УДК 512.552

О. В. Зеленський, В. М. Дармосюк, М. В. Касянюк
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського,
Університет економіки, права та інформаційних технологій "КРОК"м. Київ

МІНІМАЛЬНА МАТРИЦЯ ПОКАЗНИКІВ

У роботі досліджуються мінімальні матриці показників та мінімальні вагові функції допустимого сагайдака. Знайдено обмеження для суми елементів матриці показників з одиничним сагайдаком та обмеження для суми елементів мінімальної матриці показників з сагайдаком, який має петлю в кожній вершині. Показано, що зменшення ваги простого циклу сагайдака, може привести до збільшення суми елементів матриці показників з якої одержується сагайдак. Наведено приклад, що спростовує гіпотезу про те, що для сагайдака з петлею в кожній вершині вагова функція з вагою всіх простих циклів рівною 2 є мінімальною. Доведено, що жорсткий сагайдак одержується з мінімальної матриці показників.

MSC: 16G20, 16G30.
Ключові слова: матриця показників, допустимий сагайдак матриці показників, мінімальна матриця показників .
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175542.

Вступ. Один із аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем [1]. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець [1]. Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. В [4] доводиться нежорсткість допустимого сагайдака, який має хоча б одну петлю. В [5] розглядаються вагові функції які визначають допустимі сагайдаки, з появою яких з'явилося більше можливостей для дослідження допустимих сагайдаків. Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в [6]. В [7] знайдено властивості одиничних циклів та одиничних сагайдаків, зокрема знайдено обмеження для елементів матриці показників одиничного сагайдака. В [8] досліджуються цикли допустимих сагайдаків.

Нехай $\mathcal{E}=(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathcal{Z})(M_n(\mathcal{Z})$ — це кільце матриць $n \times n$ з цілими елементами).

Означення 1. *[1] Матриця $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})$, для якої виконуються наступні умови:*

1) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для всіх $i,\ j,\ k = 1, \ldots, n$,
2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \ldots, n$,
називається матрицею показників.
Матриця показників, для якої виконується умова
3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geqslant 1$ для всіх $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $(i \neq j)$
називається зведеною матрицею показників.

Надійшла 22.04.2019

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Введемо матриці $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \quad \in M_n(\mathbb{Z})$, де E_n — одинична матриця, та $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} = \min\limits_k\{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

Означення 2. *[1] Сагайдаком зведеної матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.*

Теорема 1. *[3] Якщо $\mathcal{E}$ - зведена матриця показників, $Q = Q(\mathcal{E})$ -сагайдак матриці показників, то матриця $[Q]$ є $(0, 1)$ - матрицею суміжності сильно зв'язного сагайдака.*

Означення 3. *[1] Зведені матриці показників $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ називають еквівалентними, якщо одну можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:*

1. Відняти ціле число t від елементів i-го рядка і додати його до елементів i-го стовпця.

2. Поміняти місцями два рядки і два стовпці з такими ж номерами.

Означення 4. *[1] Сагайдак Q називається допустимим, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$, така що $Q(\mathcal{E}) = Q$.*

Теорема 2. *[3] Нехай Q^* - сильно зв'язний простий сагайдак з петлею в кожній вершині. Тоді Q^* - допустимий сагайдак.*

Означення 5. *[5] Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називають зваженим, якщо визначена функція ω: $AQ \to R$. Функцію ω називають ваговою, а її значення на стрілці – вагою стрілки.*

Сума ваг всіх стрілок шляху називається вагою шляху.

Якщо $\mathcal{E}$ - зведена матриця показників, $Q = Q(\mathcal{E})$-сагайдак матриці показників, то матриця $[Q]$ є (0, 1) - матрицею суміжності сильно зв'язного сагайдака.

Теорема 3. *[5] Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ допустимий тоді й тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega : AQ \to N \cup \varnothing$, яка задовольняє такі умови:*

1. Вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geq 2$.

2. Вага петлі в точці i менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i, довжиною $l \geq 2$.

3. Вага будь-якого циклу більша або дорівнює 1.

4. Вага петлі дорівнює 1.

5. Через кожну точку без петлі проходить цикл довжиною $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

Зауваження. *Згідно з умовами (4) та (5) через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.*

Означення 6. *[5] Вагову функцію, яка задовольняє всі умови теореми 3, називатимемо допустимою ваговою функцією.*

За сагайдаком Q і допустимою ваговою функцією ω можна побудувати матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$ таким чином: якщо сагайдак Q містить стрілку σ_{ij}, то $\alpha_{ij} = \omega(\sigma_{ij})$, у протилежному випадку α_{ij} дорівнює вазі найлегшого шляху із вершини v_i у вершину v_j.

Означення 7. *[6] Допустимий сагайдак Q називають жорстким, якщо існує з точністю до еквівалентності єдина зведена матриця показників $\mathcal{E}$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.*

Твердження 1. [7] В допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$ між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок окрім стрілок цього циклу.

Твердження 2. [7] Допустимий сагайдак Q не може містити двох стрілок σ_{ia} та σ_{ja}, де вершини i, j належать одному одиничному циклу.

Твердження 3. [7] Допустимий сагайдак $Q = (VQ, AQ)$, не може містити стрілки σ_{ai}, σ_{aj}, де вершини i, j належать деякому одиничному циклу.

Означення 8. *Сагайдак зведеної матриці показників називається одиничним, якщо його цикли утворюють сильнозв'язний сагайдак.*

Теорема 4. *[8] Матрицю показників $\mathcal{E}_2$ можна одержати з матриці $\mathcal{E}_1$ за допомогою елементарних перетворень тоді і тільки тоді, коли сагайдак $Q(\mathcal{E}_1)$ ізоморфний сагайдаку $Q(\mathcal{E}_2)$ та вага циклів сагайдака $Q(\mathcal{E}_1)$ дорівнює вазі відповідних циклів сагайдака $Q(\mathcal{E}_2)$.*

Основні результати.

Означення 9. *Для допустимого сагайдака Q виберемо матрицею показників $\mathcal{E}$ з мінімальною сумою елементів, цю суму надалі будемо позначати $F(Q)$, а таку матрицю будемо називати мінімальною матрицею показників для сагайдака Q. Допустиму вагову функцію, яка визначає матрицю $\mathcal{E}$, називатимемо мінімальною ваговою функцією для сагайдака Q.*

Лема 1. *Сума всіх попарних відстаней вершин зв'язного неорієнтованого простого графа G_n, $n \geq 2$ не перевищує $C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$, тобто $\sum\limits_{i,j=1}^{n} d(v_i, v_j) \leq C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.*

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції.

1. При $n = 2$ є тільки один зв'язний неорієнтований графа G з матрицею суміжності $[G] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. В графа є тільки одна пара вершин, тому сума дорівнює один: $1 \leq C_3^3 = 1$ нерівність виконується.

2. Припустимо, що нерівність виконується при $n \leq m$, тобто $\sum\limits_{i,j=1, i<j}^{m} d(v_i, v_j) \leq \frac{(m+1)m(m-1)}{6}$ (1)

3. Доведемо, що нерівність виконується при $n = m + 1$, тобто для графа G_{m+1}. Знайдемо в графі вершину v_0, після видалення якої, він залишиться зв'язним. Якщо граф містить цикли, то можна взяти довільну вершину цикла, якщо граф не містить циклів, то граф є деревом, тому можна взяти довільний лист дерева. Оскільки граф G зв'язний, то відсортуємо всі верщини у порядку зростання відстаней до v_0. Нехай ми одержимо послівдовність вершин $v_1, v_2, \ldots, v_m$, тоді $d(v_0, v_i) \leq i$, для довільного $i \in 1, ..., m$. Тому $\sum\limits_{i=1}^{n} d(v_0, v_i) \leq 1 + 2 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2}$.(2) Сума відстаней між вершинами графа G_{m+1} дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{m} d(v_0, v_i) + \sum\limits_{i,j=1}^{nm} d(v_i, v_j)$ З нерівностей (1) та (2) випливає, що $\sum\limits_{i=1}^{m} d(v_0, v_i) + \sum\limits_{i,j=1}^{nm} d(v_i, v_j) \leq \frac{(m+1)m(m-1)}{6} + \frac{(m+1)m}{2} = \frac{(m+2)(m+1)m}{6} = C_{m+2}^3$ Отже, за принципом математичноъ індукції нерівність виконується для всіх натуральних $n \geq 2$.

Лему доведено.

Теорема 5. *Сума елементів зведеної матриці показників з одиничним сагайдаком Q не перевищує $C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.*

Доведення. По сагайдаку Q побудуємо неорієнтований граф G, який складається з тих же вершин, що й сагайдак Q, і в якому дві вершини з'єднані ребром, якщо в сагайдаку Q вони належать одному одиничному циклу. Оскільки сагайдак Q одиничний, то граф G зв'язний. Для графа G під відстанню $d(v_i, v_j)$ між двома вершинами будемо розуміти кількість ребер у найкоротшому маршруті. Нагадаємо, що в матриці показників $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\omega, Q) = (\alpha_{ij})$ α_{ij} дорівнює вазі найлегшого шляху із вершини "i"у вершину "j який може складатися з однієї стрілки. Аналогічно α_{ji} дорівнює вазі найлегшого шляху із вершини "j"у вершину "i". Рівність $d(i, j) = k$, означає, що в сагайдаку Q існує шлях, який починається в вершині "i"проходить через вершину "j"і повертається в вершину "i який проходить по стрілкам k одинчних циклів(можливо не по всім стрілкам), тому вага цього щляху не перевищує k. Отже, $\alpha_{ij} + \alpha_{ji}$ дорівнює вазі найлегшого циклу, який проходить через вершини "i "та "j не перевищує ваги одного з циклів, який не перевищує $d(i, j)$. Тому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \leq d(i, j)$, звідси випливає, що $\sum\limits_{i,j=1, i<j}^{m} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$ $\leq \sum\limits_{i,j=1, i<j}^{m} d(i, j) \leq C_{n+1}^3$. Теорему доведено.

Лема 2. $C_n^2 \leq F(Q)$

Доведення. Нехай Q - допустимий сагайдак, $Q = Q(\mathcal{E})$. Для зведеної матриці показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$: $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ для всіх $i \neq j$. Оскільки таких пар елементів матриці показників, які симетричні відносно головної діагоналі є C_n^2, то сума елементів $\mathcal{E}$ не менше ніж $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Отже, $C_n^2 \leq F(Q)$. Лему доведено.

Теорема 6. *Для допустимого сагайдака $Q = Q(\mathcal{E})$, який є простим циклом (або без петель, або з петлею в кожній вершині) сума елементів $\mathcal{E}$ дорівнює pC_n^2 , де p-вага циклу.*

Доведення. Розглянемо сагайдак $Q = (123\dots n)$, з ваговою функцією $\omega(\sigma_{12}) =$

$$\omega(\sigma_{23} = ... = \omega(\sigma_{n-1,n})) = 0, \omega(\sigma_{n,1}) = p. \ c = (\alpha_{ij}) = \mathcal{E}(\omega, Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ p & p & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ p & p & p & ... & 0 & 0 \\ p & p & p & ... & p & 0 \end{pmatrix},$$

тобто в матриці $\mathcal{E}$ елементи нижче головної діагоналі рівні p, а інші елементи рівні 0, сума елементів $\mathcal{E}$ дорівнює pC_n^2 . За теоремою 4, всі матриці показників з яких одержується сагайдак Q з вагою циклу p еквівалентні між собою, тому їх сума елементів також дорівнює pC_n^2 . Теорему доведено.

Відомо, що для сильнозв'язного сагайдака з петлею в кожній вершині Q є допустима вагова функція ω^* , для якої вага всіх стрілок дорівнює одиниці. Знайдемо оцінку суми елементів матриці показників , яка визначається ваговою функцією ω^*.

Теорема 7. *Для довільного допустимого сагайдака з петлею в кожній вершині Q, та вагової функції $\omega^*(\sigma_{ij}) = 1$, сума елементів матриці показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) = \mathcal{E}(\omega^*, Q)$ не перевищує* $\frac{n^2(n-1)}{2}$

Доведення. Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) = \mathcal{E}(\omega^*, Q)$. Позначимо через $l(i,j)$ -найменшу кількість стрілок, по яким потрібно пройти, щоб в сагайдаку Q з вершини "i"потрапити у вершину "j". Всі вершини крім першої впорядкуємо у порядку зростання числа $l(1, v_i)$, нехай ми одержали послідовність вершин $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ тоді $l(v_0, v_i) \leq i$, для довільного $i = 1, ..., n-1$. (3) Нерівність (3) рівносильна нерівності $\alpha_{ij} \leq j$, для довільного $j = 1, ..., n-1$. Тому сума елементів першого рядка матриці $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ не перевищує $1 + 2 + .. + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$, аналогічні нерівності можна довести для інших рядків матриці $\mathcal{E}$, тому сума елементів матриці $\mathcal{E}$ не перевищує $\frac{n^2(n-1)}{2}$.

Наслідок. *Для довільного сильнозв'язного сагайдака з петлею в кожній вершині Q, $F(Q) \leq \frac{n^2(n-1)}{2}$.*

Доведення. Для сагайдака Q, допустима вагова функція $\omega^*(\sigma_{ij}) = 1$ визначає матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$, сума елементів, якої за теоремою 5 не перевищує $\frac{n^2(n-1)}{2}$. Сума елементів мінімальної матриці показників дорівнює $F(Q)$ і не перевищує суми елементів $\mathcal{E}$, тому $F(Q) \leq \frac{n^2(n-1)}{2}$.

Приклад. *Для $n = 5$. Розглянемо сагайдак Q, який є простий циклом з петлею в кожній вершині.* $[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, вагова функція* $\omega^*(\sigma_{ij}) =$

1 *визначає матрицю показників* $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *сума елементів якої дорівнює* $50 \leq \frac{5^2 \times 4}{2} = 50$.

Проте, зрозуміло , що $\mathcal{E}$ не є мінімальною матрицею показників для сагайдака Q. Побудуємо мінімальну вагову функцію для сагадака Q. Сагайдак Q містить цикл (12345), вершини якого мають петлі, тому за теоремою 1, вага циклу не менше 2, а тому за теоремою 4 $F(Q) = 2C_n^2 = 20$, $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Оцінка $F(Q) \leq \frac{n^2(n-1)}{2}$ не є точною.

Виникає питання знайти максимум $F(Q)$. Тобто для якого допустимого сагайдака Q з n вершинами $F(Q)$ має найбільше значення.

Твердження 4. Матриця показників з якої одержується жорсткий сагайдак є мінімальної матрицею показників.

Доведення. Нехай $Q = Q(\mathcal{E})$, Q- жорсткий. Припустимо протилежне, що $\mathcal{E}$ не є мінімальною матрицею показників. Тоді існує матриця показників $\mathcal{E}_{min}$, така, що $Q = Q(\mathcal{E}) = Q(\mathcal{E}_{min})$, і сума елементів матриці $\mathcal{E}_{min}$ менше ніж сума елементів матриці $\mathcal{E}$. Оскільки суми елементів матриць різні, то матриці не еквіваленті, тому отримали протиріччя, жорсткий сагайдак не може одержуватися з двох попарно не еквівалентних матриць показників. Отже, $\mathcal{E}$- мінімальна матриця показників.

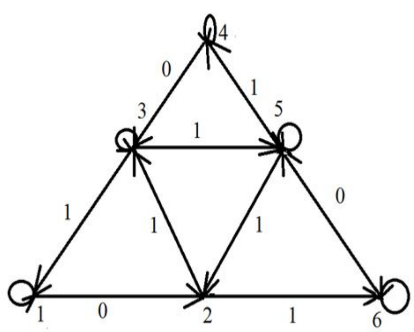
З теореми 4, випливає що матриці показників еквівалентні, тоді і тільки, коли сагайдаки ізоморфні, а вага відповідних циклів рівна. Тобто, якщо для сагадака Q ми знаємо вагу циклів, то всі матриці показників з яких Q одержується еквівалентні між собою. Оскільки еквівалентні матриці мають однакову суму елементів, то знаючи вагу циклів ми однозначно знаємо суму елементів матриць показників з яких він одержується.

Наприклад сагайдак Q з матрицею суміжності $[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, який містить три цикли $(1,2), (2,3), (1,2,3)$. Нехай вага цикла $(1,2)$ дорівнює a, і вага цикла $(2,3)$ дорівнює b. $Q = Q(\mathcal{E})$, де $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & a & a+b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, сума елементів матриці $\mathcal{E}$ дорівнює $2(a+b)$, а інші матриці яких одержується Q еквівалентні до $\mathcal{E}$ тому їх сума елементів дорівнює $2(a+b)$.

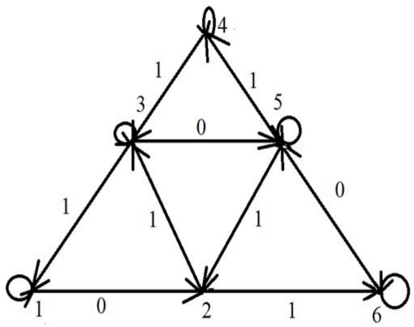
Виникла гіпотеза, що чим менше вага простих циклів, тим менше сума елементів матриці показників, з якої він одержується. Гіпотеза виявилась неправильною.

Твердження 5. Зменшення ваги простого циклу сагайдака, може привести до збільшення суми елементів матриці показників з якої сагайдак одержується.

Доведення. Розглянемо сагайдак Q, з матрицею суміжності $[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
який містить чотири простих цикла $(1, 2.3), (2, 3, 5), (2, 6, 5), (3, 5, 4)$, які відповідно мають вагу. Приклад вагової функції на рисунку.



Матриця показників для цієї вагової функції $\mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
, сума елементів якої 34. Зменшимо вагу циклу $(2, 3, 5)$ до двох. Тобто побудуємо допустиму вагову функцію, для якої вага всіх простих циклів дорівнює 2. Приклад такої функції на рисунку.



$$\mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, сума елементів якої 42. Доведемо, що $F(Q) = 34$, тобто, що $\mathcal{E}_3$-мінімальна матриця показників. В цьому доведені будемо вважати, що вага стрілки може бути від'ємна. (Оскільки вага будь-якого циклу не менше одиниці то елементарними перетвореннями завжди вагу будь-якої стрілки можна зробити додатною або нулем).

Очевидно, що якщо для допустимої вагової функції можна вагу стрілки зменшити на одиницю, так щоб вагова функція залишилось допустимою, то ця вагова функція і матриця показників, яку вона визначає точно не є мінімальною. Якщо в сагайдаку Q вага циклу (123) більше або дорівнює трьох, то зменшуючи вагу стрілки σ_{12} на одиницю ми прийдемо до матриці показників з меншою сумою. Ми одержали важливе правило, якщо в простому циклі з петлями , хоча б одна стрілка належить тільки цьому простому циклу, то для мінімальної вагової функції його вага має дорівнювати два. Аналогічно для мінімальної вагової функції вага циклів (265) і (354) також дорівнює 2. Для циклу $(2, 3, 5)$ це правило не діє, тому що в нього кожна стрілка належить, деякому іншому циклу. Варіанти коли вага циклу $(2, 3, 5)$ дорівнює два або три ми розглянули . Зауважимо, що вага циклу $(1, 2, 6, 5, 4, 1) = (2, 3, 5) + (265) + (354) - (2, 3, 5) = 6 - (2, 3, 5)$. Тому, якщо вага $(2, 3, 5)$ більше або дорівнює чотирьох, то вага $(1, 2, 6, 5, 4, 1)$ менше або дорівнює двох і не буде виконуватися нерівність вага шляху більше ніж вага стрілки. Отже, $F(Q) = 34$. Останній приклад спростував гіпотезу про те, що для сагайдака з петлею в кожній вершині вагова функція з вагою всіх простих циклів рівною 2 є мінімальною.

Висновки. В роботі знайдено оцінки для суми елементів мінімальної матриці показників. Доведено, що жорсткі сагайдаки одержуються тільки з мінімальних матриць показників. Авторами встановлено, що зменшення ваги простого циклу сагайдака, може привести до збільшення суми елементів матриці показників, з якої одержується сагайдак.

1. **Hazewinkel M.** Algebras Rings and Modules, vol. 1/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko - Kluwer Academic Publisheers, 2004.- 380 p.
2. **Hazewinkel M.** Algebras Rings and Modules, vol. 2/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko - Kluwer Academic Publisheers, 2007.- 400 p.
3. **Kirichenko V. V.** Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings/ V. V. Kirichenko , O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev // International Journal of Algebra and Computation. 2005.– Vol. 15, – № 5 - 6. – p. 1-16.
4. **Зеленський О. В.** Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників / О. В. Зеленський // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. - 2007. - №3. - С. 27-31.
5. **Журавлев В.Н.** Допустимые колчаны./ В.Н. Журавлев// Фундаментальная и прикладная математика. Том 14, 2008. 7, с. 121-128.
6. **Кириченко В.В.** О жестких колчанах /В.В. Кириченко, В. Н. Журавлёв, И. Н. Цыгановская // Фундаментальная и прикладная математика. Том 12, выпуск 8, 2006. Часть 1. С. 105 - 120.
7. **Журавльов В. М.** Одиничні сагайдаки матриці показників/ В.М. Журавльов, О.В. Зеленський, В.М. Дармосюк // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. - 2012. - №4. - С. 27-31.
8. **Зеленський О. В.** Цикли допустимих сагайдаків / О. В. Зеленський// Математичні студії. Том 42, випуск 1.С. 3-8.

Зеленський А. В., Дармосюк В. Н., Касянюк М.В.
Минимальная матрица показателей

Резюме

В работе исследуются минимальные матрицы показателей и минимальные весовые функции допустимого колчана. Найдено ограничения для суммы элементов матрицы показателей с единичным колчаном и ограничения для суммы элементов минимальной матрицы показателей с колчаном, который имеет петлю в каждой вершине. Показано, что уменьшение веса простого цикла колчана, может привести к увеличению суммы элементов матрицы показателей из которой получается колчан. Приведен пример, опровергающий гипотезу о том, что для колчана с петлей в каждой вершине весовая функция с весом всех простых циклов равным 2 является минимальной. Доказано, что жесткий колчан получается из минимальной матрицы показателей.
Ключевые слова: матрица показателей, допустимый колчан матрицы показателей, минимльная матрица показателей .

Zelenskiy O.V., Darmosiuk V.M., Kasyaniuk M.V.
Minimal exponent matrix

Summary

This paper investigates the minimal exponent matrix and minimal weight functions of the admissible quiver. Found limitations for the sum of the elements of exponent matrix with a single quiver and a limitation for the sum of the elements the minimal exponent matrix with quiver which has a loop in each the top. It is shown that reducing the weight of a simple quiver cycle, can lead to an increase in the sum of elements of the exponent matrix from which you get a quiver. An example is given that refutes the hypothesis that that for

a quiver with a loop in each vertex, the weight function with the weight of all simple cycles equal to 2 is minimal. It is proved that a rigid quiver is obtained from a minimal exponent matrix.
Key words: exponent matrix, admissible quiver, minimal exponent matrix.

References

1. **Hazewinkel M.** Algebras Rings and Modules, vol. 1/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko - Kluwer Academic Publisheers, 2004.- 380 p.
2. **Hazewinkel M.** Algebras Rings and Modules, vol. 2/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko - Kluwer Academic Publisheers, 2007.- 400 p.
3. **Kirichenko V. V.** Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings/ V. V. Kirichenko , O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev // International Journal of Algebra and Computation. 2005.– Vol. 15, – № 5 - 6. – p. 1-16.
4. **Zelenskiy O.V.** Rigid quivers of reduced exponent matrices/ O. V. Zelenskiy// Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics Mathematics - 2007. - №3. - p. 27-31.
5. **Zhuravlev V.N.** Admissible quivers/ V.N. Zhuravlev// Fundamental and Applied Mathematics. -2008. - Vol. 14, no 7.- p. 121-128.
6. **Kirichenko V. V.** On rigid quiver/ V. V. Kirichenko, V. N. Zhuravlev, I. N. Tsyganivska// Fundamental and Applied Mathematics. - 2006.- Vol 12, no 8.- p. 105 - 120.
7. **Zhuravlev V. N.** Unit quivers of exponent matrices/ V. N. Zhuravlev, O. V.Zelenskiy, V. M. Darmosiuk// Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics and Mathematics. - 2012. - №4. - p. 27-31.
8. **Zelenskiy O.V.** Cycles of admissible quivers/O.V.Zelenskiy// Mat. Stud.-2014.-42.-p. 3–8.