UDC 517.926

S. A. Shchogolev
Odesa I. I. Mechnikov National University

ПРО ПІДВИЩЕННЯ ПОРЯДКУ МАЛИЗНИ ШВИДКИХ ЗМІННИХ В ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

Доведено теорему про підвищення порядку мализни швидких змінніх в лінійних системах диференціальних рівнянь.
MSC: 34A30, 34C25.
Ключові слова: лінійні диференціальні системи, лінійні перетворення.
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175546.

Вступ. Одною з важливих проблем теорії звичайних диференціальних рівнянь є проблема зведення системи, що досліджується, до більш простого вигляду. У випадку лінійноі системи диференціальних рівнянь це може бути задача зведення даної системи до системи зі сталими коефіцієнтами (проблема звідності), або до системи з трикутною, зокрема, діагональною матрицею коефіцієнтів, жордановою матрицею коєфіцієнтів тощо. Особливий інтерес являють системи з періодичними коефіцієнтами [1,2]. Якщо в коефіцієнтах такої системи коливні доданки в певному сенсі малі порівняно з неколивними, то природно розглянути задачу при півищення мализни коливних доданків [3]. В даній праці ця задача розглядається для лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої мають вигляд $f(t,\theta)\mu(\theta)$, де $f(t,\theta)$ – 2π-періодична по θ і в певному розумінні повільно змінна відносно t, а $\mu(\theta)$ – неперервна мала функція змінної θ.

Позначення. Нехай

$$G = \{t, \varepsilon : t \in [t_0, +\infty), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}.$$

Означення. Скажемо, що функція $f(t,\varepsilon)$ належить до класу $S(m)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, якщо:

1) $f : G \to \mathbb{C}$,
2) $f(t,\varepsilon) \in C^m(G)$ за t,
3) $d^k f(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_k(t,\varepsilon)$ $(0 \le k \le m)$,

$$\|f\|_{S(m)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G} |f_k(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Під повільно змінною функцією розуміємо функцію з класу $S(m)$.

Основні результати

1. Постановка задачі. Розглядається наступна система диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = \left(A_0(t,\varepsilon) + \sum_{s=1}^{r} A_s(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))(\mu(\theta(t,\varepsilon)))^s \right) x, \tag{1}$$

Надійшла 16.04.2019

$x = \mathrm{colon}(\mathrm{x_1}, ..., \mathrm{x_n})$, $A_0(t,\varepsilon)$ – $(N \times N)$-матриця, елементи якої належать до класу $S(m)$. Функція $\theta(t,\varepsilon)$ має вигляд:

$$\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau, \tag{2}$$

$\varphi \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(t,\varepsilon) \in S(m)$, $\inf\limits_G \varphi(t,\varepsilon) = \varphi_0 > 0$. Елементи матриць $A_s(t,\varepsilon,\theta)$ належать до класу $S(m)$ відносно t,ε, неперервні та 2π-періодичні за $\theta \in [0,+\infty)$. Функція $\mu(\theta)$ неперервна на $[0,+\infty)$.

При малій функції $\mu(\theta)$ система (1) близька до системи з повільно змінними коефіцієнтами:

$$\frac{dx_0}{dt} = A_0(t,\varepsilon)x_0. \tag{3}$$

Доданки, що залежать від θ, в системі (1) мають порядок $O(\mu)$. Вивчається задача про зведення системи (1) до такого вигляду, де доданки, що залежать від θ, мають порядок або $O(\mu^{r+1})$ або $O(\varepsilon)$. Якщо параметр ε достатньо малий, то перетворена система буде ближчою до системи з повільно змінними коефіцієнтами, ніж система (1).

У роботах [4,5] аналогічна задача розглядалася для випадку періодичних за t (тобто $\theta(t) = t$) матриць A_s, сталої матриці A_0 та функції $\mu(t)$ експоненціального або степеневого типу.

У випадку, коли елементи матриць $A_s(t,\varepsilon,\theta)$ зображувані абсолютно та рівномірно збіжними рядами Фур'є вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)), \tag{4}$$

де $f_n(t,\varepsilon) \in S(m)$, а $\mu(\theta) = \mu^* = \mathrm{const}$, відповідна задача розглядалася автором у роботах [6,7]. У цьому випадку було показано, що елементи перетворюючої матриці також зображувані у вигляді рядів (4).

У даній роботі функція $\mu(\theta)$ є довільною неперервною функцією.

2. Основний результат.

Теорема. *Нехай система (1) задовольняє наступні умови:*

1) *власні значення* $\lambda_j(t,\varepsilon)$ $(j = \overline{1,N})$ *матриці* $A_0(t,\varepsilon)$ *такі, що*

$$\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon) = in_{jk}\varphi(t,\varepsilon),\ n_{jk} \in \mathbb{Z},$$

де функцію $\varphi(t,\varepsilon)$ *визначено умовою (2);*

2) *існує матриця* $L(t,\varepsilon)$, *елементи якої належать до класу* $S(m)$, *така, що* $\inf\limits_G |\det L(t,\varepsilon)| > 0$, *и*

$$L^{-1}(t,\varepsilon)A_0(t,\varepsilon)L(t,\varepsilon) = \Lambda(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}[\lambda_1(\mathrm{t},\varepsilon), ..., \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{t},\varepsilon)];$$

3) *функція* $\mu(\theta)$ *така, що*

$$\mu(\theta) \in \mathbb{R},\ \sup_{[0,+\infty)} \mu(\theta) \le \mu_0 < +\infty,\ \int\limits_0^{+\infty} \mu^k(\theta)d\theta \le \mu_0 < +\infty\ (k = \overline{1.r}).$$

Тоді для достатньо малих значень μ_0 існує перетворення вигляду

$$x = \Phi(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))y, \tag{5}$$

де елементи матриці $\Phi(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$ обмежені на $G \times [t_0, +\infty)$, що приводить систему (1) до вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = (\Lambda(t, \varepsilon) + \varepsilon V(t, \varepsilon, \theta) + W(t, \varepsilon, \theta))\, y, \tag{6}$$

де елементи матриць $V(t, \varepsilon, \theta)$ та $W(t, \varepsilon, \theta)$ обмежені при $G \times [t_0, +\infty)$, причому елементи матриці $W(t, \varepsilon, \theta)$ мають порядок μ_0^{r+1}.

Доведення. Здійснивши в системі (1) підстановку

$$x = L(t, \varepsilon)x^{(1)}, \tag{7}$$

де $x^{(1)}$ – новий невідомий N-вимірний вектор, зведемо систему (1) до вигляду:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = \left(\Lambda(t, \varepsilon) + \varepsilon H(t, \varepsilon) + \sum_{s=1}^{r} B_s(t, \varepsilon, \theta)(\mu(\theta))^s\right) x^{(1)}, \tag{8}$$

де

$$H(t, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} L^{-1}(t, \varepsilon) \frac{dL(t, \varepsilon)}{dt}, \; B_s(t, \varepsilon, \theta) = L^{-1}(t, \varepsilon) A_s(t, \varepsilon, \theta) L(t, \varepsilon). \tag{9}$$

Елементи матриці $H(t, \varepsilon)$ належать до класу $S(m-1)$.

Перетворення, яке приводить систему (8) до вигляду (6), будемо шукати у вигляді:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = \left(E + \sum_{s+1}^{r} Q_s(t, \varepsilon, \theta)\right) y, \tag{10}$$

де матриці $Q_s(t, \varepsilon, \theta)$ $(s = \overline{1, r})$ визначаються з наступного ланцюжка диференціальних рівнянь:

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} = \Lambda(t, \varepsilon) Q_1 - Q_1 \Lambda(t, \varepsilon) + B_1(t, \varepsilon, \theta)\mu(\theta), \tag{11}$$

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} = \Lambda(t, \varepsilon) Q_2 - Q_2 \Lambda(t, \varepsilon) + B_2(t, \varepsilon, \theta)(\mu(\theta))^2 + B_1(t, \varepsilon, \theta) Q_1 t, \varepsilon, \theta)\mu(\theta), \tag{12}$$

...

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{\partial Q_r}{\partial \theta} = \Lambda(t, \varepsilon) Q_r - Q_r \Lambda(t, \varepsilon) + B_r(t, \varepsilon, \theta)(\mu(\theta))^r +$$
$$+ \sum_{s=1}^{r-1} B_s(t, \varepsilon, \theta) Q_{r-s}(t, \varepsilon, \theta)(\mu(\theta))^s. \tag{13}$$

Матриці $V(t, \varepsilon, \theta)$, $W(t, \varepsilon, \theta)$ визначимо з рівнянь:

$$\left(E + \sum_{s=1}^{r} Q_s(t, \varepsilon, \theta)\right) V = H(t, \varepsilon) \left(E + \sum_{s=1}^{r} Q_s(t, \varepsilon, \theta)\right) - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial Q_s(t, \varepsilon, \theta)}{dt}, \tag{14}$$

$$\left(E+\sum_{s=1}^{r}Q_s(t,\varepsilon,\theta)\right)W=\sum_{j=1}^{r}\sum_{s=j}^{r}B_s(t,\varepsilon,\theta)Q_{r+j-s}(t,\varepsilon,\theta)(\mu(\theta))^s. \tag{15}$$

Розглянемо рівняння (11). Нехай $Q_s=(q_{jk}^{(s)})_{j,k=\overline{1,N}}$, $B_s=(b_{jk}^{(s)})_{j,k=\overline{1,N}}$, $s=\overline{1,r}$. Тоді з урахуванням умови 1) теореми, рівняння (11) еквівалентно сукупності скалярних рівнянь:

$$\frac{\partial q_{jk}^{(1)}}{\partial\theta}=in_{jk}q_{jk}^{(1)}+\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\ \mu(\theta)b_{jk}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta),\ j,k=\overline{1,N}. \tag{16}$$

Для кожного з рівнянь (16) розглянемо такий його розв'язок:

$$q_{jk}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)=\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in_{jk}\theta}\int_0^\theta\mu(\vartheta)b_{jk}^{(1)}(t,\varepsilon,\vartheta)e^{-in_{jk}\vartheta}d\vartheta,\ (j,k=\overline{1,N}). \tag{17}$$

З того, що елементи матриць $A_s(t,\varepsilon,\theta)$ в системі (1) належать до класу $S(m)$ відносно t,ε, і неперервні та 2π-періодичні за $\theta\in[0,+\infty)$, і з рівності (9) випливає, що аналогічні властивості мають і елементи матриць $B_s(t,\varepsilon,\theta)$, отже

$$\sup_{G\times[0,+\infty)}|b_{jk}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)|=c_{jk}^{(1)}<+\infty,\ j,k=\overline{1,N}.$$

З (17) та умови 3) теореми тоді маємо:

$$\sup_{G\times[0,+\infty)}\left|q_{jk}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\right|\leq\frac{1}{\varphi_0}\ \mu_0\ c_{jk}^{(1)},\ j,k=\overline{1,N}. \tag{18}$$

Тепер розглянемо рівняння (12), і візьмемо такий його розв'язок:

$$q_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)=$$

$$=\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in_{jk}\theta}\int_0^\theta\left(\mu(\vartheta)^2b_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\vartheta)+\mu(\vartheta)\sum_{l=1}^{N}b_{jl}^{(1)}(t,\varepsilon,\vartheta)q_{lk}^{(1)}(t,\varepsilon,\vartheta)\right)e^{-in_{jk}\vartheta}d\vartheta,$$

$$j,k=\overline{1,N}.$$

Маємо, аналогічно попередньому:

$$\sup_{G\times[0,+\infty)}\left|b_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\right|=c_{jk}^{(2)}<+\infty,\ j,k=\overline{1,N}.$$

Тоді

$$\sup_{G\times[0,+\infty)}\left|q_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\right|\leq\frac{\mu_0^2}{\varphi_0}\ c_{jk}^{(2)}+\frac{\mu_0^2}{\varphi_0^2}\sum_{l=1}^{N}c_{jl}^{(1)}c_{lk}^{(1)},\ j,k=\overline{1,N}$$

тобто $q_{jk}^{(2)}$ обмежені при $t\in G\times[0,+\infty)$.

І нарешті для $q_{jk}^{(r)}(t,\varepsilon,\theta)$ визначимо:

$$q_{jk}^{(r)}(t,\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in_{jk}\theta}\times$$

$$\times\int\limits_0^\theta \left((\mu(\vartheta))^r b_{jk}^{(r)}(t,\varepsilon,\vartheta) + \sum_{s=1}^{r-1}(\mu(\vartheta))^s \sum_{l=1}^N b_{jl}^{(s)}(t,\varepsilon,\vartheta) q_{lk}^{(r-k)}(t,\varepsilon,\vartheta)\right) e^{-in_{jk}\vartheta} d\vartheta,$$

$$j,k=\overline{1,N}.$$

Всі функції $q_{jk}^{(s)}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j,k=\overline{1,N},\ s=\overline{1,r-1})$ обмежені при $t\in G\times[t_0,+\infty)$. Всі функції $b_{jk}^{(s)}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j,k=\overline{1,N},\ s=\overline{1,r})$ також обмежені при $t\in G\times[t_0,+\infty)$. Отже, умова 3) теореми гарантує існування обмежених розв'язків $q_{jk}^{(r)}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j,k=\overline{1,N})$, причому ці розв'язки мають порядок μ_0^r. А при малих μ_0 ця ж умова гарантує невиродженість перетворення (10). Матриця $V(t,\varepsilon,\theta)$ однозначно визначається з рівняння (14), а матриця $W(t,\varepsilon,\theta)$ однозначно визначається з рівняння (15), причому, як нескладно бачити, порядок елементів матриці $W(t,\varepsilon,\theta)$ не нижче, ніж μ_0^{r+1}.

Теорему доведено.

Висновки. Доведено теорему про підвищення мализни швидких змінніх в лінійних системах диференціальних рівнянь.

1. **Якубович В. А., Старжинский В. М.**, 1972, Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. М., Наука, 720 с.
2. **Штокало И. З.** 1960, Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. К., Изд-во АН УССР, 76 с.
3. **Стрижак Т. Г.** 1984, Асимптотический метод нормализации. К., Вища школа, 280 с.
4. **Коняев Ю. А., Маслов Д. А.** 2017, Анализ неавтономных систем дифференциальных уравнений с экспоненциально-периодической матрицей. Известия вузов. Математика, № 10, с. 62–69.
5. **Коняев Ю. А., Мартыненко Ю. Г., Панфилов Н. Г.** 2004, Асимптотический аналог теорем о приводоимости некоторых классов неавтономных линейных систем. Дифференц. уравн., Т. 40, № 3. с. 330–333.
6. **Shchogolev, S. A.** 2014, On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh., V.19, Is. 1(21). – P. 81–91.
7. **Shchogolev, S. A.** 2014, On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients in resonance case. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh., V.19, Is. 3(23). – P. 48–56.

Щёголев С. А.
О повышении порядка малости быстрых переменных в линейных дифференциальных системах

Резюме

Доказана теорема о повышении порядка малости быстрых переменных в линейных системах дифферециальных уравнений.
Ключевые слова: линейные дифференциальные системы, линейные преобразования.

Shchogolev S. A.
On increasing the order of smallness of fast variables in linear differential systems

Summary

A theorem on increasing the order of smallness of fast variables in linear systems of differential equations are proved.
Key words: linear differential systems, linear transformation.

1. **Yakubovich, V. A., and Starzhinskiy, V. M.** 1972, *Lineynyie differentsialnyie uravneniya s periodicheskimi koefficientami i ih prilozheniya* [The linear differential equations with periodic coefficients and their applications], M.: Nauka, 720 p.
2. **Shtokalo, I. Z.** 1960, *Lineynyie differentsialnyie uravneniya s peremennymi koefficientami* [The linear differential equations with variable coefficients], K.: Izd-vo AN USSR, 76 p.
3. **Strizhak, T. G.** 1984, *Asimptoticheskij metod normalizcii* [Asymptotic Normalization Method], K.: Vishcha shkola, 280 p.
4. **Konyaev, Yu. A. and Maslov, D. A.** 2017, *Analys neavtonomnuch sistem differentsialnuih uravneniy s eksponencialno periodicheskoy matricey* [Analysis of nonautonomous systems of differential equations with exponentially periodic matrix], *Izvestia vuzov. Mathematica*, №10, c. 62—69.
5. **Konyaev, Yu. A. and Martynenko, Yu. G. and Panfilov, N. G.** 2004, *Asimptoticheskyi analog teorem o privodimosti nekotoryh klassov neavtonomnyh lineynuh sistem* [Asymptotic analogue of theorems on the reducibility of certain classes of nonautonomous linear systems], *Differehtsialnye uravnenia*, T. 40, № 3, p. 330—333.
6. **Shchogolev, S. A.** 2014, *On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients*, *Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.*, V.19, Is. 1(21). – P. 81–91.
7. **Shchogolev, S. A.** 2014, *On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients in resonance case*, *Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.*, V.19, Is. 3(23). – P. 48–56.