Дослiдження в математицi i механiцi. – 2019. – Т. 24, вип. 1(33). – С. 53–58

УДК 517.5

Р. В. Шанин
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО ГЕЛЬДЕРА

Пусть $r \neq 0$ и E измеримое множество, $|E| > 0$. Для неотрицательной функции $f \in L^r(E)$ средним порядка r называется величина $M_r(f, E) := (|E|^{-1} \int_E f^r(x)\,dx)^{1/r}$. В работе изучается класс $RH'_{1,2,1}(R_0)$ функций f, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера, $\langle f \rangle = \sup_{R \subset R_0}[M_2(f, R) - M(f, R)] < +\infty$. Получена оценка скорости убывания равноизмеримых перестановок функций из этого класса и построен пример, показывающий, что полученная оценка асимптотически точная. Этот результат является аналогом хорошо известной теоремы Джона–Ниренберга о пространствах BMO. Также получены оценки равноизмеримых перестановок функций из $RH'_{1,2,1}$ с заданной скорость убывания к нулю разности средних.
MSC: 42B35, 46E30.
Ключевые слова: обратное неравенство Гельдера, равноизмермая перестановка функции.
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175545.

Введение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — произвольное измеримое множество, $0 < |E| < +\infty$, и пусть $r \neq 0$. Напомним, что для неотрицательной функции f число

$$M_r(f, E) := \left(\frac{1}{|E|}\int_E f^r(x)\,dx\right)^{1/r}$$

называется средним r-ого порядка функции f на множестве E. Если $r = 1$, то индекс будем опускать. Соотношение между степенными средними

$$M_r(f, E) \leq M_s(f, E),$$

где $r < s$, $rs \neq 0$, является простым следствием неравенства Гельдера и справедливо для всех функций. Обратные к нему, в том или ином смысле, соотношения возникают в разных разделах анализа. Так, при исследовании весовых пространств, как правило, возникают так называемые классы весовых функций Макенхаупта [4], а в теории квазиконформных отображений — классы Геринга [1].

Пусть зафиксирован сегмент $R_0 = [a_1, b_1; \ldots; a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$. Следуя обозначениям работы [5], для $r < s$, $rs \neq 0$, обозначим через $RH'_{r,s,k}(R_0)$ класс всех функций $f \in (L^s \cap L^r)(R_0)$, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера

$$\langle f \rangle = \langle f \rangle_{RH'_{r,s,k}(R_0)} := \sup_{R \subset R_0} \operatorname{sign} k \cdot [M_s^k(f, R) - M_r^k(f, R)] < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем сегментам $R \subset R_0$, а в случае $k < 0$ по таким сегментам, для которых $M_r(f, R) \neq 0$. Класс $RH'_{1,2,2}$ совпадает с подмножеством неотрицательных функций из пространства BMO функций с ограниченным средним колебанием впервые введенных в работе [3]. В работах [5, 6] были

Получена 10.06.2019

получены оценки равноизмеримых перестановок функций из классов $RH'_{r,s,k}$. Подобного сорта оценки играют важную роль при изучении различных функциональных пространств. В частности, в этой работе мы получаем основной результат благодаря полученным ранее оценкам перестановок.

В данной работе получена оценка скорости убывания равноизмеримых перестановок функций для класса $RH'_{1,2,1}$ (следствие 2) и изучены свойства функций, разности средних которых при стремлении к 0 мер сегментов убывают из заданной скоростью (теорема 2 и следствие 1).

Основные результаты

1. Определения и вспомогательные результаты. Для функции $f \in L^2(R_0)$ обозначим

$$\nu_f(t) := \sup_{|R| \le t} \big(M_2(f,R) - M(f,R)\big)^{1/2},$$

где верхняя грань берется по всем сегментам $R \subseteq R_0$ с мерой $|R| \le t$.

Пусть $r \ne 0$. Для функции $\varphi \in L^r([\alpha,\beta])$ обозначим $M_r\varphi(t) := M_r(\varphi,[\alpha,t])$, где $t \in (\alpha,\beta]$ и для функции $\varphi \in L^2([\alpha,\beta])$ обозначим

$$\bar\nu_\varphi(t) := \sup_{\tau \in [\alpha,t]} \big(M_2 f(\tau) - M f(\tau)\big)^{1/2}, \quad t \in (\alpha,\beta].$$

Легко видеть, что функции ν и $\bar\nu$ не убывают и, если ν ограничена, то функция $f \in RH'_{1,2,1}(R_0)$.

Напомним определение равноизмеримой перестановки функции (см., например, [2, с. 276]). Равноизмеримой невозрастающей непрерывной справа перестановкой функции f, измеримой на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}^d$ называется

$$f^*(t) := \sup\{y > 0 \colon |\{x \in E \colon |f(x)| > y\}| > t\}, \quad 0 < t < |E|.$$

Следующая лемма— это переформулированная в частном случае лемма 8 из [6].

Лемма 1. [6] *Пусть сегмент $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, функция $f \in L^2(R_0)$. Тогда для любого интервала $J = (0,\delta) \subseteq (0,|R_0|)$ найдется такой набор дизъюнктивных сегментов $R_n \subset R_0$, $n \ge 1$, что $|R_n| \le \delta$ и $M(f,R_n) = M(f^*,J)$ для всех $n \ge 1$ и*

$$M_2(f^*,J) \le \sup_{n \ge 1} M_2(f,R_n).$$

Из этой леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть сегмент $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, функция $f \in L^2(R_0)$. Тогда*

$$\bar\nu_{f^*}(t) \le \nu_f(t), \quad t \in (0,|R_0|]$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\nu(f,t) < \infty$. Зафиксируем произвольное τ, $0 < \tau \le t$. Тогда, по лемме 1, для интервала $J = (0,\tau) \subseteq$

$(0, |R_0|)$ найдется такой набор дизъюнктивных сегментов $R_n \subset R_0$, что $|R_n| \le \tau$ и $M(f, R_n) = M(f^*, J)$ для всех $n \ge 1$ и

$$\begin{aligned} M_2 f^*(\tau) - M f^*(\tau) &= M_2(f^*, J) - M(f^*, J) \\ &\le \sup_{n\ge1}(M_2(f, R_n) - M(f, R_n)) \le \nu_f^2(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\bar{\nu}^2_{f^*}(t) = \sup_{\tau\in[0,t]} (M_2 f^*(\tau) - M f^*(\tau)) \le \nu_f^2(t).$$

Теорема доказана.

Следующая лемма позволяет оценивать скорость изменения $M\varphi(t)$ для невозрастающей функции. На применении этой леммы базируется доказательство основного результата этой работы.

Лемма 2. *Пусть невозрастающая функция $\varphi \in L([0, \beta])$ и пусть $a > 1$. Тогда*

$$0 \le M\varphi(t/a) - M\varphi(t) \le \frac{a}{2}\big(M_2^2\varphi(t) - M^2\varphi(t)\big)^{1/2}.$$

Доказательство. Зафиксируем $t \in (0, \beta]$ и обозначим

$$a_t = \max\{x \in [0, \beta] \colon \varphi(x) > M\varphi(t)\}.$$

Тогда, применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} M\varphi(t/a) - M\varphi(t) &= \frac{1}{t/a}\int_0^{t/a}(\varphi(x) - M\varphi(t))\,dx \le \frac{a}{t}\int_0^{a_t}(\varphi(x) - M\varphi(t))\,dx \\ &= \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{t}\int_0^t |\varphi(x) - M\varphi\,(t)\,|\,dx \\ &\le \frac{a}{2}\left(\frac{1}{t}\int_0^t(\varphi(x) - M\varphi\,(t))^2\,dx\right)^{1/2} = \frac{a}{2}\big(M_2^2\varphi(t) - M^2\varphi(t)\big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

2. Основной результат.

Теорема 2. *Пусть неотрицательная, невозрастающая функция φ задана на отрезке $[0, \beta]$. Тогда, если $\bar{\nu}_\varphi(\beta) < \infty$, то*

$$M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) \le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\int_t^\beta \frac{\bar{\nu}_\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau, \quad t \in (0, \beta/2] \tag{1}$$

и

$$M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) \le \bar{\nu}_\varphi(\beta), \quad t \in (\beta/2, \beta]. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $M^{1/2}\varphi(t) \le \bar\nu_\varphi(t)$ для некоторого $t \in (0,\beta]$. Если $t \in (0,\beta/2]$, то, учитывая, что функция $\bar\nu_\varphi(t)$ не убывает, получаем

$$\begin{aligned}M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) &\le M^{1/2}\varphi(t) \le \bar\nu_\varphi(t)\\ &\le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\bar\nu_\varphi(t)\int_t^\beta \frac{d\tau}{\tau} \le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\int_t^\beta \frac{\bar\nu_\varphi(\tau)}{\tau}d\tau.\end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (1) выполнено. Если $t \in (\beta/2,\beta]$, то

$$M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) \le M^{1/2}\varphi(t) \le \bar\nu_\varphi(t) \le \bar\nu_\varphi(\beta)$$

и неравенство (2) выполнено.

Пусть $M^{1/2}\varphi(t) > \bar\nu_\varphi(t)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\big(M_2\varphi(t) + M\varphi(t)\big)^{1/2} &= \big(M_2\varphi(t) - M\varphi(t) + 2M\varphi(t)\big)^{1/2}\\ &\le \big(\bar\nu_\varphi^2(t) + 2M\varphi(t)\big)^{1/2} < \sqrt{3}M^{1/2}\varphi(t).\end{aligned}$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned}M^{1/2}\varphi(t/2) - M^{1/2}\varphi(t) &= \frac{M\varphi(t/2) - M\varphi(t)}{M^{1/2}\varphi(t/2) + M^{1/2}\varphi(t)} \le \frac{\big(M_2^2\varphi(t) - M^2\varphi(t)\big)^{1/2}}{M^{1/2}\varphi(t/2) + M^{1/2}\varphi(t)}\\ &= \frac{\big(M_2\varphi(t) - M\varphi(t)\big)^{1/2}\big(M_2\varphi(t) + M\varphi(t)\big)^{1/2}}{M^{1/2}\varphi(t/2) + M^{1/2}\varphi(t)}\\ &\le \frac{\big(M_2\varphi(t) + M\varphi(t)\big)^{1/2}}{M^{1/2}\varphi(t/2) + M^{1/2}\varphi(t)}\bar\nu_\varphi(t) \le \frac{\sqrt{3}}{2}\bar\nu_\varphi(t).\end{aligned}$$

Если $t \in (\beta/2,\beta]$, то, учитывая, что $M^{1/2}\varphi(t)$ не возрастает, получаем

$$M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) \le M^{1/2}\varphi(\beta/2) - M^{1/2}\varphi(\beta) \le \bar\nu_\varphi(\beta).$$

Таким образом, неравенство (2) выполнено. Пусть $t \in (0,\beta/2]$. Тогда существует такое натуральное k, что $\beta\, 2^{-k-1} \le t \le \beta\, 2^{-k}$. Следовательно, учитывая, что $M\varphi(t)$ не возрастает, мы имеем

$$\begin{aligned}M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) &\le M^{1/2}\varphi\left(\frac{\beta}{2^{k+1}}\right) - M^{1/2}\varphi(\beta)\\ &= \sum_{i=0}^{k}\left(M^{1/2}\varphi\left(\frac{\beta}{2^{i+1}}\right) - M^{1/2}\varphi\left(\frac{\beta}{2^{i}}\right)\right)\\ &\le \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{i=0}^{k}\bar\nu_\varphi\left(\frac{\beta}{2^i}\right) \le \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\bar\nu_\varphi(\beta) + \sum_{i=1}^{k}\bar\nu_\varphi\left(\frac{\beta}{2^{i-1}}\right)\right)\\ &\le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\int_{\frac{\beta}{2^k}}^{\beta}\frac{\bar\nu_\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau \le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\int_t^\beta \frac{\bar\nu_\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть сегмент* $R_0 \subset \mathbb{R}^d$ *и пусть функция* $f \in L^2(R_0)$. *Тогда*

$$M^{1/2}f^*(t) - M^{1/2}f^*(\beta) \le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\int_t^\beta \frac{\nu_f(\tau)}{\tau}\,d\tau, \quad t \in (0, |R_0|/2]. \tag{3}$$

Доказательство. Утверждение этого следствия следует из теорем 1 и 2, если в теореме 2 положить $\varphi = f^*$.

Следствие 2. *Пусть сегмент* $R_0 \subset \mathbb{R}^d$ *и пусть функция* $f \in RH_{1,2,1}(R_0)$. *Тогда*

$$M^{1/2}f^*(t) - M^{1/2}f^*(\beta) \le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\langle f\rangle \ln\frac{\beta}{t}, \quad t \in (0, |R_0|/2] \tag{4}$$

и эта оценка является точной по порядку.

Доказательство. Неравенство (4) легко получается, если применить неравенство $\nu_f(t) \le \langle f\rangle$ к (3). Осталось показать, что полученная скорость $\ln^2\frac{\beta}{t}$ является точной. Для этого покажем, что функция $f(t) = \ln^2\frac{1}{t} \in RH_{1,2,1}([0,1])$. Имеем,

$$\sup_{0<t\le 1}(M_2 f(t) - Mf(t)) = \sup_{0<t\le 1}\left(\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln^4\frac{1}{x}\,dx\right)^{1/2} - \frac{1}{t}\int_0^t \ln^2\frac{1}{x}\,dx\right) =$$
$$= \sup_{0<t\le 1}\left(\sqrt{\ln^4\frac{1}{t} + 4\ln^3\frac{1}{t} + 12\ln^2\frac{1}{t} + 24\ln\frac{1}{t} + 24} - \left(\ln^2\frac{1}{t} + 2\ln\frac{1}{t} + 2\right)\right) =$$
$$= \sup_{0<t\le 1}\frac{4\ln^2\frac{1}{t} + 16\ln\frac{1}{t} + 20}{\sqrt{\ln^4\frac{1}{t} + 4\ln^3\frac{1}{t} + 12\ln^2\frac{1}{t} + 24\ln\frac{1}{t} + 24} + \left(\ln^2\frac{1}{t} + 2\ln\frac{1}{t} + 2\right)} < +\infty.$$

Следствие доказано.

Заключение. В работе получена оценка скорости убывания равноизмеримых перестановок функций из класса $RH'_{1,2,1}$ и построен пример, показывающий, что полученная оценка асимптотически точная. Этот результат является аналогом хорошо известной теоремы Джона–Ниренберга о пространствах BMO. Также получены оценки равноизмеримых перестановок функций из $RH'_{1,2,1}$, разности средних которых при стремлении к 0 мер сегментов убывают из заданной скоростью.

1. **Gehring F. W.** The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasicinformal mapping / F. W. Gehring // Acta Math. — 1973. — Vol. 130, № 1. — P. 265–277.
2. **Hardy G. H.** Inequalities / G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya. — Cambridge University Press., Cambridge, 1934. — 314 p.
3. **John F.** On functions of bounded mean oscillation / F. John, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1961. — Vol. 14, Issue 3. — P. 415–426.
4. **Muckenhoupt B.** Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 165. — P. 207–226.

5. **Shanin R.** Equimeasurable rearrangements of functions satisfying the reverse Hölder or the reverse Jensen inequality / R. Shanin // Ricerche di Matematica. — 2015. — V. 64. — P. 217–228.
6. **Shanin R. V.** Estimation of equimeasurable rearrangements in the anisotropic case / R. V. Shanin // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 70, № 7. — P. 1115–1126.

Шанін Р. В.
Обернена нерівнівність Гельдера

Резюме

Нехай $r \neq 0$ і E вимірна множина, $|E| > 0$. Для невід'ємної функції $f \in L^r(E)$ середнім інтегральним порядку r називається величина $M_r(f, E) := \left(|E|^{-1} \int_E f^r(x)\, dx\right)^{1/r}$. В роботі вивчається клас $RH'_{1,2,1}(R_0)$ функцій f, що задовольняють обернену нерівність Гельдера, $\langle f \rangle = \sup_{R \subset R_0} [M_2(f, R) - M(f, R)] < +\infty$. Отримана оцінка швидкості спадання рівновимірних перестановок функцій із цього класі і побудовано приклад, що демонструє, що отримана оцінка є асимптотично точною. Цей результат є аналогом добре відомої теореми Джона–Ніренберга в просторі BMO. Також в роботі отримані оцінки рівновимірних перестановок функцій із $RH'_{1,2,1}$ з заданою швидкість спадання до нуля різниці середніх інтегральних.
Ключові слова: обернена нерівність Гельдера, рівновимірна перестановка функції.

Shanin R. V.
Reverse Hölder inequality

Summary

Let $r \neq 0$ and let E be a measurable set with $|E| > 0$. For a non-negative function $f \in L^r(E)$ the mean of the order r is defined by the equality $M_r(f, E) := \left(|E|^{-1} \int_E f^r(x)\, dx\right)^{1/r}$. In the paper we study the class $RH'_{1,2,1}(R_0)$ of functions f satisfying the reverse Hölder inequality $\langle f \rangle = \sup_{R \subset R_0} [M_2(f, R) - M(f, R)] < +\infty$. We obtain a estimate of decrease rate of equimeasurable rearrangements of functions of this class and we give an example which show that the estimate is asymptotically exact. This result is analogous to well-known theorem of F. John and L. Nirenberg in the space of BMO. Also we obtain estimates of equimeasurable rearrangements of functions of $RH'_{1,2,1}$ with given decreasing rate to 0 of difference of means.
Key words: reverse Hölder inequality, equimeasurable rearrangement.

References

1. Gehring F. W. (1973) The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasicinformal mapping. *Acta Math.*, Vol. 130, № 1, P. 265–277.
2. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. (1934) *Inequalities.* Cambridge: Cambridge University Press., 314 p.
3. John F. (1961) On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 14, № 3, P. 415–426.
4. Muckenhoupt B. (1972) Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 165, P. 207–226.
5. Shanin R. (2015) Equimeasurable rearrangements of functions satisfying the reverse Hölder or the reverse Jensen inequality. *Ricerche di Matematica*, V. 64, P. 217–228.
6. Shanin R. V. (2018) Estimation of equimeasurable rearrangements in the anisotropic case. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 70, № 7, P. 1115–1126.