УДК 517.9

А. А. Плотніков
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ О. Ф. ФІЛІППОВА

В статті введено поняття диференціального включення зі змінною розмірністю, яке узагальнює звичайне диференціальне включення та систему зі змінною розмірністю диференціальних включень та обґрунтовано можливість їх використання при дослідженні систем керування зі змінною розмірністю. Системи керування зі змінною розмірністю це системи керування декількома об'єктами з послідовним у часі режимом їх роботи. Початковий стан кожного наступного об'єкта залежить від кінцевого стану попереднього об'єкту, що об'єднує їх в єдину систему змінної розмірності. Передбачається, що кожен об'єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь на інтервалі його дії. При цьому довжини інтервалів задані або невідомі. Системи рівнянь можуть мати неоднакову розмірність, можуть також змінюватися розмірність керуючої функції та обмеження на її значення. В роботі дано означення розв'язку такого диференціального включення та наведено їх основні властивості: умови існування розв'язку, компактність та опуклість перерізу множини розв'язків, а також сформульовано та доведено аналог теореми О. Ф. Філіппова.
MSC: 34A60, 49J21, 49K21.
Ключові слова: диференційне включення, існування, рішення, змінна розмірність, керування .
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175544.

Вступ. На початку 60-х років з'явився цикл робіт T. Wazewski [1, 2] і О.Ф. Філіппова [3], в яких автори розглянули новий вид узагальнення диференціального рівняння - диференціальне включення

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

та встановили зв'язок диференціальних включень з системами керування

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

де $x \in R^n$, $F : R \times R^n \to conv(R^n)$ – множинно-значне відображення, $u \in U \in conv(R^k)$ – вектор керування, $f : R \times R^n \times R^k \to R^n$. Очевидно, якщо $F(t, x) \equiv \{f(t, x, u) \; : \; u \in U\}$, то замість системи (2) можна розглядати систему (1). Так само можна записати диференціальне включення (1) у вигляді диференціального рівняння, яке містить керування (2). При цьому важливу роль відіграє теорема Б.М. Макарова [4]. Тобто дослідження керовоної системи можливо проводити, як у вигляді системи (2) так і у вигляді системи (1).

На теперішній час теорія диференціальних включень досить добре сформувалася і продовжує інтенсивно розвиватися. Так же як і в теорії диференціальних рівнянь були отримані результати, пов'язані з існуванням, продовженням та обмеженістю розв'язку, неперервної залежності від початкових умов і параметрів та ін. В той же час у диференціального включення з кожної початкової точки

Надійшла 22.04.2019

виходить вже ціле сімейство траєкторій. Ця множинно-значність породжує свої специфічні питання, такі, як замкнутість, опуклість сімейства розв'язків, існування граничних розв'язків, виділення розв'язків із заданими властивостями та багато інших питань [5–7].

На практиці нерідко виникають задачі керування декількома об'єктами з послідовним у часі режимом їх роботи. Початковий стан кожного наступного об'єкта залежить від кінцевого стану попереднього, що об'єднує їх в єдину систему змінної розмірності тому, що кожен об'єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь на інтервалі його дії, які можуть мати неоднакову розмірність. При цьому довжини інтервалів можуть бути задані або невідомі, а також може змінюватися розмірність функції керування і обмеження на її значення, тобто

1) якщо моменти часу зміни фазового простору фіксовані

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i, u_i),\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ i = 0, ..., m, \tag{3}$$

$$x_0(0) = \overline{x_0},\ x_i(\tau_i) = \phi_i(x_{i-1}(\tau_i - 0)),\ i = 1, ..., m, \tag{4}$$

2) якщо моменти часу зміни фазового простору залежать від фазового вектору

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i, u_i),\ t \in [\tau_i(x_{i-1}), \tau_{i+1}(x_i)),\ i = 0, 1, ..., \tag{5}$$

$$x_0(0) = \overline{x_0},\ x_i(\tau_i) = \phi_i(x_{i-1}(\tau_i - 0)),\ i = 1, 2, ..., \tag{6}$$

де $x_i(t) \in R^{n_i}$, $u_i(t) \in U_i \in conv(R^{k_i})$ – керування, $f_i : [\tau_i, \tau_{i+1}) \times R^{n_i} \times R^{k_i} \to R^{n_i}$, $\phi_i : R^{n_{i-1}} \to R^{n_i}$, $\tau_0(x_{-1}) = 0$.

Такі системи розглядаються в математичній теорії оптимального керування і мають різні назви: задача оптимізації зі зміною фазового простору - В.Г. Болтянский [8], І.С. Максимова, В.М. Розова [9], ступеневі системи - В.О. Мєдвєдев, В.М. Розова [10], В.М. Розова [11], Г.К. Захаров [12], Ш.Ф. Магеррамов, К.Б. Мансімов [13], системи зі змінною структурою - М.С. Нікольский [14, 15], Т.А. Тадумадзе, Н.М. Авалішвілі [16], Г.Л. Харатішвілі [17], з поетапно змінною динамікою - В.Р. Барсегян [18], Є.Л. Єрьомін [19], складені системи - В.В. Веліченко, Л.Т. Ащепков [20], системи змінної розмірності - О.Д. Кічмаренко, А.А. Плотніков [21, 22]. У роботах В.Г. Гребеннікова [23], О.М. Кирилова [24], Є.Л. Єрьоміна [19] розглянуто застосування даних систем в економіці, екології, робототехніці, авіабудуванні, електроенергетиці, технічних і хімічних системах тощо. Також до таких систем зводяться керовані процеси виникнення і розвитку об'єктів, диференційованих по моменту створення О.В.Романенко, О.В. Федосеєв [25], керовані гібридні системи P.I. Barton, Ch.K. Lee [26], W.M. Haddad, V.S. Chellaboina, S.G. Nersesov [27].

Зрозуміло, що замість розгляду систем (3),(4) та (5),(6) можна розглядати наступні системи зі змінною розмірністю диференціальних включень

$$\dot{x}_i \in F_i(t, x_i),\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ i = 0, ..., m, \tag{7}$$

$$x_0(0) = \overline{x_0},\ x_i(\tau_i) = \phi_i(x_{i-1}(\tau_i - 0)),\ i = 1, ..., m, \tag{8}$$

та

$$\dot{x}_i \in F_i(t, x_i),\ t \in [\tau_i(x_{i-1}), \tau_{i+1}(x_i)),\ i = 0, 1, ..., \tag{9}$$

$$x_0(0) = \overline{x_0},\ x_i(\tau_i) = \phi_i(x_{i-1}(\tau_i - 0)),\ i = 1, 2, ..., \tag{10}$$

де $F_i(t, x_i) \equiv \{f_i(t, x_i, u_i) \ :\ u_i \in U_i\}$. Систему (7),(8) було розглянуто в роботах [28, 29].

Далі зробимо деякі припущення та введемо необхідні означення, що дасть можливість розглянути новий тип диференціальних включень - диференціальне включення зі змінною розмірністю, яке узагальнює звичайні диференціальні включеня та систему зі змінною розмірністю диференціальних включень (7),(8).

Основні результати. Нехай $\theta > 0$ є довільне дійсне число. Позначимо через Σ_θ множину функцій $n(\cdot) : R_+ \to N$, які відповідають наступним умовам:

1) $n(\cdot)$ – кусково-сталі і кусково-неперервні справа;

2) якщо $n(t-0) - n(t) \neq 0$, то $n(\tau) - n(t) = 0$ для всіх $\tau \in [t,\ t+\theta]$.

Візьмемо довільну функцію $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$.

Очевидна справедливість наступної леми.

Лема 1. *Для будь якої функції $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ піввісь R_+ можна розбити не більше ніж на злічену кількість множин $I_i = [t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, ...$ таких, що $R_+ = \bigcup_i I_i$ та $I_i \bigcap I_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$, де $n(t) - n(t_i) = 0$ для всіх $t \in I_i$.*

Візьмемо довільну функцію $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$. Позначимо через Φ_n множину функцій $\phi(t, x)$, які відповідають функції $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ та таких, що

$$\phi(t, x) = \begin{cases} x, & n(t-0) = n(t), \\ \psi_t(x), & n(t-0) \neq n(t), \end{cases}$$

де $\psi_t : R^{n(t-0)} \to R^{n(t)}$ - неперервна функція.

Наприклад, $\psi_t(x) = M(n(t))x$, де $M(n(t)) = (m_{ij})_{i=1,j=1}^{n(t),n(t-0)}$ матриця розмірності $n(t) \times n(t-0)$, яка належить деякій множині $M = \{(m_{ij})_{i=1,j=1}^{k,l}\}_{k=1,l=1}^{\infty,\infty}$ матриць розмірностей $(k \times l),\ k = 1, 2, ...,\ l = 1, 2, \ldots$.

Візьмемо довільну функцію $\phi(\cdot, \cdot) \in \Phi_n$.

Означення 1. *Функцію $x(\cdot, n, \phi)$ будемо називати функцією зі змінною розмірністю, якщо $x(t, n, \phi) \in R^{n(t)}$ для всіх $t \geq 0$ та $x(t, n, \phi) = \phi(t, x(t-0, n, \phi)$ для всіх $t > 0$.*

Означення 2. *Функція $x(\cdot, n, \phi)$ зі змінною розмірністю називається кусково-неперервною на інтервалі $(t', t'') \subset R_+$, якщо вона неперервна в точках $t \in (t', t'')$, де $n(t) - n(t-0) = 0$ та неперервна справа в точках $t \in (t', t'')$, де $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Зауваження 1. *Аналогічно можна ввести означення вимірності, диференційованості, інтегрованості та ліпшицевості функції $x(\cdot, n, \phi)$.*

Означення 3. *Множинно-значне відображення $F(\cdot, n)$ будемо називати відображенням зі змінною розмірністю, якщо має місце наступне включення $F(t, n) \subset R^{n(t)}$ для всіх $t \in R_+$.*

Означення 4. *Множинно-значне відображення $F(\cdot, n)$ зі змінною розмірністю називається кусково-неперервним на інтервалі $(t', t'') \subset R_+$, якщо воно неперервне в точках $t \in (t', t'')$, де $n(t) - n(t-0) = 0$, та неперервне справа в точках $t \in (t', t'')$, де $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Тепер розглянемо наступне диференціальне включення зі змінною розмірністю

$$\dot{x} \in F(t, x, n), \ x(0, n, \phi) = x_0, \tag{11}$$

де $t \in R_+$ – час; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $\phi(\cdot, \cdot) \in \Phi_n$; $x(t, n, \phi)$ - фазовий вектор; $F(t, x, n) : R_+ \times R^{n(t)} \to conv(R^{n(t)})$ - множинно-значне відображення зі змінною розмірністю, $x_0 \in R^{n(0)}$.

Зауваження 2. *Якщо $n(t) \equiv n$, то система (11) буде звичайним диференціальним включенням.*

Припущення 1. *Нехай функція $n(\cdot)$ обмежена сталою $\overline{n} > 0$ для всіх $t \geq 0$.*

Зауваження 3. *Припущення 1 не дає зростання розмірності на нескінченності до нескінченності (ця умова може бути не обов'язковою, якщо система (11) розглядається на скінченному проміжку.)*

Позначимо через $Q_i = \{ (t, x) \, : \, t \in I_i, \, x \in R^{n(t)} \}$, де $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ відповідають лемі 1.

Означення 5. *Кусково-неперервна функція $x(\cdot, n, \phi)$ називається розв'язком системи (11) на відрізку $[0, T]$, якщо*

1) $\dot{x}(t, n, \phi) \in F(t, x(t, n, \phi), n)$ для майже всіх $t \in (0, T)$,

2) $x(0, n, \phi) = x_0$;

3) $x(t, n, \phi) = \phi(t, x(t-0, n, \phi))$ для всіх $t \in (0, T]$.

Теорема 1. *[30] Якщо для $\theta > 0$ відображення $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $\phi(\cdot) \in \Phi_n$ та виконуються умови:*

a) $F(\cdot, x, n)$ - кусково-неперервне по t на R_+;

b) $F(t, \cdot, n)$ - ліпшицеве зі сталою L по x на Q_i, $i = 0, 1, ...$;

c) існує така стала $K > 0$, що $h_{n(t)}(F(t, x, n), \{0\}_{n(t)}) \leq K$ для всіх $(t, x) \in Q_i$, $i = 0, 1, ...$, де $h_{n(t)}(A, B)$ – метріка Хаусдорфа у просторі $comp(R^{n(t)})$.

Тоді на деякому проміжку $[0, T]$ система (11) має розв'язок $x(\cdot, n, \phi)$.

Зауваження 4. *Очевидно, якщо на кожному проміжку $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$, виконується умова $F(t, x, n) \equiv F_i(t, x)$, то розв'язок системи (11) на проміжку $[0, T]$ буде розв'язоком системи (7),(8) на проміжку $[0, T]$ та навпаки.*

Позначимо через $X(t, n, \phi)$ переріз множини розв'язків системи (11) в момент часу $t \geq 0$.

Теорема 2. *[30] Якщо для $\theta > 0$ і відображення $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $\phi(\cdot) \in \Phi_n$ та*

a) $F(\cdot, x, n)$ - кусково-неперервне по t на $[0, T]$;

b) $F(t, \cdot, n)$ - ліпшицеве зі сталою L по x на Q_i, $i = 0, 1, ..., m$;

c) існує така стала $K > 0$, що $h_{n(t)}(F(t, x, n), \{0\}_{n(t)}) \leq K$ для всіх $(t, x) \in Q_i$, $i = 0, 1, ..., m$.

Тоді $X(t, n, \phi) \in comp(R^{n(t)})$ для всіх $t \in [0, T]$, де m таке, що $\bigcup\limits_{i=0}^{m} I_i = [0, T]$.

Тепер сформулюємо і доведемо аналог теореми О.Ф. Філіппова.

Теорема 3. *Якщо для* $\theta > 0$ *і відображення* $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $\phi(\cdot) \in \Phi_n$ *та*

a) $F(\cdot, x, n)$ *- кусково-неперервне по* t *на* $[0, T]$;

b) $F(t, \cdot, n)$ *- ліпшицеве зі сталою* L *по* x *на* Q_i, $i = 0, 1, ..., m$;

c) існує така стала $K > 0$, *що* $h_{n(t)}(F(t, x, n), \{0\}_{n(t)}) \le K$ *для всіх* $(t, x) \in Q_i$, $i = 0, 1, ..., m$.

d) існує стала $\mu > 0$ *така, що для всіх* τ_i *та будь яких* $x_1, x_2 \in Q_{i-1}$

$$\|\phi(\tau_i, x_1) - \phi(\tau_i, x_2)\|_{R^{n(\tau_i)}} \le \mu \|x_1 - x_2\|_{R^{n(\tau_i - 0)}};$$

e) $y(\cdot, n, \phi)$ *- кусково-неперервна функція на* $[0, T]$ *така, що*

$$dist_{n(t)}(\dot{y}(t, n, \phi), F(t, y(t, n, \phi), n)) \le \rho(t)$$

майже для всіх $t \in [0, T]$, *де* $\rho(\cdot)$ *– сумовна функція на* $[0, T]$, $dist_{n(t)}(a, B) = \min_{b \in B} \|a - b\|_{R^{n(t)}}$, $a \in R^{n(t)}$, $B \in conv(R^{n(t)})$, $\|a - b\|_{R^{n(t)}}$ *– евклідова метрика у просторі* $R^{n(t)}$;

f) $\|y(0, n, \phi) - x_0\|_{R^{n(0)}} \le \delta$.

Тоді існує розв'язок системи (11) такий, що

$$\|x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi)\|_{R^{n(t)}} \le \lambda(t)\delta e^{Lt} + \lambda(t)e(t)\int_0^t e^{L(t-s)}\rho(s)ds,$$

де $\lambda(t) = \begin{cases} 1, & \mu \in (0, 1] \\ \mu^{i(t)}, & \mu > 1 \end{cases}$, $e(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau_1] \\ e^{L(t-\tau_1)}, & t \in (\tau_1, T] \end{cases}$, $i(t)$ *- кількість точок* τ_i *на проміжку* $[0, t]$.

Доведення. Згідно теореми 1 розв'язок системи (11) існує на деякому проміжку $[0, T]$. Тоді згідно леми 1 існує деяке $m \ge 0$ та $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$, які задовольняють умовам леми 1. Тоді згідно теореми О.Ф. Філіппова [5–7] на кожному проміжку $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$ маємо

$$\|x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi)\|_{R^{n(\tau_i)}} \le$$

$$\le \|x(\tau_i, n, \phi) - y(\tau_i, n, \phi)\|_{R^{n(\tau_i)}} e^{L(t-\tau_i)} + \int_{\tau_i}^t e^{L(t-s)}\rho(s)ds,$$

для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$.

Оцінимо $\|x(\tau_1, n, \phi) - y(\tau_1, n, \phi)\|_{R^{n(\tau_1)}}$.

Оскільки для всіх $t \in [0, \tau_1)$

$$\|x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi)\|_{R^{n(0)}} \le \delta e^{Lt} + \int_0^t e^{L(t-s)}\rho(s)ds,$$

то

$$\|x(\tau_1, n, \phi) - y(\tau_1, n, \phi)\|_{R^{n(\tau_1)}} =$$

$$= \|\phi(\tau_1, x(\tau_1 - 0, n, \phi)) - \phi(\tau_1, y(\tau_1 - 0, n, \phi))\|_{R^{n(\tau_1)}} \le$$

$$\leq \mu \left\|x(\tau_1 - 0, n, \phi) - y(\tau_1 - 0, n, \phi)\right\|_{R^{n(0)}} \leq \delta e^{L\tau_1} + \int_0^{\tau_1} e^{L(\tau_1 - s)} \rho(s) ds.$$

Тоді для всіх $t \in [\tau_1, \tau_2)$ маємо:

$$\|x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi)\|_{R^{n(\tau_1)}} \leq$$

$$\leq \mu\delta e^{L\tau_1} e^{L(t-\tau_1)} + \mu e^{L(t-\tau_1)} \int_0^{\tau_1} e^{L(\tau_1 - s)} \rho(s) ds + \int_{\tau_1}^t e^{L(t-s)} \rho(s) ds \leq$$

$$\leq \lambda(t)\delta e^{Lt} + \lambda(t) e^{L(t-\tau_1)} \left(\int_0^{\tau_1} e^{L(\tau_1 - s)} \rho(s) ds + \int_{\tau_1}^t e^{L(t-s)} \rho(s) ds \right) =$$

$$= \lambda(t)\delta e^{Lt} + \lambda(t) e^{L(t-\tau_1)} \int_0^t e^{L(t-s)} \rho(s) ds.$$

Отже, для $t = \tau_2$ отримаємо

$$\|x(\tau_2, n, \phi) - y(\tau_2, n, \phi)\|_{R^{n(\tau_2)}} =$$

$$= \|\phi(\tau_2, x(\tau_2 - 0, n, \phi)) - \phi(\tau_2, y(\tau_2 - 0, n, \phi))\|_{R^{n(\tau_2)}} \leq$$

$$\leq \mu \left\|x(\tau_2 - 0, n, \phi) - y(\tau_2 - 0, n, \phi)\right\|_{R^{n(\tau_1)}} \leq$$

$$\leq \mu\lambda(\tau_1)\delta e^{L\tau_2} + \mu\lambda(\tau_1) e^{L(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^{\tau_2} e^{L(\tau_2 - s)} \rho(s) ds \leq$$

$$\leq \lambda(\tau_2)\delta e^{L\tau_2} + \lambda(\tau_2) e^{L(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^{\tau_2} e^{L(\tau_2 - s)} \rho(s) ds.$$

Тоді для всіх $t \in [\tau_2, \tau_3)$ маємо:

$$\|x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi)\|_{R^{n(\tau_2)}} \leq$$

$$\leq \lambda(t)\delta e^{L\tau_2} e^{L(t-\tau_2)} + \lambda(t) e^{L(t-\tau_2)} e^{L(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^{\tau_2} e^{L(\tau_2 - s)} \rho(s) ds + \int_{\tau_2}^t e^{L(t-s)} \rho(s) ds \leq$$

$$= \lambda(t)\delta e^{Lt} + \lambda(t) e^{L(t-\tau_1)} \int_0^t e^{L(t-s)} \rho(s) ds.$$

Далі, використовуючи метод математичної індукції, одержимо, що для всіх $t \in [0, T]$:

$$\|x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi)\|_{R^{n(t)}} \leq \lambda(t)\delta e^{Lt} + \lambda(t) e(t) \int_0^t e^{L(t-s)} \rho(s) ds.$$

Теорему доведено.

Зауваження 5. *Якщо на проміжку $[0, T]$ система (11) має постійну розмірність, то $\lambda(t) = e(t) = 1$ і таким чином отримаємо оцінку з теореми О.Ф. Філіппова для звичайних диференціальних включень.*

Висновки. В статті введено диференціальне включення зі змінною розмірністю, яке узагальнює систему зі змінною розмірністю диференціальних включень (7),(8) та звичайне диференціальне включення. Дано означення розв'язку та наведено їх основні властивості: умови існування розв'язку, компактність та опуклість перерізу множини розв'язків, а також доведено аналог теореми О. Ф. Філіппова.

1. **Wazewski T.** Systemes de comande et equations au contingent / T. Wazewski // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys. – 1961. – Vol.9, № 3. – P. 151 – 155.
2. **Wazewski T.** Sur une condition equvalente l'equation an contingent / T. Wazewski // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser.sci. math., astr. et phys. – 1961. – Vol.9, № 12. – P. 865 – 867.
3. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования / А. Ф. Филиппов // Вестник МГУ, сер. Матем., мех. – 1959. – №2. – С. 25–32.
4. **Гелиг А.Х.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, В.А. Якубович // М.: Наука. – 1978. – 400 с.
5. **Aubin J.-P.** Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory / J.-P. Aubin, A. Cellina // Berlin: Springer-Verlag. – 1984 – 341 p.
6. **Плотников В.А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк // Одесса: Астропринт. – 1999. – 356 с.
7. **Половинкин Е. С.** Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин // М.: Физматлит. – 2014. – 597 с.
8. **Болтянский В. Г.** Задача оптимизации со сменой фазового пространства / В. Г. Болтянский // Дифференц. уравн. – 1983. – Т. 19, №3. – С. 519–521.
9. **Максимова И. С.** Условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства / И. С. Максимова, В. Н. Розова // Вестник ТГУ. – 2011. – Т. 16, вып. 4. – С. 1118–1119.
10. **Медведев В. А.** Оптимальное управление ступенчатыми системами / В. А. Медведев, В. Н. Розова // Автоматика и телемеханика. – 1972. – Т.3. – С. 15-23.
11. **Розова В. Н.** Оптимальное управление ступенчатыми системами / В. Н. Розова // Вестник Российского Университета Дружбы Народов. Серия: Физико-Математические Науки. – 2006. – №1. – С. 27–32.
12. **Захаров Г. К.** Оптимизация ступенчатых систем управления / Г. К. Захаров // Автоматика и телемехан. – 1981. – № 8. – С. 5–9.
13. **Магеррамов Ш. Ф.** Оптимизация одного класса дискретных ступенчатых систем управления / Ш. Ф. Магеррамов, К. Б. Мансимов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41, № 3. – С. 360–366.
14. **Никольский М. С.** Линейные дифференциальные игры с переменной структурой / М. С. Никольский // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 276, № 4. – С. 791–794.
15. **Никольский М. С.** Об одной вариационной задаче с переменной структурой / М. С. Никольский // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 36–41.
16. **Тадумадзе Т. А.** Регулярные возмущения в оптимальных задачах с переменной структурой / Т. А. Тадумадзе, Н. М. Авалишвили // Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. – 1985. – Тбилиси. – С. 100–154.
17. **Харатишвили Г. Л.** Полиатомические оптимальные системы / Г. Л. Харатишвили // Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. Тбилиси. – 1985. – С. 3–47.
18. **Барсегян В. Р.** О задаче оптимального управления поэтапно меняющимися линейными системами с фазовыми ограничениями в промежуточные моменты времени / В. Р. Барсегян // Ученые записки ЕГУ. – 2002. – №1. – С.118–119.

19. **Еремин Е. Л.** Адаптивное управление динамическим объектом на множестве состояний функционирования / Е. Л. Еремин // Адаптивное и робастное управление. – 2012. – №4(34). – С. 107–118.

20. **Ащепков Л. Т.** Оптимальное управление. Курс лекций / Л. Т. Ащепков, В. В. Величенко // Владивосток: Изд-во Дальневост. Ун-та. – 1989. – 116 с.

21. **Кічмаренко О.Д.** Системи лінійних керованих диференційних рівнянь зі змінною розмірністю / О.Д. Кічмаренко, А.А. Плотніков // Дослідження в математиці і механіці. - 2018. - Т. 23. - N 1(31) - С. 52–67.

22. **Kichmarenko O. D.** The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval / O. D. Kichmarenko, A. A. Plotnikov // International Journal of Sensing, Computing and Control. – 2015. – Vol. 5, №1. – P. 25–35.

23. **Гребенников В. Г.** Оптимальный выбор траектории развития и принцип непрерывности планирования / В. Г. Гребенников // В сб.: Методологические проблемы анализа долгосрочных социально-экономических процессов. Труды ВНИИСИ. – 1979. – вып. 9. – С. 3–15.

24. **Кириллов А. Н.** Метод динамической декомпозиции в моделировании систем управления со структурными изменениями / А. Н. Кириллов // Моделирование систем и процессов. – 2009. – № 1. – С. 20–24.

25. **Романенко А. В.** Оптимальное управление экономическими системами с возрастной структурой / А. В. Романенко, А. В. Федосеев // Журнал вычислит. мат. и матем. физики. – 1993. – Т.33, №8. – С. 1155–1165.

26. **Barton P. I.** Modeling, simulation, sensitivity analysis, and optimization of hybrid systems / P. I. Barton, Ch. K. Lee // ACM Trans. on Model. and Comput. Simul. – 2002. – Vol. 12, №4. – P. 256–289.

27. **Haddad W. M.** Impulsive and hybrid dynamical systems / W. M. Haddad, V. S. Chellaboina, S. G. Nersesov // Princeton: Princeton University Press. – 2008.

28. **Плотников А. А.** Пошаговое усреднение линейных дифференциальных включений переменной размерности на конечном интервале / А. А. Плотников // Нелінійні коливання. – 2017. – Т. 20, №2. – С. 211–227.

29. **Kichmarenko O. D.** The Averaging of Linear Differential Inclusions with Variable Dimension on Finite Interval /O. D. Kichmarenko, A. A. Plotnikov // International Journal of Nonlinear Science. – 2015. – Vol. 20, №2. – P. 67–78.

30. **Кичмаренко О. Д.** Нелинейные дифференциальные включения с переменной размерностью / О.Д. Кичмаренко, А.А. Плотников // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т.18, вип. 2(18). – С. 29–34

Плотников А. А.
Обобщение теоремы А. Ф. Филиппова

Резюме

В статье введено понятие дифференциального включения с переменной размерностью, которое обобщает обычное дифференциальное включение и систему с переменной размерностью дифференциальных включений и обоснована возможность их использования при исследовании систем управления с переменной размерностью. Системы управления с переменной размерностью это системы управления несколькими объектами с последовательным во времени режимом их работы. Исходное состояние каждого следующего объекта зависит от конечного состояния предыдущего объекта, что объединяет их в единую систему переменного размерности. Предполагается, что каждый объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений на интервале его действия. При этом длины интервалов заданные или неизвестны. Системы уравнений могут иметь неодинаковую размерность, могут также меняться размерность управляющей функции и ограничения на ее значение. В работе дано определение развязку такого дифференциального включения и приведены их основные свойства: условия существования решения, компактность и выпуклость сечения множества решений, а также сформулированы и доказано аналог теоремы А. Ф. Филиппова.
Ключевые слова: дифференциальное включение, существование, решение, переменная размерность, управление .

Plotnikov A. A.
Generalization of Filippov's theorem

Summary

The article introduces the concept of differential inclusion with variable dimension, that generalizes the ordinary differential inclusion and system with variable dimension of differential inclusions, and the possibility of its use in the study of variable-dimensional control systems is substantiated. Variable dimensional control systems are the systems for managing of multiple objects with a consistent mode of operation. The initial state of each next object depends on the final state of the previous object, that unites them into a single system of variable dimension. It is assumed that each object is described by a system of ordinary differential equations on the interval of its action. At the same time, intervals are given or unknown. Equation systems may have different dimensions, and the dimension of the control function and the limit on its value may also change. In the paper, the definition of the solution of such differential inclusion and its main properties (the conditions for the existence of the solution, the compactness and convexity of the section of the set of solutions) are given, and also an analogue of Filippov's theorem is proved.
Key words: differential inclusion, existence, solution, variable dimension, control.

References

1. Wazewski, T. (1961). Systemes de comande et equations au contingent. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys.*, Vol.9, № 3. – P. 151 – 155.
2. Wazewski, T. (1961). Sur une condition equvalente l'equation an contingent. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser.sci. math., astr. et phys.*, Vol.9, № 12. – P. 865 – 867.
3. Filippov, A. F. (1959). Nekotorie voprosi teorii optimal'nogo regulirovaniya [On some questions in the theory of optimal regulation]. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. Fiz. Him.*, №2. – P. 25–32.

4. Gelig, A. H., Leonov, G. A., Jakubovic, V. A. (1978). *Ustoichivost' nelineinih sistem s needinstvennim sostoyaniem ravnovesiya [The stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state]*, Nauka, Moscow, – 400 p.

5. Aubin, J.-P. (1984). *Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory.* Berlin: Springer-Verlag. – 341 p.

6. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V., Vityuk, A. N. (1999). *Differentsial'nyye uravneniya s mnogoznachnoy pravoy chast'yu: Asimptoticheskiye metody [Differential equations with a multivalued right-hand side: Asymptotic methods].* AstroPrint, Odessa. – 356 p.

7. Polovinkin, E. S. (2014). Mnogoznachnyy analiz i differentsial'nyye vklyucheniya [Multivalued analysis and differential inclusions]. Fizmatlit, Moscow . – 597 p.

8. Boltyanskii, V. G. (1983). Zadacha optimizacii so smenoi fazovogo prostranstva [The problem of optimization with change of phase space]. *Differentsial'nye Uravneniya*, Vol. 19 , №3. – P. 518–521.

9. Maksimova, I. S., Rozova, V. N. (2011). Uslobiya upravlyaemosti v zadache so smenoi fazovogo prostranstva [Controllability conditions in the problem with the change of phase space]. *Vestnik TGU*, Vol. 16, №4. – P. 1118–1119.

10. Medvedev, V. A., Rozova, V. N. (1972). Optimal'noe upravlenie stypenchatimi sistemami [Optimal control step system]. *Avtomatika i telemehanika*, Vol. 3. – P. 15–23.

11. Rozova, V. N. (1972). Optimal'noe upravlenie stypenchatimi sistemami [Optimal control step system]. Vestnik Rossiiskogo Universiteta Druzhbi Narodov. Seriya: Fizikomatematicheskie nauki, №1. – P. 27–32.

12. Zakharov, G. K. (1981). Optimizaciya stupenchatih sistem upravleniya [Optimization of step control systems]. *Avtomatika i telemehanika*, Vol. 8. – P. 5–9.

13. Magerramov, Sh. F., Mansimov, K. B. (2001). Optimization of a class of discrete step control systems. *Comput. Math. Math. Phys.*, Vol. 41 , №3. – P. 334–339.

14. Nikol'skii, M. S. (1984). Lineinie differencial'nie igri s peremenoi strukturoi [Linear differential games with variable structure]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 276, №4. – P. 791–794.

15. Nikol'skii, M. S. (1987). Ob odnoi variacionnoi zadache s peremennoi strukturoi [A variational problem with a variable structure]. *Vestnik Moskov. Univ.*, Ser. XV Vychisl. Mat. Kibernet., №1. – P. 36–41.

16. Tadumadze, T. A., Avalishvili, N. M. (1985). Regulyarnie vozmuscheniya v optimal'nih zadachah s peremennoi strukturoi [Regular perturbations in optimal problems with variable structure]. *Optimal control in systems with variable structure.* – P. 100–154.

17. Haratishvili, G. L. (1985). Poliatomicheskie optimal'nie sistemi [Polyatomic optimal systems]. *Optimal control in systems with variable structure.* – P. 3–47.

18. Barsegyan, V. R. (2002). O zadache optimal'nogo upravleniya poetapno menyayuschimisya lineinimi sistemami s fazovimi ogranicheniyami v promezhutochnie momenti vremeni [On the problem of optimal control of gradually varying linear systems with phase constraints at intermediate instants of time]. *Uchenie zapiski EGU*, №1. – P. 118–119.

19. Eremin, E. L. (2012). Adaptivnoe upravlenie dinamicheskim ob'ektom na mnozhestve sostoyanii funkcionirovaniya [Adaptive control of a dynamic object in the set operation states]. *Adaptive and robust control*, №4(34). – P. 107–118.

20. Aschepkov, L. T., Velichenko, V. V. (1989). *Optimal'noe upravlenie. Kurs lekcii [Optimal control. Lecture course].* Vladivostok: Izdat. Dal'nevostochnogo universiteta, 116 p.

21. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2018). Systemy liniynykh kerovanykh dyferentsial'nykh rivnyan' zi zminnoyu rozmirnistyu [Systems of linear controlled differential equations with variable dimension]. *Visnik Od. nac. un-tu. Mat. i mekh.*, Vol. 23, №1(31) – P. 52–67.

22. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2015). The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval. *International Journal of Sensing, Computing and Control*, Vol. 5, №1. – P. 25–35.

23. Grebennikov, V. G. (1979). Optimal'nii vibor traektorii razvitiya i princip neprerivnosti planirovaniya [Optimal choice of the development trajectory and the principle of continuity of planning]. *In: Methodological problems of analysis of long-term socio-economic processes. Proceedings of VNIISI*, №9. – P. 3–15.

24. Kirilov, A. N. (2009). Metod dinamicheskoi dekompozicii v modelirovanii sistem upravleniya so strukturnimi szmeneniyami [The method of dynamic decomposition in the modeling of control systems with structural changes]. *Modeling of systems and processes*, № 1. – P. 20–24.

25. Romanenko, A. V., Fedoseev, A. V. (1993). Optimal'noe upravlenie ekonomicheskimi sistemami [Optimum management of economic systems with age structure]. *Zhurnal computes. mat. i math. physics*, Vol.33, №8. – P. 1155–1165.

26. Barton, P. I., Lee, Ch.K. (2002). Modeling, simulation, sensitivity analysis, and optimization of hybrid systems. *ACM Trans. on Model. and Comput. Simul.*, Vol. 12, №4. – P. 256–289.

27. Haddad, W. M., Nersesov, S.G. (2008). *Impulsive and hybrid dynamical systems.* Princeton: Princeton University Press.

28. Plotnikov, A.A. (2018). Step-By-Step Averaging of Linear Differential Inclusions of Variable Dimension on a Finite Interval. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 231, № 6. – P. 760–779.

29. Kichmarenko, O.D., Plotnikov, A.A. (2015). The Averaging of Linear Differential Inclusions with Variable Dimension on Finite Interval. *International Journal of Nonlinear Science*, Vol. 20, №2. – P. 67–78.

30. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2013). Nelineinie differencial'nie vklucheniya s peremennoi razmernost'yu [Nonlinear differential inclusions with variable dimension], *Visnik Od. nac. un-tu. Mat. i mekh.*, Vol. 18, №2(18). – P. 29–34.