УДК 517.5

С. Р. Воронкова
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ПРО ЗМІНУ ЗНАКІВ ДОДАНКІВ УЗАГАЛЬНЕНОГО ГАРМОНІЧНОГО РЯДУ

Автор висловлює щиру подяку Кореновському А. О. за постановку задачі та цінні поради під час роботи.

Дана робота пов'язана з аналізом збіжності рядів, модулі доданків яких є доданками узагальненого гармонічного ряду. Розташування знаків доданків у таких рядах визначається послідовністю, поміж сусідніми номерами якої доданки зберігають знак. У межах цієї роботи досліджуються ряди з послідовністю зміни знаків доданків, визначеною довільним раціональним числом. Головним результатом є теорема, яка дає вичерпну відповідь щодо збіжності таких рядів.

MSC: 40A05.
Ключові слова: збіжність, узагальнений гармонічний ряд, номери перемикання знаку
.
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175541.

Вступ. Розглядається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha}}, \tag{1}$$

де $\varepsilon_n = \pm 1,\ 0 < \alpha \le 1$. Покладемо $n_0 = 1$, а для $k \ge 1$ визначимо послідовність n_k номерів перемикання знаку доданків ряду (11), тобто вважаємо, що $\varepsilon_n = (-1)^{k-1}$ при $n_{k-1} \le n < n_k$. Для визначення збіжності ряду (11) в [3] була отримана

Теорема 1. *При $\alpha = 1$ збіжність ряду (11) рівносильна збіжності ряду*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \ln \frac{n_k}{n_{k-1}}, \tag{2}$$

а при $0 < \alpha < 1$ ряд (11) збігається або розбігається одночасно з рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(n_k^{1-\alpha} - n_{k-1}^{1-\alpha} \right). \tag{3}$$

У [3] наведено кілька прикладів застосування теореми 1. Найбільш цікавим виявився випадок степеневого росту номерів перемикання знаків (тобто $n_k = k^{\beta}$), що обумовлює перехід до цілих частин у випадку, коли показник степеня не є натуральним. При довільних β необхідно покласти $n_k = [k^{\beta}]$, де символом $[\cdot]$ позначено цілу частину числа (тобто округлення до найближчого цілого в меншу сторону). За таких n_k доведено, що ряд (11) розбігається при $0 < \alpha \le 1 - \frac{1}{\beta}$ та збігається при $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ і $\frac{1}{\alpha} < \beta < \frac{1}{1-\alpha}$.

Надійшла 16.04.2019

При $n_k = r \cdot k$ ($r \in \mathbb{N}$) ряд (11) збігається при всіх $0 < \alpha \leq 1$ за узагальненою ознакою Лейбниця [2, с. 302]. Також за ознакою Лейбниця, очевидно, збігаються й ряди (2) та (3). Якщо ж $n_k = r \cdot k$ для $r \in \mathbb{R},\ r \geq 2$, то ряди (2) та (3) залишаються збіжними. Але, у цьому випадку числа n_k, взагалі кажучи, не є натуральними. Основний результат даної роботи складає наступна теорема, яка містить умову збіжності ряду (11) при $n_k = [r \cdot k]$ у випадку довільного раціонального r.

Теорема 2. *Нехай $n_k = [r \cdot k]$, де $r = m + p/q$ ($m, p, q \in \mathbb{N},\ p/q$ - правильний нескорочуваний дріб). Тоді для $0 < \alpha \leq 1$ ряд (11):*

1. *розбігаєтъся при парному q;*
2. *збігаєтъся при непарному q.*

Основні результати. Наведемо спочатку деякі допоміжні відомості.

Лема 1. *Із збіжності ряду (3) при деякому $\alpha < 1$ випливає збіжність ряду (2).*

Доведення. Твердження леми випливає з теореми 1 застосуванням до ряду (11) ознаки Діріхлє [2, с. 307].

Лема 2. *Нехай p/q – правильний нескорочуваний дріб. Тоді число*

$$z_t = \frac{tp}{q}. \tag{4}$$

не є натуральним при будь-якому натуральному $0 < t < q$ та справедлива рівність

$$[z_t] - [z_{t-1}] = [-z_{t-1}] - [-z_t] \equiv \chi_t, \tag{5}$$

де $\chi_t \in \{0, 1\}$.

Доведення. Припустимо, що $z_t \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що tp ділиться на q. За правилами подільності (враховуючи, що p/q - нескорочуваний дріб) t має ділитися на q. Проте, це неможливо, оскільки $1 \leq t < q$. Отже, прийшли до протиріччя з припущенням, що $z_t \in \mathbb{N}$.

Доведемо рівність (5). Оскільки числа $z_t \notin \mathbb{Z}$ і $0 < z_t - z_{t-1} = \frac{p}{q} < 1$, то можливий лише один з двох наступних випадків:

a) $[z_t] < z_{t-1} < z_t < [z_t] + 1$. У цьому випадку $-[z_t] - 1 < -z_t < -z_{t-1} < -[z_t]$;

$$[z_t] - [z_{t-1}] = [z_t] - [z_t] = 0, \quad [-z_{t-1}] - [-z_t] = -[z_t] - 1 - (-[z_t] - 1) = 0.$$

b) $[z_t] - 1 < z_{t-1} < [z_t] < z_t < [z_t] + 1$. Маємо $-[z_t] - 1 < -z_t < -[z_t] < -z_{t-1}$;

$$[z_t] - [z_{t-1}] = [z_t] - ([z_t] - 1) = 1, \quad [-z_{t-1}] - [-z_t] = -[z_t] - (-[z_t] - 1) = 1.$$

Згідно з цим отримуємо рівність (5) і на цьому завершується доведення леми.

Доведення теореми 2. Згідно з лемою 1 із збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (2). Тому для доведення твердження 1 теореми 2 достатньо довести, що розбігається ряд (2), а для доведення твердження 2, що збігається ряд (3) при будь-якому $0 < \alpha < 1$. Доведення засноване на групуванні доданків та застосуванні теореми Лагранжа [1, с. 226].

1. Нехай $q = 2l$, де $l \in \mathbb{N}$. Будемо вважати, що підсумовування в ряді (2) починається з номера $2l+1$. Для номерів $n_k = [(m+p/(2l))k]$ розглянемо часткові суми $S_{2l(N+1)}$ ($N \in \mathbb{N}$) ряду (2), об'єднуючи доданки в групи довжини $2l$. Маємо

$$S_{2l(N+1)} = \\ = \sum_{s=1}^{N} \sum_{k=2ls+1}^{2ls+2l} (-1)^{k-1} \left(\ln \left(\left[\left(m + \frac{p}{2l} \right) k \right] \right) - \ln \left(\left[\left(m + \frac{p}{2l} \right) (k-1) \right] \right) \right). \quad (6)$$

Для фіксованого s в (6) розглянемо внутрішню суму

$$\sigma_s = \sum_{k=2ls+1}^{2ls+2l} (-1)^{k-1} \left(\ln \left(\left[\left(m + \frac{p}{2l} \right) k \right] \right) - \ln \left(\left[\left(m + \frac{p}{2l} \right) (k-1) \right] \right) \right).$$

Поклавши $k = 2ls + j$, маємо

$$\sigma_s = \sum_{j=1}^{2l} (-1)^{j-1} \left(\ln \left((2lm+p)s + mj + \left[\frac{jp}{2l} \right] \right) - \right. \\ \left. - \ln \left((2lm+p)s + m(j-1) + \left[\frac{(j-1)p}{2l} \right] \right) \right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{l} (-1)^{t-1} \left(\left(\ln \left((2lm+p)s + mt + \left[\frac{tp}{2l} \right] \right) - \right. \right. \\ \left. - \ln \left((2lm+p)s + (t-1)m + \left[\frac{(t-1)p}{2l} \right] \right) \right) -$$

$$- \left(\ln \left((2lm+p)s + (2l-t+1)m + p + \left[-\frac{(t-1)p}{2l} \right] \right) - \right. \\ \left. \left. - \ln \left((2lm+p)s + (2l-t)m + p + \left[-\frac{tp}{2l} \right] \right) \right) \right). \quad (7)$$

З урахуванням позначення (4) перепишемо (7) в наступному вигляді

$$\sigma_s = \sum_{t=1}^{l} (-1)^{t-1} \left(\left(\ln \left((2lm+p)s + mt + [z_t] \right) - \right. \right. \\ \left. - \ln \left((2lm+p)s + (t-1)m + [z_{t-1}] \right) \right) -$$

$$- \left(\ln \left((2lm+p)s + (2l-t+1)m + p + [-z_{t-1}] \right) - \right. \\ \left. \left. - \ln \left((2lm+p)s + (2l-t)m + p + [-z_t] \right) \right) \right). \quad (8)$$

Застосуємо теорему Лагранжа до функції $\ln x$ на відрізках

$$\Big[\,(2lm+p)s+(t-1)m+[z_{t-1}],(2lm+p)s+mt+[z_t]\,\Big]$$

та

$$\Big[\,(2lm+p)s+(2l-t)m+p+[-z_t],(2lm+p)s+(2l-t+1)m+p+[-z_{t-1}]\,\Big].$$

Згідно з цією теоремою знайдуться такі

$$\xi_{t,s}\in\Big(\,(2lm+p)s+(t-1)m+[z_{t-1}],(2lm+p)s+mt+[z_t]\,\Big)$$

та

$$\eta_{t,s}\in\Big(\,(2lm+p)s+(2l-t)m+p+[-z_t],(2lm+p)s+(2l-t+1)m+p+[-z_{t-1}]\,\Big),$$

що

$$\ln\left((2lm+p)s+mt+[z_t]\right)-\ln\left((2lm+p)s+(t-1)m+[z_{t-1}]\right)=$$
$$=\frac{m+[z_t]-[z_{t-1}]}{\xi_{t,s}}$$

та

$$\ln\left((2lm+p)s+(2l-t+1)m+p+[-z_{t-1}]\right)-$$
$$-\ln\left((2lm+p)s+(2l-t)m+p+[-z_t]\right)=\frac{m+[-z_{t-1}]-[-z_t]}{\eta_{t,s}}.$$

Відмітимо, що

$$0\le\eta_{t,s}-\xi_{t,s}\le 2lm+p. \tag{9}$$

Для $1\le t\le l$ розглянемо окремо $[z_t]-[z_{t-1}]$ та $[-z_{t-1}]-[-z_t]$.

Якщо $t=1$, то

$$[z_1]-[z_0]=\left[\,\frac{p}{2l}\,\right]-\Big[\,0\,\Big]=0-0=0,$$

$$[-z_0]-[-z_1]=\Big[\,0\,\Big]-\left[\,-\frac{p}{2l}\,\right]=0-(-1)=1,$$

і тому

$$\ln\left((2lm+p)s+m+[z_1]\right)-\ln\left((2lm+p)s+[z_0]\right)=\frac{m}{\xi_{1,s}}$$

та

$$\ln\left((2lm+p)s+2lm+p+[-z_0]\right)-$$
$$-\ln\left((2lm+p)s+(2l-1)m+p+[-z_1]\right)=\frac{m+1}{\eta_{1,s}}.$$

При $t\ge 2$, за лемою 2 виконується (5), тому

$$\ln\left((2lm+p)s+mt+\left[\,\frac{tp}{2l}\,\right]\right)-\ln\left((2lm+p)s+(t-1)m+\left[\,\frac{(t-1)p}{2l}\,\right]\right)=$$

$$=\frac{m+\chi_t}{\xi_{t,s}}$$

та

$$\ln\left((2lm+p)s+(2l-t+1)m+p+\left[-\frac{(t-1)p}{2l}\right]\right)-$$
$$-\ln\left((2lm+p)s+(2l-t)m+p+\left[-\frac{tp}{2l}\right]\right)=\frac{m+\chi_t}{\eta_{t,s}}.$$

Отже, (8) набуває вигляду

$$\sigma_s=\frac{m}{\xi_{t,s}}-\frac{m+1}{\eta_{t,s}}+\sum_{t=2}^{l}(-1)^{t-1}(m+\chi_t)\left(\frac{1}{\xi_{t,s}}-\frac{1}{\eta_{t,s}}\right)=$$
$$=\sum_{t=1}^{l}\left[(-1)^{t-1}(m+\chi_t)\left(\frac{1}{\xi_{t,s}}-\frac{1}{\eta_{t,s}}\right)\right]-\frac{1}{\eta_{1,s}}, \quad (10)$$

де $\chi_1=0$.

Застосуємо теорему Лагранжа до функції $1/x$ на відрізках $\left[\,\xi_{t,s},\eta_{t,s}\,\right]$. В результаті знайдемо таке $\zeta_{t,s}\in\left(\,\xi_{t,s},\eta_{t,s}\,\right)$, що

$$-\left(\frac{1}{\xi_{t,s}}-\frac{1}{\eta_{t,s}}\right)=-\left(\frac{\eta_{t,s}-\xi_{t,s}}{\zeta_{t,s}^2}\right),$$

та, відповідно,

$$\sigma_s=\sum_{t=1}^{l}\left[(-1)^t(m+\chi_t)\left(\frac{\eta_{t,s}-\xi_{t,s}}{\zeta_{t,s}^2}\right)\right]-\frac{1}{\eta_{1,s}}=A_s-\frac{1}{\eta_{1,s}}.$$

З урахуванням (9)

$$\frac{\eta_{t,s}-\xi_{t,s}}{\zeta_{t,s}^2}\le\frac{2lm+p}{\zeta_{t,s}^2},$$

що означає збіжність ряду з доданками A_s. Проте, ряд з доданками $\frac{1}{\eta_{1,s}}$ розбігається, адже вони обмежені знизу $\frac{1}{s}$. Тому, остаточно, часткові суми $S_{2l(N+1)}$ ряду (2) не мають границі.

2. Нехай тепер $q=2l+1$, де $l\in\mathbb{N}$. Для номерів $n_k=[(m+p/(2l+1))k]$ розглянемо часткові суми $S_{(2l+1)(N+2)}$ $(N\in\mathbb{N})$ ряду (3). Будемо вважати, що підсумовування в ряді (3) починається з номера $2l+2$. Об'єднуючи доданки в групи довжини $2(2l+1)$, маємо

$$S_{(2l+1)(N+2)}=$$
$$=\sum_{s=1}^{N}\sum_{k=(2l+1)s+1}^{(2l+1)s+4l+2}(-1)^{k-1}\left(\left[\left(m+\frac{p}{2l+1}\right)k\right]^{1-\alpha}-\right.$$
$$\left.-\left[\left(m+\frac{p}{2l+1}\right)(k-1)\right]^{1-\alpha}\right). \quad (11)$$

Для фіксованого s в (11) розглянемо внутрішню суму

$$\sigma_s = \sum_{k=(2l+1)s+1}^{(2l+1)s+4l+2} (-1)^{k-1} \left(\left[\left(m + \frac{p}{2l+1} \right) k \right]^{1-\alpha} - \left[\left(m + \frac{p}{2l+1} \right) (k-1) \right]^{1-\alpha} \right).$$

Поклавши $k = (2l+1)s + j$, бачимо, що

$$\sigma_s = \sum_{j=1}^{4l+2} (-1)^{j-1} \left(\left(((2l+1)m+p)s + mj + \left[\frac{jp}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} - \right.$$
$$\left. - \left(((2l+1)m+p)s + m(j-1) + \left[\frac{(j-1)p}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} \right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{2l+1} (-1)^{t-1} \left(((2l+1)m+p)s + (t+2l+1)m + p + \left[\frac{tp}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} -$$
$$- \left(((2l+1)m+p)s + mt + \left[\frac{tp}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} +$$
$$+ \left(((2l+1)m+p)s + (t+2l)m + p + \left[\frac{(t-1)p}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} -$$
$$- \left(((2l+1)m+p)s + m(t-1) + \left[\frac{(t-1)p}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha}. \quad (12)$$

Для функції $x^{1-\alpha}$, згідно з теоремою Лагранжа, існують такі

$$\mu_{t,s} \in \left(((2l+1)m+p)s + tm + \left[\frac{tp}{2l+1} \right], \right.$$
$$\left. ((2l+1)m+p)s + (t+2l+1)m + p + \left[\frac{tp}{2l+1} \right] \right),$$

$$\nu_{t,s} \in \left(((2l+1)m+p)s + (t-1)m + \left[\frac{(t-1)p}{2l+1} \right], \right.$$
$$\left. ((2l+1)m+p)s + (t+2l)m + p + \left[\frac{(t-1)p}{2l+1} \right] \right),$$

що

$$\left(((2l+1)m+p)s + (t+2l+1)m + p + \left[\frac{tp}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} -$$
$$- \left(((2l+1)m+p)s + tm + \left[\frac{tp}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} = (1-\alpha) \frac{(2l+1)m+p}{\mu_{t,s}^{\alpha}},$$

$$\left(((2l+1)m+p)s+(t+2l)m+p+\left[\frac{(t-1)p}{2l+1}\right]\right)^{1-\alpha}-$$
$$-\left(((2l+1)m+p)s+(t-1)m+\left[\frac{(t-1)p}{2l+1}\right]\right)^{1-\alpha}=(1-\alpha)\frac{(2l+1)m+p}{\nu_{t,s}^{\alpha}}.$$

Відмітимо, що

$$0\le\mu_{t,s}-\nu_{t,s}\le 2(l+1)m+p+2. \tag{13}$$

Далі до функції $x^{-\alpha}$, застосуємо теорему Лагранжа на відрізках $[\,\nu_{t,s},\mu_{t,s}\,]$. Згідно з цією теоремою, знайдуться такі $v_{t,s}\in(\nu_{t,s},\mu_{t,s})$, що

$$-\left(\nu_{t,s}^{-\alpha}-\mu_{t,s}^{-\alpha}\right)=\alpha(\mu_{t,s}-\nu_{t,s})v_{t,s}^{-\alpha-1},$$

$$\sigma_s=\alpha(1-\alpha)\sum_{t=1}^{l}(-1)^t\big((2l+1)m+p\big)\frac{\mu_{t,s}-\nu_{t,s}}{v_{t,s}^{1+\alpha}}.$$

Оскільки справедлива нерівність (13), то

$$\frac{\mu_{t,s}-\nu_{t,s}}{v_{t,s}^{1+\alpha}}\le\frac{2(l+1)m+p+2}{v_{t,s}^{1+\alpha}}.$$

А тому $S_{(2l+1)(N+2)}=\sum\limits_{s=1}^{N}\sigma_s$ збігається. Оскільки часткові суми інших порядків відрізняються від $S_{(2l+1)(N+2)}$ не більш ніж на $2(2l+1)-1$ доданків, кожен з яких прямує до нуля, то ряд (3) збігається.

Висновки. Нам невідомі умови збіжності ряду (11) у випадку $n_k=[r\cdot k]$ при ірраціональному r.

Список літератури

1. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. / Г. М. Фихтенгольц. Т.I. – М.: Физматлит, 1962. – 600 с.
2. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. / Г. М. Фихтенгольц. Т.II. – М.: Физматлит, 1970. – 800 с.
3. **Воронкова С. Р.** Про збіжність узагальненого гармонічного ряду при зміні знаків його доданків. // Дослідження в математиці та механіці. / Воронкова С.Р. – 2018. – Т. 23, вип. 1 (31). – с. 43–51.

Воронкова С. Р.

Об изменении знаков слагаемых обобщенного гармонического ряда

Резюме

Данная работа связана с анализом сходимости рядов, модули слагаемых которых соответствуют слагаемым обобщенного гармонического ряда. Расположение знаков слагаемых в таких рядах определяется последовательностью, между соседними номерами которой слагаемые сохраняют знак. В рамках этой работы исследуются ряды с последовательностью изменения знаков слагаемых, определенной произвольным рациональным числом. Главным результатом является теорема, которая дает исчерпывающий ответ о сходимости таких рядов.

Ключевые слова: сходимость, обобщенный гармонический ряд, номера переключения знака .

Voronkova S. R.

ABOUT CHANGING THE SIGNS OF SUMMANDS OF GENERALIZED HARMONIC SERIES

Summary

This work is connected with the analysis of the convergence of the series, the terms of which do not have a fixed sign, and the absolute values of this terms correspond to the terms of the generalized harmonic series. The arrangement of the signs of the summands is determined by the sequence of numbers, between adjacent numbers of which the summands have already same sign. In the framework of this work, we study series with a sequence of changes in the signs of the terms defined by an arbitrary rational number. The main result is a theorem that gives an exhaustive answer about the convergence of such series.

Key words: convergence, generalized harmonic series, numbers of sign switching.

REFERENCES

1. Fikhtengolz, G. M. (1962). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. I.* Moscow: Fizmatlit, 600 p.
2. Fikhtengolz, G. M. (1970). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. II.* Moscow: Fizmatlit, 800 p.
3. Voronkova S. R. (2018). *Pro zbijnist uzagalnenogo garmonichnogo ryadu pri zmini znakiv iyogo dodankiv [About convergence of the generalized harmonic series when the signs of its summands are changed]// Doslidjennya v matematici i mehanici [Researches in mathematics and mechanics]* – 2018. – V. 23, issue 1 (31). – p. 43–51.