamma}{\gamma_i}} L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma_i}}(y^{(i-1)}(t))} = \nu_i |C_i \gamma_i J_i(t)|^{\frac{1}{\gamma_i}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (24)$$

Интегрируя теперь это соотношение на промежутке от t_1 до t , с учетом условия $\gamma \gamma_i \neq 0$ и использованием свойства \mathcal{M}_3 медленно меняющихся функций, находим, что

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^{\frac{\gamma}{\gamma_i}}}{L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma_i}}(y^{(i-1)}(t))} = \frac{\nu_i \nu_{i-1} \gamma}{\gamma_i} |\gamma_i C_i|^{\frac{1}{\gamma_i}} J_{ii}(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

т.е. справедливо асимптотическое представление (19) и первое из неравенств (13). Кроме того, из (24) и (19) следует, что

$$\frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} = \frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (25)$$

В силу этого соотношения соблюдается условие (15) и из (20) вытекает справедливость второго из условий (16), а также асимптотических представлений (18).

Достаточность. Пусть соблюдаются условия (12) – (16) и алгебраическое уравнение (11) не имеет корней с нулевой действительной частью. Покажем, что в этом случае у дифференциального уравнения (1) существуют решения, допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (17) – (19) и выясним вопрос об их количестве.

Сначала рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^\gamma}{L_{0i-1}(Y)} = |\gamma_i C_i| \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\gamma_i} [1 + v_n] \quad (26)$$

где $L_{0i} : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ – непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $Y \rightarrow Y_{i-1}$ функции, удовлетворяющие условиям (23), существующая в силу свойства \mathcal{M}_3 медленно меняющихся функций.

Выбрав произвольным образом число $d \in]0, \frac{\gamma_i}{\gamma}[$, покажем, что при некотором $t_0 \in]a, \omega[$ соотношение (25) однозначно определяет, заданную на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, где $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}} = \{v \in \mathbb{R} : |v| \leq \frac{1}{2}\}$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $Y = Y(t, v_n)$ вида

$$Y(t, v_n) = \nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z(t, v_n)}, \quad (27)$$

где функция z такова, что

$$|z(t, v_n)| \leq d \quad \text{при} \quad (t, v_n) \in [t_0, \omega] \times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$$

и

$$\lim_{t \uparrow \omega} z(t, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}.$$

Полагая в (26)

$$Y = \nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z}, \quad (28)$$

находим после элементарных преобразований, что

$$z = a(t) + b(t, v_n) + Z(t, z), \quad (29)$$

где

$$a(t) = \frac{\gamma_i}{\gamma} \cdot \frac{\ln \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} \right| + \frac{1}{\gamma_i} \ln |\gamma_i C_i|}{\ln |J_{ii}(t)|}, \quad b(t, v_n) = \frac{\gamma_i}{\gamma} \cdot \frac{\ln[1 + v_n]}{\ln |J_{ii}(t)|},$$

$$Z(t, z) = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\ln L_{0i-1} \left(\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} \right)}{\ln |J_{ii}(t)|}.$$

Здесь в силу условия (15) и свойства \mathcal{M}_2 медленно меняющихся функций

$$\nu_{i-1} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} = Y_{i-1} \quad \text{равномерно по} \quad z \in [-d, d],$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} a(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} b(t, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} Z(t, z) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z \in [-d, d].$$

Так как

$$\frac{\partial Z(t, z)}{\partial z} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} L'_{0i-1} \left(\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} \right)}{L_{0i-1} \left(\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} \right)},$$

то ввиду (15) и второго из условий (23) имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\partial Z(t, z)}{\partial z} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z \in [-d, d].$$

Согласно этим условиям существует число $t_1 \in [a, \omega]$ такое, что

$$\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} \in \Delta_{Y_{i-1}} \quad \text{при} \quad (t, z) \in [t_1, \omega] \times [-d, d],$$

$$|a(t) + b(t, v_1, v_2) + Z(t, z)| \leq d \quad \text{при} \quad (t, v_n, z) \in [t_1, \omega] \times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}} \times [-d, d]$$

и

$$|Z(t, z_1) - Z(t, z_2)| \leq \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[\text{ и } z_1, z_2 \in [-d, d].$$

Подобрав таким образом число t_1 , обозначим через \mathbf{B} банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega = [t_1, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функций $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|z\| = \sup \{|z(t, v_n)| : (t, v_n) \in \Omega\}.$$

Выделим из него подпространство \mathbf{B}_0 тех функций из \mathbf{B} , для которых $\|z\| \leq d$, и рассмотрим на \mathbf{B}_0 , выбрав предварительно произвольным образом число $\nu \in (0, 1)$, оператор

$$\Phi(z)(t, v_n) = z(t, v_n) - \nu [z(t, v_n) - a(t) - b(t, v_n) - Z(t, z(t, v_n))]. \quad (30)$$

В силу указанных выше свойств функций a , b и Z ясно, что $\Phi(\mathbf{B}_0) \subset \mathbf{B}_0$ и $\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\| \leq (1 - \nu) \|z_1 - z_2\|$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{B}_0$.

Значит, оператор Φ отображает пространство \mathbf{B}_0 в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (30) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением уравнения (29), удовлетворяющим условию $\|z\| \leq d$. Из (29) с учетом этого условия и свойств функций a , b , Z следует, что данное решение стремится к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, где t_0 — некоторое число из промежутка $[t_1, \omega[$ непосредственно вытекает из известной локальной теоремы о существовании неявной функции, определяемой соотношением (29). В силу замены (28) полученной функции z соответствует непрерывно дифференцируемая на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функция Y вида (27), которая является решением уравнения (26) и удовлетворяет условиям

$$Y(t, v_n) \in \Delta_{Y_{i-1}} \quad \text{при } (t, v_n) \in [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \quad (31)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y(t, v_n) = Y_{i-1} \quad \text{равномерно по } v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \quad (32)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\gamma J_{ii}(t) \frac{\partial Y(t, v_n)}{\partial t}}{\gamma_i J'_{ii}(t) Y(t, v_n)} = 1 \quad \text{равномерно по } v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \quad (33)$$

Теперь, применяя к дифференциальному уравнению (1) преобразова-

ние

$$\begin{aligned}
y^{(j-1)}(t) &= \frac{[\pi_\omega(t)]^{i-j}}{(i-j)!} y^{(i-1)}(t)[1 + v_j(\tau)] \\
j &= 1, \dots, i-1, \\
y^{(j)}(t) &= (-1)^{j-i} \frac{(j-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{j-i}} \cdot \frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma_i J_{ii}(t)} y^{(i-1)}(t)[1 + v_j(\tau)] \\
j &= i, \dots, n-1, \\
y^{(i-1)}(t) &= Y(t, v_n(\tau))
\end{aligned} \tag{34}$$

и учитывая, что функция $y^{(i-1)}(t) = Y(t, v_n(\tau))$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $v_n(\tau) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^\gamma}{L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} = |\gamma_i C_i| \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\gamma_i} [1 + v_n(\tau)],$$

получим с использованием знаковых условий (12), (13) систему дифференциальных уравнений вида

$$\left\{ \begin{aligned}
v'_j &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[(i-j)(v_{j+1} - v_j) - \frac{\gamma_i}{\gamma} h_1(\tau)(1 + v_j)(1 + v_i) \right] \\
j &= 1, \dots, i-2, \\
v'_{i-1} &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[-v_{i-1} - \frac{\gamma_i}{\gamma} h_1(\tau)(1 + v_{i-1})(1 + v_i) \right], \\
v'_j &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[(j-i)(1 + v_j) - (j+1-i)(1 + v_{j+1}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\gamma_i} h_2(\tau)(1 + v_j) + \frac{1}{\gamma} h_1(\tau)(1 + v_j)(\gamma - \gamma_i - \gamma_i v_i) \right] \\
j &= i, \dots, n-2, \\
v'_{n-1} &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[\frac{(-1)^{n-i-1} \gamma_i J_{ii}(t) [\pi_\omega(t)]^{n-i} G(t, v_1, \dots, v_n)}{(n-i-1)! \gamma_i J'_{ii}(t) Y(t, v_n)} + (n-i-1)(1 + v_{n-1}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\gamma_i} h_2(\tau)(1 + v_{n-1}) + \frac{1}{\gamma} h_1(\tau)(1 + v_{n-1})(\gamma - \gamma_i - \gamma_i v_i) \right], \\
v'_n &= \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} \left[(1 + v_n)(1 + v_i) - (1 + v_n) - \frac{1}{\gamma} H(\tau, v_n)(1 + v_n)(1 + v_i) \right],
\end{aligned} \right.$$

в которой

$$\begin{aligned}
h_1(\tau) &= \frac{\pi_\omega(t) J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}, \quad h_2(\tau) = \frac{\pi_\omega(t) J'_i(t)}{J_i(t)}, \\
H(\tau(t), v_n) &= \frac{Y(t, v_n) L'_{0i-1}(Y(t, v_n))}{L_{0i-1}(Y(t, v_n))}, \quad G(\tau(t), v_1, \dots, v_n) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f(t, z_0(t, v_1, \dots, v_n), \dots, z_n(t, v_1, \dots, v_n)), \quad z_j(t, v_1, \dots, v_n) = \\
 &= \begin{cases} \frac{\pi_\omega^{i-j-1}(t)}{(i-j-1)!} Y(t, v_n)(1 + v_{j+1}) & \text{при } j = \overline{0, i-2}, \\ Y(t, v_n) & \text{при } j = i-1, \\ (-1)^{j-i} \frac{(j-i)!}{\pi_\omega^{j-i}(t)} \frac{\gamma_i}{\gamma} \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} Y(t, v_n)(1 + v_j) & \text{при } j = \overline{i, n-1}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Здесь в силу условий (16), (31), (32) и второго из условий (23)

$$\lim_{t \uparrow \omega} h_1(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} h_2(t) = -\frac{1}{\gamma_i} \quad (35)$$

и

$$\lim_{t \uparrow \omega} H(t, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

Кроме того, согласно условиям (31)–(33), (14)–(16)

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_j(t, v_1, \dots, v_n) = Y_j, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \frac{\partial z_j(t, v_1, \dots, v_n)}{\partial t}}{z_j(t, v_1, \dots, v_n)} = i - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad (37)$$

равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$, где

$$\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n = \left\{ (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R} : |v_j| \leq \frac{1}{2} \quad (j = \overline{1, n}) \right\}.$$

Поэтому ввиду выполнения условия $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ имеет место представление

$$G(t, v_1, \dots, v_n) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t, v_1, \dots, v_n)) [1 + r_1(t, v_1, \dots, v_n)],$$

где функция $r_1 : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_1(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n.$$

Отсюда с учетом представлений (10) и вида функций z_j ($j = \overline{0, n-1}$) находим

$$\begin{aligned}
 G(t, v_1, \dots, v_n) &= \alpha_0 C_i (n-i)! p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i + i + 1 - n} \left| \frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)} \right|^{1-\gamma_i} |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} \times \\
 &\times \prod_{j=0}^{i-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + v_j|^{\sigma_j} \prod_{j=0}^{n-1} L_j(z_j(t, v_1, \dots, v_n)) [1 + r_1(t, v_1, \dots, v_n)].
 \end{aligned}$$

Так как в силу условий (37)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |z_j(t, v_1, \dots, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = i - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1})$$

равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ и функции L_j ($j = \overline{0, n-1}$) при $j \neq i-1$ удовлетворяют условию S_0 , то соотношение для G может быть записано в виде

$$G(t, v_1, \dots, v_n) = \frac{\alpha_0 C_i (n-i)! p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i}}{|\pi_\omega(t)|^{n-i-1} \left| \frac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)} \right|^{\gamma_i - 1}} |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} L_{i-1}(Y(t, v_n)) \times \\ \times \prod_{j=0}^{i-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + v_j|^{\sigma_j} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j(v_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1}) [1 + r_2(t, v_1, \dots, v_n)],$$

где функция $r_2 : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_2(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n,$$

откуда с учетом вида функции J_i имеем

$$G(t, v_1, \dots, v_n) = \frac{\alpha_0 C_i (n-i)! J_i'(t)}{|\pi_\omega(t)|^{n-i-1} \left| \frac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)} \right|^{\gamma_i - 1}} |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} L_{i-1}(Y(t, v_n)) \times \\ \times \prod_{j=0}^{i-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + v_j|^{\sigma_j} [1 + r_2(t, v_1, \dots, v_n)].$$

Наконец, учитывая, что $Y(t, v_n)$ является решением уравнения (26) и соблюдаются условия (23), (31), (32), а также вид функций J_i и J_{ii} , находим

$$G(t, v_1, \dots, v_n) = \frac{\alpha_0 \nu_{i-1} (n-i)! J_i'(t) Y(t, v_n)}{|\gamma_i| |\pi_\omega(t)|^{n-i-1} \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\gamma_i} \left| \frac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)} \right|^{\gamma_i - 1} (1 + v_n)} \times \\ \times \prod_{j=0}^{i-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + v_j|^{\sigma_j} [1 + r_3(t, v_1, \dots, v_n)] = \\ = \frac{\alpha_0 \nu_{i-1} (n-i)! J_i'(t) J_{ii}'(t) Y(t, v_n)}{|\gamma| |\pi_\omega(t)|^{n-i-1} |J_i(t)| |J_{ii}(t)|} \times \\ \times \frac{\prod_{j=0}^{i-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + v_j|^{\sigma_j}}{1 + v_n} [1 + r_3(t, v_1, \dots, v_n)],$$

где функция $r_3 : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_3(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n.$$

Тогда с использованием неравенств (13) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{n-i-1} \gamma J_{ii}(t) [\pi_\omega(t)]^{n-i} G(t, v_1, \dots, v_n)}{(n-i-1)! \gamma_i J'_{ii}(t) Y(t, v_n)} = \\ & = \frac{n-i}{\gamma_i} \frac{\pi_\omega(t) J'_i(t)}{J_i(t)} \frac{\prod_{j=0}^{i-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1+v_j|^{\sigma_j}}{1+v_n} [1+r_3(t, v_1, \dots, v_n)]. \end{aligned}$$

В силу этого представления, а также условий (35), (36), полученная выше система дифференциальных уравнений имеет следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_j = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [f_j(t, v_1, \dots, v_n) + (i-j)(v_{j+1} - v_j)], \\ j = 1, \dots, i-2, \\ v'_{i-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [f_{i-1}(t, v_1, \dots, v_{n-1}) - v_{i-1}], \\ v'_j(t) = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [f_j(t, v_1, \dots, v_n) + (j-i+1)(v_j - v_{j+1})] \\ j = i, \dots, n-2, \\ v'_{n-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[f_{n-1}(t, v_1, \dots, v_n) - (n-i) \left(\sum_{k=1}^{i-1} \sigma_{k-1} v_k + \sum_{k=i}^{n-2} \sigma_k v_k \right) \right. \\ \quad \left. + (n-i)(1 - \sigma_{n-1})v_{n-1} + (n-i)v_n + V_{n-1}(v_1, \dots, v_n) \right], \\ v'_n = \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} [f_n(t, v_1, \dots, v_n) - v_i + V_n(v_1, \dots, v_n)], \end{array} \right. \quad (38)$$

где функции f_i ($i = \overline{1, n}$) непрерывны на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ и таковы, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f_i(\tau, \bar{v}) = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \quad \text{равномерно по } \bar{v} \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n,$$

$$\begin{aligned} V_{n-1}(v_1, \dots, v_n) = & -(n-i) \left[\frac{\prod_{k=0}^{i-2} |1+v_{k+1}|^{\sigma_k} \prod_{k=i}^{n-1} |1+v_k|^{\sigma_k}}{1+v_n} - \right. \\ & \left. -1 - \sum_{k=1}^{i-1} \sigma_{k-1} v_k - \sum_{k=i}^{n-1} \sigma_k v_k + v_n \right], \quad V_n(v_1, \dots, v_n) = v_i v_n. \end{aligned}$$

Здесь

$$V_j(0, \dots, 0) = 0, \quad \lim_{|v_1| + \dots + |v_n| \rightarrow 0} \frac{\partial V_j(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_k} = 0 \quad (k = \overline{1, n}) \quad \text{при } j = n-1, n$$

и

$$\int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\pi_\omega(\tau)} = \ln |\pi_\omega(\tau)| \Big|_{t_0}^t \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

$$\int_{t_0}^t \frac{J'_{ii}(\tau) d\tau}{J_{ii}(\tau)} = \ln |J_{ii}(\tau)| \Big|_{t_0}^t \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому данная система дифференциальных уравнений принадлежит к классу систем, которые исследовались в работе [8]. При этом также заметим, что

$$\text{sign } \pi_\omega(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases}$$

и в силу условий (13), (16)

$$\text{sign } \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} = \text{sign } J_{ii}(t) = \nu_i \nu_{i-1} \text{sign } (\gamma \gamma_i),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left(\frac{\pi_\omega(t) J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} \right)'}{\frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[1 + \frac{\pi_\omega(t) J'_i(t)}{\gamma_i J_i(t)} + \frac{\pi_\omega(t) J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} \right] = 0.$$

Обозначим через P_{n-1} матрицу коэффициентов при v_1, \dots, v_{n-1} , стоящих в квадратных скобках первых $n-1$ уравнений системы, а через P_n — матрицу коэффициентов, стоящих в квадратных скобках всех уравнений системы.

Нетрудно проверить, что

$$\det P_{n-1} = (-1)^{i-1} (i-1)! (n-i)! \gamma_i, \quad \det P_n = (-1)^{i-1} (i-1)! (n-i)!$$

и

$$\det [P_{n-1} - \rho E_{n-1}] = (-1)^{i-1} \prod_{k=1}^{i-1} (k + \rho) \times$$

$$\times \left[\prod_{m=1}^{n-i} (m - \rho) - (n-i)! \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{(j-i)!} \prod_{m=1}^{j-i} (m - \rho) - (n-i)! \sigma_i \right],$$

где E_{n-1} — единичная матрица размерности $(n-1) \times (n-1)$.

Из вида характеристического многочлена матрицы P_{n-1} ясно, что он имеет $i-1$ корней вида $\rho_k = -k$ ($k = \overline{1, i-1}$), а остальные его $n-i$ корней являются корнями алгебраического уравнения (11), которое в силу условий теоремы не имеет корней с нулевой действительной частью. Поэтому

матрица P_{n-1} не имеет собственных значений с нулевой действительной частью.

Тем самым показано, что для системы дифференциальных уравнений (38) выполнены все условия теоремы 2.6 из работы [8]. Согласно этой теореме у системы (38) существует хотя бы одно решение $(v_j)_{j=1}^n : [t_1, \omega[\rightarrow \mathbb{R}^n$ ($t_1 \in [t_0, \omega[$), стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$. Более того, если l - число корней (с учетом кратных) уравнения (11) с отрицательной действительной частью, то согласно этой же теореме в случае $\omega = +\infty$ у данной системы существует $l + i$ - параметрическое семейство таких решений при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ и $l + i - 1$ - параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$, а в случае $\omega < +\infty$ - существует $n - i - l + 1$ -параметрическое семейство в случае выполнения неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ и $n - i - l$ - параметрическое в случае, когда $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$.

Каждому такому решению системы (38) соответствует в силу замен (34) и первого из условий (23) решение $y : [t_1, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ ($t_1 \in [a, \omega[$) уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (17) - (19). Используя эти представления и условия (12) - (17) нетрудно убедиться в том, что оно является $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ - решением. Теорема полностью доказана.

Полученное в теореме асимптотическое представление для $i - 1$ -й производной $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решения записано в неявном виде. В следующей теореме приведены дополнительные условия, при выполнении которых асимптотические представления для любого такого решения и его производных до порядка $n - 1$ включительно записываются в явном виде.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и, кроме того, функция L_{i-1} удовлетворяет условию S_0 .

Тогда для каждого $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решения дифференциального уравнения (1) (в случае их существования) имеют место при $t \uparrow \omega$ наряду с асимптотическими представлениями (17), (18) следующее представление

$$y^{(i-1)}(t) = \nu_{i-1} |\gamma_i C_i|^{\frac{1}{\gamma}} \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma}} \left(\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} \right) [1 + o(1)]. \quad (39)$$

Доказательство. Пусть $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0} - P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решение дифференциального уравнения (1). Тогда согласно необходимости теоремы 1 выполняются условия (12)–(16), (25) и для данного решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (17)–(19). В силу условия (25)

$$\ln |y^{(i-1)}(t)| = [1 + o(1)] \ln |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому, учитывая, что функция L_{i-1} удовлетворяет условию S_0 , получим

$$\begin{aligned} L_{i-1}(y^{(i-1)}(t)) &= L_{i-1}\left(\nu_{i-1}e^{[1+o(1)]\ln|J_{ii}(t)|}\right) = \\ &= L_{i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}\right)[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Принимая во внимание это представление, запишем (19) в виде

$$|y^{(i-1)}(t)|^\gamma = |\gamma_i C_i| \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\gamma_i} L_{i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}\right)[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

откуда следует (39). Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 не охватывают случай, когда $i = n-1$. В этом случае при некотором дополнительном ограничении аналогично данным двум теоремам могут доказаны следующие две теоремы.

Теорема 3. Пусть $n \geq 2$, функция f удовлетворяет условию $(RN)_0$, выполняется неравенство $\gamma\gamma_{n-1} \neq 0$ и функции L_j при всех $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-2\}$ удовлетворяют условию S_0 . Тогда для существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решений, для которых существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$, необходимо и достаточно, чтобы соблюдались неравенства

$$\begin{aligned} \nu_j \nu_{j-1} (n-j-1) \pi_\omega(t) &> 0 \quad \text{при всех } j \in \{1, \dots, n-2\}, \\ \nu_{n-1} \nu_{n-2} \gamma \gamma_{n-1} J_{n-1n-1}(t) &> 0, \quad \nu_{n-1} \alpha_0 \gamma_{n-1} J_{n-1}(t) > 0 \end{aligned}$$

в некоторой левой окрестности ω , а также условия

$$\nu_{j-1} \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} = Y_{j-1} \quad \text{при всех } j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{n-1\},$$

$$\nu_{n-2} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{n-1n-1}(t)|^{\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma}} = Y_{n-2},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{n-1}(t)}{J_{n-1}(t)} = -\gamma_{n-1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{n-1n-1}(t)}{J_{n-1n-1}(t)} = 0.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} y^{(n-2)}(t)[1+o(1)] \quad (j = 1, \dots, n-2), \quad (40)$$

$$y^{(n-1)}(t) = \frac{\gamma_{n-1} J'_{n-1n-1}(t)}{\gamma J_{n-1n-1}(t)} y^{(n-2)}(t)[1+o(1)], \quad (41)$$

$$\frac{|y^{(n-2)}(t)|^\gamma}{L_{n-2}(y^{(n-2)}(t))} = |\gamma_{n-1}C_{n-1}| \left| \frac{\gamma}{\gamma_{n-1}} J_{n-1n-1}(t) \right|^{\gamma_{n-1}} [1 + o(1)],$$

причем таких решений в случае $\omega = +\infty$ существует n -параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma < 0$ и $n-1$ -параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma > 0$, а в случае $\omega < +\infty$ - существует однопараметрическое семейство таких решений при выполнении неравенства $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma < 0$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3 и, кроме того, функция L_{n-2} удовлетворяет условию S_0 . Тогда для каждого $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решения дифференциального уравнения (1) (в случае их существования) имеют место при $t \uparrow \omega$ наряду с асимптотическими представлениями (40), (41) следующее представление

$$y^{(n-2)}(t) = \nu_{n-2} |\gamma_{n-1}C_{n-1}|^{\frac{1}{\gamma}} \times \left| \frac{\gamma}{\gamma_{n-1}} J_{n-1n-1}(t) \right|^{\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma}} L_{n-2}^{\frac{1}{\gamma}} \left(\nu_{n-2} |J_{n-1n-1}(t)|^{\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma}} \right) [1 + o(1)].$$

3. ПРИМЕР ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В качестве примера, иллюстрирующего полученные результаты, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^l \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)})}{\sum_{k=l+1}^m \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)})}, \quad (42)$$

в котором $\alpha_k \in \{-1, 1\}$, $p_k : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($\omega \leq +\infty$) - непрерывная функция, $\varphi_{kj} : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ - непрерывная и правильно меняющаяся при $y^j \rightarrow Y_j$ функция порядка σ_{kj} , Y_j равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_j} - некоторая односторонняя окрестность Y_j , $k = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Допустим, что при $i \in \{1, \dots, n-1\}$ для некоторых $s \in \{1, \dots, l\}$ и $r \in \{l+1, \dots, m\}$ выполняются при $k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}$ неравенства

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(i-j-1) \quad (43)$$

и при $k \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{r\}$ неравенства

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_r(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} (\sigma_{rj} - \sigma_{kj})(i-j-1), \quad (44)$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Покажем, что при выполнении этих условий правая часть уравнения (42) удовлетворяет условию $RN_{\frac{n-i-1}{n-i}}$.

Пусть $z_j : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_j}$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) – произвольные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (8). В силу этих условий

$$\ln |z_j(t)| = [i - j - 1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Учитывая эти асимптотические соотношения, а также представления

$$\varphi_{kj}(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(y^{(j)}) \quad (k = \overline{1, m}; j = \overline{0, n-1}),$$

где $L_{kj}(y^{(j)}) : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ – непрерывная медленно меняющаяся функция при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$, и свойство \mathcal{M}_2 медленно меняющихся функций (из введения), будем при $k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}$ иметь

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} \right) &= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} (\ln \varphi_{kj}(z_j(t)) - \ln \varphi_{sj}(z_j(t))) = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} ((\sigma_{kj} - \sigma_{sj}) \ln |z_j(t)| + \ln L_{kj}(z_j(t)) - \ln L_{sj}(z_j(t))) = \ln p_k(t) - \\ &- \ln p_s(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \ln |z_j(t)| \left(\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + \frac{\ln L_{kj}(z_j(t))}{\ln |z_j(t)|} - \frac{\ln L_{sj}(z_j(t))}{\ln |z_j(t)|} \right) = \\ &= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \ln |\pi_\omega(t)| \left(\sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(i - j - 1) + o(1) \right) = \\ &= |\ln |\pi_\omega(t)|| \left(\frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} - \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} (\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(i - j - 1) + o(1) \right) \end{aligned}$$

при $t \uparrow \omega$. Отсюда в силу выполнения условия (43) следует, что выражение,

стоящее слева, стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$ и поэтому

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} \right) = 0 \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}.$$

Аналогично, с использованием условия (44) устанавливаем, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_r(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{rj}(z_j(t))} \right) = 0 \quad \text{при всех } k \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{r\}.$$

В силу этих предельных соотношений

$$\frac{\sum_{k=1}^l \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{\sum_{k=l+1}^m \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))} = \frac{\alpha_s p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))}{\alpha_r p_r(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{rj}(z_j(t))} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

т.е. имеет место асимптотическое соотношение (9), в котором

$$\alpha_0 = \alpha_s \alpha_r, \quad p(t) = \frac{p_s(t)}{p_r(t)}, \quad \varphi_j(z_j(t)) = \frac{\varphi_{sj}(z_j(t))}{\varphi_{rj}(z_j(t))} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1),$$

причем здесь φ_j – непрерывная правильно меняющаяся при $z_j \rightarrow Y_j$ функция порядка $\sigma_j = \sigma_{sj} - \sigma_{rj}$ и ее медленно меняющаяся составляющая L_j равна отношению медленно меняющихся составляющих L_{sj} и L_{rj} функций φ_{sj} и φ_{rj} .

Следовательно, правая часть уравнения (42) удовлетворяет условию $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$. Поэтому в случае, когда при некоторых $s \in \{1, \dots, l\}$, $r \in \{l+1, \dots, m\}$ выполняются условия (43), (44) к уравнению (42) применимы теоремы 1–4 с заменой в условиях и утверждениях этих теорем постоянных α_0 , σ_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) и функций p , φ_j , L_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) на указанные выше постоянные и функции.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье впервые установлены условия существования и асимптотические представления $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решений для дифференциального уравнения вида (1) при $i = \overline{1, n-1}$. Эти результаты

существенно дополняют результаты, полученные ранее в работах [3] и [4]. В частности, результаты из [3] и [4] не охватывают уравнения вида (42), которые рассмотрены здесь в качестве примера, допускающего применение теорем 1–4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Дисс.... д. физ.-мат. наук. — Киев, 1997. — 295 с.
2. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференциальные уравнения. — 2011. — т. 47, № 5. — С. 628–650.
3. *Evtukhov V. M., Klopot A. M.* Asymptotic Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations of n -th Order with Regularly Varying Nonlinearities // Mem. Differential Equations Math. Phys. — 2014. — v. 61. — P. 37–61.
4. *Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. — 2013. — т.18, вип. 3(19). — С. 16–34.
5. *Кусиж Л. И.* Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Вісник Одеського нац. ун-ту. — 2012. — т.17. — Вип. 1–2(13–14). — Матем. і механ. — С. 80–97.
6. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука. — 1985. — 144с.
7. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. — Cambridge university press. Cambridge. — 1987. — 494p.
8. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. Мат. Ж. — 2010. — Т.62, №1. — С. 52–80.

Дрожжина А. В.

АСИМПТОТИКА ДЕЯКИХ ТИПОВ ОДНОГО КЛАСУ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Резюме

Для диференціального рівняння $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$, де $f : [a, \omega] \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_i дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_i} — деякий односторонній окіл Y_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, досліджуються при деяких обмеженнях на функцію f питання про існування, асимптотику і кількість $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -розв'язків для всіх $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Такі розв'язки відносяться до особливих випадків класу $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв'язків, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, який був уведений в роботах В. М. Евтухова, що присвячені диференціальним рівнянням типу Емдена-Фаулера n -го порядку. Дані особливі випадки потребують окремого їх розгляду у зв'язку зі специфічними апріорними асимптотичними властивостями таких розв'язків. Дослідження поставлених питань здійснюється при припущенні, що диференціальне рівняння є у деякому сенсі асимптотично близьким до двочленого диференціального рівняння з правильно змінними нелінійностями.

Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння, правильно змінні функції, асимптотика розв'язків, $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв'язки.

Drozhzhina A. V.

ASYMPTOTIC OF SOME TYPES OF ONE CLASS OF SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDERS

Summary

For the differential equation $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$, where $f : [a, \omega] \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_i equals to zero or to $\pm\infty$, Δ_{Y_i} is some one-sided neighborhood of Y_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, questions about the existence, asymptotics and about quantity of $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ — solutions for all $i \in \{1, \dots, n-1\}$ are investigated under certain restrictions on the function f . Such solutions refer to special cases of class of $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -solutions where $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, that was introduced in works of V. M. Evtukhov devoted to the differential equations of Emden-Fowler type of the n -th order. Such special cases require their separate consideration because of their specific a priori asymptotic properties. The study of the formulated problems is carried out under the assumption that the differential equation is in some sense asymptotically close to the two-term differential equation with regularly varying nonlinearities.

Key words: non-linear differential equation, regularly varying functions, asymptotic of solutions, $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -solutions.

REFERENCES

1. Evtuhov V. M. (1997) *Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary differential equations]*. Disc.... d. fiz.-mat. nauk. Kiev, 295 p.
2. Evtuhov V. M., Samoilenko A. M. (2011) *Asimptoticheskoe predstavlenie resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities]*. *Differentsialnyie uravneniya*, Vol. 47, № 5, P. 628–650.

3. Evtukhov V. M., Klopot A. M. (2014) Asymptotic Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations of n -th Order with Regularly Varying Nonlinearities, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, Vol. 61, P. 37–61.
4. Klopot A. M. (2013) Asimptoticheskoe povedenie resheniy neavtonomnykh obyiknovennykh differentsialnykh uravneniy n -go poryadka s pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic behavior of solutions of non-autonomous ordinary differential equations of n -th order with regularly varying nonlinearities]. *Visnik Od. nats. un-ut. Mat. i meh.*, Vol. 18, № 3(19), P. 16–34.
5. Kusiuk L. I. (2012) Priznaki suschestvovaniya odnogo klassa resheniy suschestvenno nelineynykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka [Signs of the existence of one class of solutions of essentially nonlinear differential equations of the second order]. *Visnik Odeskogo nats. un-tu. Matem. i mehan.*, Vol. 17, № 1–2(13–14), P. 80–97.
6. Senata E. (1985) *Pravilno menyayuschiesya funktsii [Correctly Changing Functions]*. M.: Nauka, 144 p.
7. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. (1987) *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 494 p.
8. Evtuhov V. M., Samoilenko A. M. (2010) Usloviya suschestvovaniya ischezayuschih v osoboy tochke resheniy u veschestvennykh neavtonomnykh sistem kvazilineynykh differentsialnykh uravneniy [Conditions for the existence of solutions of quasilinear differential equations that disappear at a singular point in real non-autonomous systems]. *Ukr. Mat. Zh.*, Vol. 62, № 1, P. 52–80.