УДК 517.9

З. М. Лысенко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ТЕПЛИЦЕВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СИМВОЛАМИ

Автор благодарен Н. Л. Василевскому за постановку задачи и полезное обсуждение результатов.

Рассматривается весовое пространство Бергмана $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ $(\lambda > -1)$ в области Зигеля D_n, состоящее из аналитических функций пространства $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$, где

$$d\mu_\lambda = \frac{c_\lambda}{4}\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right)^\lambda d\nu(z), \quad c_\lambda = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\pi^n \Gamma(\lambda+1)},$$

$d\nu(z)$ – стандартная мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Описана структура $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$. Именно, пространство $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ можно рассаматривать (с точностью до изометрического изоморфизма R) в виде прямого интеграла

$$\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi$$

пространства Фока $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, состоящего из аналитических функций пространства $L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_\alpha\right)$ $(\alpha = 2\xi)$, где $d\nu_\alpha(z') = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha|z'|^2} d\nu(z')$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Используя оператор R, доказано, что каждый теплицевый оператор T_a со специальным ограниченным символом $a(z) = a\left(\operatorname{Im} z_n - |z'|^2\right)$, действующий в пространстве $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$, унитарно эквивалентен прямому интегралу от оператора умножения $\gamma_a(\xi)I$, действующему в пространстве Фока $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}_+$. Функция $\gamma_a(\xi)$ определяется формулой

$$\gamma_a(\xi) = \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{\mathbb{R}_+} a(v) \mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda \, dv.$$

Отсюда вытекает, что C^*-алгебра, порожденная таким оператором, коммутативна. Показано, что C^*-алгебра, порожденная теплицевыми операторами T_a и T_b, где

$$a = a\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right) \in L_\infty(\mathbb{R}_+), \quad b = b\left(z'\right) \in L_\infty\left(\mathbb{C}^{n-1}\right),$$

коммутативна тогда и только тогда, когда для каждого $\xi \in \mathbb{R}_+$ алгебра, порожденная теплицевыми операторами $T^{2\xi}_b$, действующими в пространстве $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, коммутативна.

MSC: 47B35, 47L80, 47G10, 32A36.
Ключевые слова: пространство Бергмана, область Зигеля, унитарный оператор, сопряженный оператор.
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175543.

Введение. Пусть D – некоторое многообразие. Пространство Бергмана $\mathcal{A}^2(D)$ состоит из аналитических функций пространства $L_2(D)$. Через B_D обозначим ортогональный проектор (проектор Бергмана) $L_2(D)$ на замкнутое подпространство $\mathcal{A}^2(D)$. Тогда оператор Теплица T_a с символом $a \in L_\infty(D)$, действующий в $\mathcal{A}^2(D)$, определяется следующим образом:

$$T_a: \ \varphi \in \mathcal{A}^2(D) \ \to \ B_d(a\varphi) \in \mathcal{A}^2(D).$$

Получена 11.06.2019

Алгебры, порожденные теплицевыми операторами, изучались многими авторами (см. монографию [1], а также библиографию к ней). Так, в [1] получена полная характеристика коммутативных C^*-алгебр теплицевых операторов в весовых пространтсвах Бергмана для случая единичного круга и верхней полуплоскости. Именно, доказано, что C^*-алгебра, порожденная операторами Теплица в указанных пространствах, коммутативна тогда и только тогда, когда соответствующие символы постоянны на циклах некоторых пучков гиперболических геодезических линий. Этот результат показывает как геометрия базисного многообразия влияет на свойства операторов Теплица на этом многообразии. Во всех случаях изучение алгебр теплицевых операторов, как правило, строится унитарный оператор, который преобразует соответствующий оператор Теплица в конкретный мультипликативный оператор, зависящий от символа. Это влечет не только коммутативность соответствуюей алгебры, но и дает возможность в будущем исследовать ограниченность, компактность, спектральные свойства, инвариантные подпространства изучаемых операторов Теплица.

В данной работе исследуется коммутативность C^*-алгебры теплицывых операторов в весовых пространствах Бергмана над областью Зигеля со специальными символами.

Основные результаты

1. Структура пространства Бергмана в области Зигеля. Пусть $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $|z|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$, где $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Обозначим через D_n область Зигеля в $\mathbb{C}^n$, определяемую следующим образом

$$D_n = \left\{ z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z_n - |z'|^2 > 0 \right\}. \tag{1}$$

Пусть

$$\mathcal{D} = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Отображение

$$k : \ (z', u, v) \in \mathcal{D} \ \to \ \left(z', u + \imath v + \imath \, |z'|^2 \right) \in D_n \tag{2}$$

является диффеоморфизмом между $\mathcal{D}$ и D_n.

Обозначим через $d\nu(z) = dx_1 dy_1 \ldots dx_n dy_n$, где $z_m = x_m + \imath y_m$, $m = \overline{1, n}$, стандартную меру Лебега в $\mathbb{C}^n$. Введем следующее однопараметрическое семейство весовых мер (см., например, [2])

$$d\mu_\lambda(z) = \frac{c_\lambda}{4} \left(\operatorname{Im} z_n - |z'|^2 \right)^\lambda \, d\nu(z),$$

где c_λ – нормализованная константа вида

$$c_\lambda = \frac{\Gamma(n + \lambda + 1)}{\pi^n \Gamma(\lambda + 1)}, \quad \lambda > -1. \tag{3}$$

Обозначим через $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ весовое пространство Бергмана, состоящее из аналитических функций пространства $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$ и, тем самым, являющееся замкнутым подпространством $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$. Известно (см., например, [3–5]), что ортогональный проектор

$$B_{D_n, \lambda} : \ L_2(D_n, d\mu_\lambda) \ \to \ \mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$$

можно представить в следующем виде

$$(D_{D_n,\lambda}f)\,(z) = \int\limits_{D_n} \frac{f(w)}{\left(\frac{z_n-\overline{w}_n}{2\imath} = z'\overline{w}'\right)}\, d\mu_\lambda(w).$$

Вернемся снова к области

$$\mathcal{D} = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Введем пространство $L_2\,(\mathcal{D}, d\mu_\lambda)$, где мера $d\mu_\lambda$ задается формулой

$$d\mu_\lambda(w) = \eta_\lambda(v) = \frac{c_\lambda}{4} v^\lambda d\nu(z), \quad \lambda > -1,$$

при этом $w = u + \imath v$, а константа c_λ задается формулой (3).

Рассмотрим унитарный оператор сдвига

$$\mathcal{U}_0 : \; L_2\,(D_n, d\mu_\lambda) \; \to \; L_2\,(\mathcal{D}, d\eta_\lambda)\,,$$

действующий по формуле

$$(\mathcal{U}_o f)\,(w) = f[k(w)],$$

где k задано (2).

Тогда образ

$$\mathcal{A}_o = \mathcal{U}_0\left(\mathcal{A}^2_\lambda\,(D_n)\right)$$

совпадает (см. [2, формула (2.10)]) с множеством всех функций из $L_2\,(\mathcal{D}, d\mu_\lambda)$, удовлетворяющих уравнениям:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + \imath\frac{\partial}{\partial v}\right)\varphi = 0 \text{ и } \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} - \imath\frac{\partial}{\partial u} z_k\right)\varphi = 0 \;\; k = \overline{1, n-1}.$$

Следуя [2, раздел 7] введем унитарный оператор

$$\mathcal{U}_1 = I \otimes F \otimes I,$$

действующий в

$$L_2\,(\mathcal{D}, d\eta_\lambda) = L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) \otimes L_2\,(\mathbb{R}) \otimes L_2\,(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda)\,,$$

где

$$(F\,f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(u) \mathrm{e}^{-\imath\xi u}\, du$$

– преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$. Тогда образ

$$\mathcal{A}_1(\mathcal{D}) = \mathcal{U}_1\,(\mathcal{A}_0(\mathcal{D}))$$

состоит из функций пространства $L_2\,(\mathcal{D}, d\eta_\lambda)$, имеющих вид:

$$\varphi\,(z', \xi, v) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi) \Psi\,(z', \xi)\, \mathrm{e}^{-|\xi| v},$$

где функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} + \xi z_k\right) \Psi\left(z', \xi\right) = 0, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{4}$$

Введем теперь весовое пространство Фока [6,7] (или Сигала – Боргмана [8,9]) в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$. Для заданного параметра $\alpha \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим $L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, dv_\alpha\right)$, где

$$dv_\alpha\left(z'\right) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha\left|z'\right|^2} d\nu\left(z'\right), \quad z' \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

Тогда пространство Фока $F^2_\alpha\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$ – это замкнутое подпространство пространства $L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, dv_\alpha\right)$, состоящее из аналитических функций.

Обозначим через P_α ортогональный проектор:

$$P_\alpha : \; L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, dv_\alpha\right) \; \to \; F^2_\alpha\left(\mathbb{C}^{n-1}\right).$$

Для каждого $\xi \in \mathbb{R}$ введем оператор

$$\left(V_\xi f\right)\left(z'\right) = \left(\frac{2|\xi|}{\pi}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \mathrm{e}^{|\xi|\,\left|z'\right|^2} f\left(z'\right),$$

который отображает унитарно

$$L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) \text{ на } L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right).$$

Заметим, что $\forall\ \xi \in \mathbb{R}_+$

$$V_\xi \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} + \xi z_k\right) V_\xi^{-1} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{5}$$

Представим пространство $L_2\left(\mathcal{D}, d\eta_\lambda\right)$ в следующем виде:

$$L_2\left(\mathcal{D}, d\eta_\lambda\right) = L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) = L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\, d\xi.$$

Используя это представление, введем оператор

$$V = I \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} V_\xi \, d\xi,$$

отображающий унитарно

$$L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\, d\xi$$

на

$$L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right)\, d\xi.$$

Тогда образ

$$\mathcal{A}_V = V\left(\mathcal{A}_1(\mathcal{D})\right)$$

состоит из всех функций вида

$$\varphi\left(z', \xi, v\right) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi) c(\xi) \mathrm{e}^{-\xi v} \Psi\left(\xi, z'\right), \tag{6}$$

где, согласно (4) и (5), функция Ψ принадлежит

$$\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi,$$

а $c(\xi)$ – нормализованная функция, определяемая формулой

$$c(\xi) = \left(\frac{4(2\xi)^{\lambda+1}}{c_\lambda \Gamma(\lambda+1)}\right)^{1/2},$$

при этом константа c_λ вычисляется по формуле (3).

Лемма 1. *Унитарный оператор*

$$\mathcal{U} = V \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_0$$

отображает пространство Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2\left(D_n\right)$ на пространство $\mathcal{A}_V$, которое является замкнутым подпространством пространства

$$L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right) d\xi$$

и состоит из функций вида

$$\varphi\left(z', \xi, v\right) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi) c(\xi) \mathrm{e}^{-\xi v} \Psi\left(\xi, z'\right),$$

где

$$\Psi\left(\xi, z'\right) \in \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi.$$

Доказательство. Согласно (6) подпространство $\mathcal{A}_V$ пространства

$$L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right) d\xi$$

состоит из всех функций

$$\varphi\left(z', \xi, v\right) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi) c(\xi) \mathrm{e}^{-\xi v} \Psi\left(\xi, z'\right),$$

где

$$\Psi \in \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\, d\xi.$$

Покажем, что $\|\varphi\| = \|\Psi\|$:

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2_+} c^2(\xi)\mathrm{e}^{-2\xi v}\|\Psi(\xi,\cdot)\|^2_{F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})}\frac{c_\lambda}{4}v^\lambda\, d\xi\, dv =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} \|\Psi(\xi,\cdot)\|^2_{F_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})}\frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\, d\xi \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda\, dv.$$

Вычисляя интеграл Эйлера

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda\, dv = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{(2\xi)^{\lambda+1}}, \tag{7}$$

получаем утверждение леммы.

Введем изометрическое отображение

$$R_0 : \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\, d\xi \ \to\ L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right)\, d\xi$$

по следующему правилу:

$$R_0 : \ \Psi\left(\xi, z'\right) \ \to\ \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi) c(\xi) \mathrm{e}^{-\xi v}\Psi\left(\xi, z'\right),$$

где функция $\Psi\left(\xi, z'\right) = 0\ \forall\, \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+,\ \forall\, z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Сопряженный оператор

$$R_0^* : \ L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right)\, d\xi \ \to\ \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\, d\xi$$

имеет вид:

$$R_0^* : \ f\left(u, \xi, z'\right) \ \to\ \int_{\mathbb{R}_+} c(\lambda)\mathrm{e}^{-\xi v}\left(P_{2\xi} f\right)\left(v, \xi, z'\right)\frac{c_\lambda}{4}v^\lambda\, dv.$$

Тогда мы имеем

$$R_0^* R_0 = I : \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\, d\xi \ \to\ \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\, d\xi,$$

$$R_0 R_0^* = P_V : \ L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1} dv_{2|\xi|}\right)\, d\xi \ \to\ A_V,$$

где P_V – ортогональный проектор.

Из леммы 1 непосредственно вытекает следующая

Теорема 1. *Оператор* $R = R_0^* \mathcal{U}$, *где* $\mathcal{U} = V\mathcal{U}_1\mathcal{U}_0$, *отображает* $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$ *на* $\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi$ *и сужение*

$$R\Big|_{\mathcal{A}_\lambda^2(D_n)} :\ \mathcal{A}_\lambda^2(D_n) \ \to \ \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi$$

есть изометрический изоморфизм. Сопряженный оператор

$$R^* = \mathcal{U}^* R_0 :\ \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi \ \to \ \mathcal{A}_2^2(D_n) \subset L_2(D_n, d\mu_\lambda)$$

есть изометрический изоморфизм этих пространств. Более того,

$$R\,R^* = I :\ \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi \ \to \ \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi,$$

$$R^*\,R = B_{D_n,\lambda} :\ L_2(D_n, d\mu_\lambda) \ \to \ \mathcal{A}_\lambda^2(D_n),$$

где $B_{D_n,\lambda}$ – *проектор Бергмана пространства* $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$ *на пространство* $\mathcal{A}_\lambda^2(D_n)$.

2. Алгебры, порожденные теплицевыми операторами. Рассмотрим цепочку обратных операторов :

$$U_0^{-1} : L_2(D, d\eta_\lambda) \to L_2(D_n, d\mu_\lambda),$$

где $(U_0^{-1}\varphi)(z) = \varphi[k^{-1}(z)]$;

$$U_1^{-1} = I \otimes F^{-1} \otimes I : L_2(D, d\eta_\lambda) \to L_2(D, d\eta_\lambda),$$

где

$$(F^{-1}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathrm{e}^{i\xi u} du$$

обратное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$;

$$V^{-1} = I \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} V_\xi^{-1} d\xi : L_2(\mathbb{R}_+, d\eta_\lambda) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}) d\xi \to$$

$$L_2(\mathbb{R}_+, d\eta_\lambda) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2(\mathbb{C}^{n-1}) d\,\xi,$$

где

$$(V_\xi^{-1}\varphi)(z') = \left(\frac{2|\xi|}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{e}^{-|\xi||z'|^2} \varphi(z').$$

Теорема 2. *Пусть символ* $a = a(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R})$. *Тогда теплицевый оператор*

$$T_a = B_{D_{n,\lambda}} aI : A^2_\lambda(D_n) \to A^2_\lambda(D_n)$$

унитарно эквивалентен оператору

$$RT_aR^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} (\gamma_a(\xi)I)\, d\xi,$$

действующему в пространстве $\int\limits_{\mathbb{R}}^{\oplus} F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})d\xi$. *Здесь оператор*

$$\gamma_a(\xi)I : F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1}) \to F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})$$

является оператором умножения на скалярную функцию

$$\gamma_a(\xi) = \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(v)\mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda dv, \qquad \xi \in \mathbb{R}_+.$$

Доказательство. На основании теоремы 1 имеем :

$$\begin{aligned} RT_aR^* &= RB_{D_{n,\lambda}} a(y_n - |z'|^2) B_{D_{n,\lambda}} R^* = \\ &= R(R^*R)a(y_n - |z'|^2)(R^*R)R^* = \\ &= (RR^*)Ra(y_n - |z'|^2)R^*(RR^*) = Ra(y_n - |z'|^2)R^* = \\ &= R_0^* V U_1 U_0 a(y_n - |z'|^2) U_0^{-1} U_1^{-1} V^{-1} R_0 = \\ &= R_0^* V U_1 a(v) U_1^{-1} V^{-1} R_0 = R_0^* V a(v) V^{-1} R_0 = R_0^* a(v) R_0. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} R_0^* a(v) R_0 \psi(\xi, z') &= R_0^* \left\{ a(v)\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)(c(\xi))^{1/2} \mathrm{e}^{-\xi v} \psi(\xi, z') \right\} = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}_+} (c(\xi))^{1/2} \mathrm{e}^{-\xi v} P_{2\xi} \left\{ a(v)\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)(c(\xi))^{1/2} \mathrm{e}^{-\xi v} \psi(\xi, z') \right\} \frac{c_\lambda}{4} v^\lambda dv = \\ &= \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}_+} c(\xi) \mathrm{e}^{-2\xi v} a(v) \frac{c_\lambda}{4} v^\lambda dv \right\} \psi(\xi, z') = \\ &= \left\{ \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(v) \mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda dv \right\} \psi(\xi, z') = \gamma_a(\xi)\psi(\xi, z'), \end{aligned}$$

где $\xi \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, $RT_aR^* = \gamma_a(\xi)I$, где $\xi \in \mathbb{R}_+$.

Отсюда

$$RT_aR^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} (\gamma_a(\xi)I)\; d\xi.$$

Теорема доказана.

Через M обозначим C^*-алгебру, порожденную всеми теплицевыми операторами T_a, где $a = a(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, а через τ – C^*-алгебру, порожденную скалярными функциями γ_a (см. теорему 2).

Пусть $C_b(\mathbb{R}_+)$ — алгебра всех непрерывных ограниченных функций на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Следствие 1. *C^*-алгебра M коммутативна и изомоморфна C^*-подалгебре τ алгебры $C_b(\mathbb{R}_+)$. Указанный изоморфизм порожден следующим отображением образующих алгебр M и τ :*

$$\nu : T_a \to \gamma_a = \gamma(\xi).$$

Доказательство. По условию существует $K > 0$ такое, что для всех $v \in \mathbb{R}_+$ $|a(v)| \leqslant K$. Отсюда, учитывая (7), получаем

$$|\gamma_a(\xi)| \leqslant \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} K \int\limits_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda dv = K, \qquad \xi \in \mathbb{R}_+,$$

и, тем самым, следствие доказано.

Рассмотрим теперь символ

$$b = b(z') \in L_\infty(\mathbb{C}^{n-1}).$$

Теплицевы операторы с символом b, действующие в пространстве Фока $F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})$, будем обозначать через $T_b^{2\xi}$. В то же время, теплицевы операторы с символом b, действующие в пространстве Бергмана $A^2_\lambda(D_n)$, будем по-прежнему обозначать через T_b.

Теорема 3. *Теплицевый оператор T_b, действующий в пространстве $A^2_\lambda(D_n)$, унитарно эквивалентен, действующему в пространстве $\int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})d\xi$, прямому интегралу от теплицева оператора $T_b^{2\xi}$, а именно, имеет место представление:*

$$RT_bR^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} T_b^{2\xi} d\xi \qquad .$$

Доказательство. Оператор T_b унитарно эквивалентен оператору

$$\begin{aligned} RT_bR^* &= RB_{D_n,\lambda} b(z') B_{D_n,\lambda} R^* = R(R^*R)b(z')(R^*R)R^* = \\ &= (RR^*)Rb(z')R^*(RR^*) = Rb(z')R^* = R_0^* V U_1 U_0 b(z') U_0^{-1} U_1^{-1} V^{-1} R_0 = \\ &\qquad R_0^* V b(z') V^{-1} R_0 = R_0^* b(z') R_0. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&R_0^*b(z')R_0\psi(\xi,z') = R_0^*b(z')\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)(c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v}\psi(\xi,z') = \\
&\quad = \int\limits_{\mathbb{R}_+}(c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v}P_{2\xi}\left(b(z')\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)(c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v}\psi(\xi,z')\right)\frac{c_\lambda}{4}v^\lambda dv = \\
&\qquad = \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\mathrm{e}^{-2\xi v}v^\lambda dv\cdot\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)P_{2\xi}(b\psi)(\xi,z') = \\
&\qquad\quad = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)P_{2\xi}(b\psi)(\xi,z') = \left(T_b^{2\xi}\psi\right)(\xi,z'), \qquad \xi\in\mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$RT_bR^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus}T_b^{2\xi}d\xi.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Для любых символов* $a = a(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ *и* $b = b(z') \in L_\infty(\mathbb{C}^{n-1})$ *имеют место равенства:* $T_{ab} = T_aT_b = T_bT_a$ *и* $RT_{ab}R^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus}\gamma_a(\xi)T_b^{2\xi}d\xi.$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&RT_{ab}R^* = RB_{D_{n,\lambda}}abB_{D_{n,\lambda}}R^* = R(R^*R)ab(R^*R)R^* = (RR^*)(RabR^*)(RR^*) = \\
&\quad = RabR^* = R_0^*VU_1U_0a(y_n-|z'|^2)b(z')U_0^{-1}U_1^{-1}V^{-1}R_0 = R_0^*a(v)b(z')R_0.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&R_0^*a(v)b(z')R_0\psi(\xi,z') = R_0^*a(v)b(z')\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)\,(c(\xi))^{1/2}\,\mathrm{e}^{-\xi v}\psi(\xi,z') = \\
&\quad = \int\limits_{\mathbb{R}_+}(c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v}P_{2\xi}\left[a(v)b(z')\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)(c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v}\psi(\xi,z')\right]\frac{c_\lambda}{4}v^\lambda dv = \\
&= \left[\frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\int\limits_{\mathbb{R}_+}a(v)\mathrm{e}^{-2\xi v}v^\lambda dv\right]\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)P_{2\xi}b(z')\psi(\xi,z') = \gamma_a(\xi)T_b^{2\xi}, \qquad \xi\in\mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$RT_{ab}R^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+}\gamma_a(\xi)T_b^{2\xi}d\xi. \tag{8}$$

С другой стороны, согласно теореме 1, а также теоремам 2 и 3, имеем

$$RT_aT_bR^* = RT_aB_{D_{n,\lambda}}T_bR^* = RT_a\left(R^*R\right)T_bR^* = \left(RT_aR^*\right)\left(RT_bR^*\right) = \left(\gamma_a(\xi)I\right)T_b^{2\xi},$$

где $\xi \in \mathbb{R}_+$. Отсюда

$$RT_aT_bR^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \gamma_a(\xi) T_b^{2\xi} d\xi. \tag{9}$$

Из (8) и (9), тем самым, вытекает равенство:

$$T_{ab} = T_a T_b$$

Теперь коммутативность теплицевых операторов T_a и T_b следует из равенств: $T_bT_a = T_{ba} = T_{ab} = T_aT_b$. Теорема доказана.

Напомним, что C^* алгебра M, порожденная всеми теплицевыми операторами T_a, где $a = a(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, коммутативна (см. следствие 1).

Пусть теперь S — некоторое подпространство пространства $L_\infty(\mathbb{C}^{n-1})$. Обозначим через $M(S)$ унитальную алгебру, порожденную всеми, действующими в пространстве $A^2_\lambda(D_n)$, теплицевыми операторами T_b, где $b = b(z') \in S$. В отличие от алгебры M, алгебра $M(S)$, вообще говоря, не является C^*-алгеброй. $M(S)$ будет C^*-алгеброй, если подпространство S замкнуто относительно комлексного сопряжения.

Пусть $\Phi = \langle T_a, T_b \rangle$ – унитальная алгебра, порожденная всеми операторами T_a и T_b, где $a = a(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ и $b = b(z') \in L_\infty(\mathbb{C}^{n-1})$. Таким образом, алгебра Φ порождена двумя унитальными подалгебрами: M и $M(S)$.

Из следствия 1 и теоремы 4 вытекает

Следствие 2. *Алгебра Φ коммутативна тогда и только тогда, когда для каждого $\xi \in \mathbb{R}_+$ унитальная алгебра, порожденная теплицевыми операторами $T_b^{2\xi}$ с символами $b = b(z') \in S$ и действующими в пространстве Фока $F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})$, будет коммутативной.*

3. Коммутивность C^*-алгебры теплицевых операторов со специальными символами. Рассмотрим вопрос коммутативности алгебры $\Phi = \langle M, M(S) \rangle$ для некоторых частных случаев алгебры S.

Введем оператор

$$W : L_2(\mathbb{C}^{n-1}) \otimes L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda) \to L_2(\mathbb{C}^{n-1}) \otimes L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda),$$

действующий по правилу:

$$(W\psi)(z, \xi, v) = (2|\xi|)^{-\frac{n+\lambda}{2}} \psi\left(\frac{z}{\sqrt{2|\xi|}}, \xi, \frac{v}{2|\xi|}\right).$$

Непосредственная проверка показывает, что W – унитарный и его сопряженный W^* имеет вид:

$$(W^*)(y, \mu, \nu) = (W^{-1}\varphi)(y, \mu, \nu) = (2|\mu|)^{\frac{n+\lambda}{\lambda}} \varphi(y\sqrt{2|\mu|}, \mu, \nu 2|\mu|).$$

Также рассмотрим оператор

$$Q_0 : l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+) \to L_2(D, \eta_\lambda) = L_2(\mathbb{C}^{n-1}) \otimes L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda),$$

действие которого происходит следующим образом:

$$Q_0 : \{C_\alpha(\xi)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} \to \chi_+(\xi) \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} C_\alpha(\xi) e_\alpha(z) l_0(v),$$

где

$$e_\alpha(z) = (\pi^{n-1}\alpha!)^{\frac{1}{2}} z^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}} \in L_2(\mathbb{C}^{n-1}),$$

$$l_0(v) = \left(\frac{4}{c_\lambda \Gamma(\lambda+1)}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-\frac{v}{2}} \in L_2(\mathbb{R}_+, \eta).$$

Что же касается функций $C_\alpha(\xi)$, принадлежащих образу оператора Q_0, то они являются продолжением на все $\mathbb{R}$ соответствующих функций из области определения, именно, $C_\alpha(\xi) = 0$, если $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$.

Тогда сопряженный оператор

$$Q_0^* : L_2(D, \eta_\lambda) \to l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+))$$

действует по правилу :

$$Q_0^* : \varphi(z,\xi,v) \to \left\{ \chi_+(\xi) \int\limits_{\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}_+} \varphi(z,\xi,v) \overline{e_\alpha(z) l_0(v)} \eta_\lambda(v) d\nu(z) dv \right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}}.$$

Положим

$$Q = Q_0^* W U_1 U_0 : L_2(D_n, d\mu_\lambda) \to l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+)).$$

Известно [10], что

$$Q|_{A_\lambda^2(D_n)} : A_\lambda^2(D_n) \to l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+))$$

является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств, при этом имеют место равенства:

$$QQ^* = I : l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+)) \to l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+)),$$

$$Q^*Q = B_{D_n,\lambda} : L_2(D_n, d\mu_\lambda) \to A_\lambda^2(D_n).$$

Лемма 2. *Пусть функция $d(\omega) \in L_\infty(D_n)$ имеет следующий вид*

$$d = d(z', y_n - |z'|^2),$$

где $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, $y_n = \operatorname{Im}\omega_n$. Тогда для теплицевого оператора T_d, действующего в пространстве $A_\lambda^2(D_n)$, имеет место соотношение:

$$QT_dQ^* = Q_0^* d\left(\frac{z}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right) Q_0.$$

Доказательство. Непосредственно находим:

$$QT_dQ^* = QB_{D_{n,\lambda}}dB_{D_{n,\lambda}}Q^* = Q(Q^*Q)d(Q^*Q)Q^* = (QQ^*)(QdQ^*)(QQ^*) =$$
$$= Qd(z', y_n - |z'|^2)Q^* = Q_0^*WU_1U_0d(z', y_n - |z'|^2)U_0^{-1}U_1^{-1}W^{-1}Q_0 =$$
$$= Q_0^*WU_1d(z', v)U_1^{-1}W^{-1}Q_0 = Q_0^*Wd(z', v)W^{-1}Q_0 = Q_0^*d\left(\frac{z'}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right)Q_0.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь аналог теоремы 10.2 в [10] для квазипараболического символа $d = d(r, y_n - |z'|^2) \in L_\infty(D_n)$.

Теорема 5. *Пусть символ*

$$d = d(r, y_n - |z'|^2) \in L_2(D_n).$$

Тогда теплицевый оператор T_d, действующий в пространстве $A^2_\lambda(D_n)$, унитарно эквивалентен оператору умножения $\gamma_d I$, действующему в пространстве $l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+))$, именно,

$$QT_dQ^* = \gamma_d I,$$

где $\gamma_d = \{\gamma_d(\alpha, \xi)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}}$, $\xi \in \mathbb{R}_+$, при этом элементы $\gamma_d(\alpha, \xi)$ имеют следующий вид:

$$\gamma_d(\alpha, \xi) = \frac{\chi_+(\xi)}{\alpha!\Gamma(\lambda+1)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} d\left(\sqrt{\frac{r_1}{2\xi}}, \ldots, \sqrt{\frac{r_{n-1}}{2\xi}}, \frac{v}{2\xi}\right) r^\alpha e^{-(v+r_1+\cdots+r_{n-1})}v^\lambda dr dv.$$

Доказательство. На основании леммы 2 достаточно показать, что

$$Q_0^*d\left(\frac{r}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right)Q_0 = \gamma_d I.$$

Непосредственно находим:

$$Q_0^*d\left(\frac{r}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right)Q_0\{C_\beta(\xi)\}_{\beta\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} =$$
$$= Q_0^*\left[d\left(\frac{r}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right)\chi_+(\xi)\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} C_\beta(\xi)e_\beta(z)l_0(v)\right] =$$
$$= \left\{\chi_+(\xi)\int\limits_{\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}_+}\overline{e_\alpha(z)l_0(v)}\left[\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^{n-1}}\chi_+(\xi)d\left(\frac{r}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right)C_\beta(\xi)e_\beta(z)l_0(v)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\,\eta_\lambda(v)d\nu(z)dv\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} =$$

$$= \left\{ C_\alpha(\xi) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left[\frac{\chi_+(\xi)}{\alpha!\Gamma(\lambda+1)} d\left(\sqrt{\frac{r}{2\xi}}, \frac{v}{2\xi} \right) r^\alpha \mathrm{e}^{-(v+r_1+\dots+r_{n-1})} v^\lambda \right] drdv \right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n-1}_+} =$$

$$= \{\gamma_d(\alpha,\xi\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n-1}_+} \{C_\alpha(\xi)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n-1}_+}.$$

Теорема доказана.

Пусть
$$d_1 = d_1(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$$
и
$$d_2 = d_2(r_1,\dots,r_{n-1}) \in L_\infty(\mathbb{R}^{n-1}_+).$$
Тогда, согласно теореме 5,
$$QT_{d_1}Q^* = \gamma_{d_1}(\xi)I,$$
где
$$\gamma_{d_1}(\xi) = \frac{\chi_+(\xi)}{\Gamma(\lambda+1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} d_1\left(\frac{v}{2|\xi|}\right) \mathrm{e}^{-v} v^\lambda dv$$
и
$$QT_{d_2}Q^* = \widetilde{\gamma_{d_2}}(\alpha,\xi)I,$$
где
$$\widetilde{\gamma_{d_2}}(\alpha,\xi) = \frac{\chi_+(\xi)}{\alpha!} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} d_2\left(\sqrt{\frac{r_1}{2\xi}},\dots,\sqrt{\frac{r_{n-1}}{2\xi}} \right) r^\alpha \mathrm{e}^{-(r_1+\dots+r_{n-1})} dr.$$

Отметим также, что
$$\gamma_{d_1}(\xi)\cdot\widetilde{\gamma_{d_2}}(\alpha,\xi) =$$
$$= \frac{\chi_+(\xi)}{\alpha!} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} d_1\left(\frac{v}{2|\xi|}\right) d_2\left(\sqrt{\frac{r_1}{2\xi}},\dots,\sqrt{\frac{r_{n-1}}{2\xi}} \right) r^\alpha \mathrm{e}^{-(v+r_1+\dots+r_{n-1})} v^\lambda dvdr =$$
$$= \gamma_{d_1d_2}(\alpha,\xi).$$

Отсюда следует, что произведение теплицевых операторов T_{d_1} и T_{d_2} будет снова теплицевым оператором:
$$T_{d_1}T_{d_2} = T_{d_1d_2}.$$

Из вышесказанного вытекает следующая

Теорема 6. *Пусть*
$$S = \{b = b(r_1,\dots,r_{n-1}) \in L_\infty(\mathbb{R}^{n-1}_+)\}.$$
Тогда C^*-алгебра $\Phi = \langle M, M(S)\rangle$ коммутативна и является подалгеброй алгебры, порожденной теплицевыми операторами с квазипараболическими символами вида
$$d = d(r_1,\dots,r_{n-1}, y_n - |z'|^2).$$

Заключение.

1. Пространство Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(D_n)$ в области Зигеля D_n можно рассматривать (с точностью до изометрического изоморфизма) в виде прямого интеграла

$$\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi$$

пространства Фока $F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$ $\left(\subset L_2\left(C^{n-1}, d\nu_{2\xi}\right)\right)$.

2. C^*-алгебра, порожденная теплицевыми операторами

$$T_a = B_{D_n,\lambda} aI : \mathcal{A}_\lambda^2(D_n) \to \mathcal{A}_\lambda^2(D_n)$$

с символами $a = a\left(y_n - |z'|^2\right) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, коммутативна.

3. Коммутативность алгебры, порожденной теплицевыми операторами T_a и T_b, где $a = a\left(y_n - |z'|^2\right) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, $b = b(z') \in L_\infty\left(C^{n-1}\right)$, равносильна коммутативности алгебры, порожденной теплицевыми операторами $T_b^{2\xi}$, действующими в пространстве Фока $F_{2\xi}^2\left(C^{n-1}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}_+$.

1. **Vasilevski N.** Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman space / N. Vasilevski // Operator Theory: Advanced and Applications. – 2008. – Vol. 185, 417 p.
2. **Quiroga-Barranco R.** Commutative C^*-algebra of Toeplitz operators on the unit ball, I. Bargmann type transform and spectral representations of Toeplitz operators / R. Quiroda-Barranco, N. Vasilevski // Integral Equations and Operator Theory. – 2007. – Vol. 59, № 3. – P. 379–419.
3. **Bekolle D.** Reproducing properties and L_p-estimates for Bergman projections in Siegel domains of tupe, II / D. Bekolle, Kagou Tomgoua // Studia Math. – 1995. – Vol. 115, № 3. – P. 219–239.
4. **Gindikin S. G.** Analysis on homogeneous domain / S. G. Gindikin // Russian Math. Surv. – 1964. – Vol. 4, № 2. – P. 1–89.
5. **Kornyi A.** H^2 spaces of generalized half-spaces / A. Koryi, E. M. Stein // Studia Math. – 1972. – Vol. 44. – P. 379–388.
6. **Berezin F. A.** Covariant and contravariant symbols of operators / F. A. Berezin // Math. USSR Izvestia. – 1972. – № 6. – P. 1117–1151.
7. **Fock V. A.** Konfigurationstrum und zweite Quatelung / V. A. Fock // Z. Phys. – 1932. – Vol. 75. – P. 622–647.
8. **Bargmann V.** On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral tranform / V. Bargmann // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – № 3. – P. 187–214.
9. **Segal I. E.** Lectures at the Summer Seminar on Appl. Math. / I. E. Segal. – Boulder, Colorado, 1960.
10. **Vasilevski N.** Parabolic Quasi-radial Quasi-homogeneous Symbol and Commutative Algebras of Toeplitz Operators / N. Vasilevski // Operator Theory: Advanced and Applications. – 2009. – Vol. 201. – P. 553–568.

Лисенко З. М.

Алгебри, що породжені теплицевими операторами із спеціальними символами

Резюме

Розглядається ваговий простір Бергмана $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ $(\lambda > -1)$ в області Зігеля D_n, який складається з аналітичних функцій простору $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$, де

$$d\mu_\lambda = \frac{c_\lambda}{4}\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right)^\lambda d\nu(z), \quad c_\lambda = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\pi^n \Gamma(\lambda+1)},$$

$d\nu(z)$ – стандартна міра Лебега в $\mathbb{C}^n$. Описана структура $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$. А саме, простір $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ можна розглядати (з точністю до ізометричного ізоморфізму R) у вигляді прямого інтегралу

$$\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi$$

простору Фока $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, який складається з аналітичних функцій простору $L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_\alpha\right)$ $(\alpha = 2\xi)$, де $d\nu_\alpha(z') = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha\left|z'\right|^2} d\nu(z')$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Використовуючи оператор R, доведено, що кожний теплицевий оператор T_a із спеціальним обмеженим символом $a(z) = a\left(\operatorname{Im} z_n - |z'|^2\right)$, який діє у просторі $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$, унітарно еквівалентний прямому інтегралу від оператора множення $\gamma_a(\xi)I$, що діє в просторі Фока $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}_+$. Функція $\gamma_a(\xi)$ означається за формулою

$$\gamma_a(\xi) = \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{\mathbb{R}_+} a(v)\mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda \, dv.$$

Звідси випливає, що C^*-алгебра, яка породжена такими теплицевими операторами, комутативна. Показано, що C^*-алгебра, яка породжена теплицевими операторами T_a і T_b, де

$$a = a\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right) \in L_\infty(\mathbb{R}_+), \quad b = b\left(z'\right) \in L_\infty\left(\mathbb{C}^{n-1}\right),$$

комутативна тоді і лише тоді, коли для кожного $\xi \in \mathbb{R}_+$ алгебра, яка породжена теплицевими операторами $T^{2\xi}_b$, що діють у просторі $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, комутативна.

Ключові слова: простір Бергмана, область Зігеля, унітарний оператор, спряжений оператор .

Lysenko Z. M.

Algebras generated by Toeplitz operators with special symbols

Summary

We concider the weighted Bergman space $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ $(\lambda > -1)$ in the Siegel domain D_n, which consist of analytic functions of the space $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$, where

$$d\mu_\lambda = \frac{c_\lambda}{4}\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right)^\lambda d\nu(z), \quad c_\lambda = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\pi^n \Gamma(\lambda+1)},$$

$d\nu(z)$ – is standard Lebesgue measure in $\mathbb{C}^n$. We discribe the structure of $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$. A jast nemely, we can consider the space $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ (up to isometric isomorphism R) as a direct integral

$$\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi$$

of the Fock space $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, which consist of analytic functions of the space $L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_\alpha\right)$ $(\alpha = 2\xi)$, where $d\nu_\alpha(z') = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha|z'|^2} d\nu(z')$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Using the operator R, we prove that each Toeplitz operator T_a with special bounded symbol $a(z) = a\left(\operatorname{Im} z_n - |z'|^2\right)$, and acting on $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$, is unitary equivalent to the direct integral of the multiplication operator $\gamma_a(\xi)I$, acting on Fock space $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}_+$. The function $\gamma_a(\xi)$ is given by formula

$$\gamma_a(\xi) = \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(v)\mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda \, dv.$$

This implies that the C^*-algebra generated by such operators is commutative. We show that the C^*-algebra generated by Toeplitz operators T_a and T_b, where

$$a = a\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right) \in L_\infty(\mathbb{R}_+), \quad b = b\left(z'\right) \in L_\infty\left(\mathbb{C}^{n-1}\right),$$

is commutative if and only if for each $\xi \in \mathbb{R}_+$ algebra generated by Toeplitz operator $T^{2\xi}_b$, acting on the space $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, is commutative.

Key words: Bergman spaces, Siegel domain, the unitary operator, the adjoint operator.

References

1. Vasilevski, N. (2008). *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman space.* Operator Theory: Advanced and Applications. Vol. 185, 417 p.
2. Quiroga-Barranco, R., Vasilevski, N. (2007). Commutative C^*-algebra of Toeplitz operators on the unit ball, I. Bargmann type transform and spectral representations of Toeplitz operators. *Integral Equations and Operator Theory*, Vol. 59, № 3, P. 379–419.
3. Bekolle, D., Kagou Tomgoua (1995). Reproducing properties and L_p-estimates for Bergman projections in Siegel domains of tupe, II. *Studia Math.*, Vol. 115, № 3, P. 219–239.
4. Gindikin, S. G. (1964). Analysis on homogeneous domain. *Russian Math. Surv.*, Vol. 4, № 2, P. 1–89.
5. Kornyi, A., Stein, E. M. (1972). H^2 spaces of generalized half-spaces. *Studia Math.*, Vol. 44, P. 379–388.
6. Berezin, F. A. (1972). Covariant and contravariant symbols of operators. *Math. USSR Izvestia*, № 6, P. 1117–1151.
7. Fock, V. A. (1932). Konfigurationstrum und zweite Quatelung. *Z. Phys.*, Vol. 75, P. 622–647.
8. Bargmann, V. (1961). On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral tranform. *Comm. Pure Appl. Math.*, № 3, P. 187–214.
9. Segal, I. E. (1960). *Lectures at the Summer Seminar on Appl. Math.* Colorado: Boulder.
10. Vasilevski, N. (2009). Parabolic Quasi-radial Quasi-homogeneous Symbol and Commutative Algebras of Toeplitz Operators. *Operator Theory: Advanced and Applications*, Vol. 201, P. 553–568.