УДК 519.651; 536.423; 538.9534

С. Ю. Ушкац, М. В. Ушкац, А. Н. Алексеев
Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

ГРУППОВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ МОДЕЛИ РЕШЕТОЧНОГО ГАЗА

Финансовая поддержка работы осуществлялась Министерством образования и науки Украины в рамках выполнения г/б НИР № 0117U000348.

В работе предлагается новый метод определения приводимых групповых интегралов высоких порядков для известной статистической модели решеточного газа на основе теоремы Коши—Адамара и недавно полученной точной информации о радиусе сходимости вириальных разложений для давления и плотности по степеням активности. По сравнению с предыдущими исследованиями (в которых весь ряд приводимых групповых интегралов определялся только на основе очень ограниченного числа неприводимых интегралов низких порядков) предложенный комбинированный метод аппроксимации приводимых групповых интегралов дает теоретические значения давления в точках насыщения и кипения существенно ближе друг к другу и к известному точному решению Ли—Янга для двумерного решеточного газа.

MSC: 41A25, 41A60, 70F45, 82B20, 82B26.
Ключевые слова: решеточный газ, вириальный ряд, групповой интеграл, теорема Коши—Адамара, радиус сходимости .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149707.

Введение. Одной из широко использующихся в статистической механике упрощенных моделей вещества является решеточный газ, частицы которого могут занимать только строго определенные положения в пространстве (ячейки периодической пространственной решетки) без каких-либо ограничений на значения их вектора скорости. Иными словами, решеточный газ представляет собой термодинамическую систему с дискретным конфигурационным пространством и непрерывным пространством импульсов. С моделью решеточного газа формально связана и широко известная в статистической механике задача Изинга [1] (микроскопическая теория намагничивания).

Если интерес к задаче Изинга обусловлен в основном исследованиями критических явлений (фазовых переходов II рода), то модель решеточного газа предоставляет, по сути, единственный на сегодня пример строгого (т.е. без привлечения значительных «нефизических» упрощений — таких, например, как аппроксимация среднего поля [2]) статистического описания конденсации вещества (фазового перехода I рода как превращения газообразного состояния в конденсированное). Речь идет об известном решении Ли и Янга [3] для двумерного решеточного газа, в котором абсолютно «твердые» частицы притягивают только своих ближайших «соседей». Несмотря на свою значительную упрощенность, этот так называемый Square-Well потенциал (потенциал взаимодействия в виде прямоугольной ямы) относят к классу реалистичных моделей взаимодействия, т.е.

Получена 18.07.2018

таких, которые учитывают как притяжение, так и отталкивание между частицами.

С другой стороны, описанный пример касается описания только самого фазового перехода (решение Ли—Янга [3] для заданной температуры определяет только параметры перехода: давление, активность и плотность в точках насыщения и кипения) и не дает точной информации о поведении системы вне области конденсации, т.е. в газообразном и жидком состояниях.

Некоторые успехи в статистическом описании как газообразных состояний в окрестности точки насыщения, так и начала процесса конденсации непосредственно за этой точкой были достигнуты недавно на основе нового подхода к групповому разложению Майера [4] для статистической суммы в форме как приводимых [5], так и неприводимых [6, 7] групповых интегралов. К сожалению, все эти возможности пока остаются чисто теоретическими, так как определение соответствующих групповых интегралов высоких порядков все еще остается серьезной технической проблемой. Несмотря на качественно «физическое» поведение полученных теоретических изотерм, на количественном уровне уравнения с ограниченным набором известных групповых интегралов дают результаты, существенно отличающиеся от данных экспериментов или компьютерных симуляций. Если для некоторых, наиболее широко используемых, непрерывных моделей вещества (таких, например, как модели Леннард—Джонса [8], Морзе [9] и др.) уже были предложены различные аппроксимации всего бесконечного вириального ряда групповых интегралов [10,11], то данные для решеточного газа пока остаются очень ограниченными.

Совсем недавно [12] было получено строгое выражение для активности решеточного газа в области фазового перехода и доказано, что уравнения с истинно бесконечным числом вириальных коэффициентов (групповых интегралов) должны давать точное совпадение значений давления при подходе к фазовому переходу как со стороны газообразных состояний (т.е. в точке насыщения), так и со стороны конденсированных состояний (т.е. в точке кипения). На практике же, значения давления в точках насыщения и кипения, рассчитанные на основе ограниченного числа известных групповых интегралов [13], сильно отличаются друг от друга и от точного решения Ли – Янга [3].

В данной работе предлагается совершенно новый способ определения групповых интегралов высоких порядков на основе информации про активность фазового перехода решеточного газа, который, хоть и является довольно приближенным, но приводит к значительно лучшей сходимости результатов (и существенно приближает их к точному решению Ли - Янга) по сравнению с существующими подходами.

Основные результаты

1. Определение групповых интегралов на основе теоремы Коши – Адамара. Групповое разложение Майера [4] для большого канонического ансамбля позволяет непосредственно выразить логарифм большой статистической суммы (давление P) и его производную по химическому потенциалу μ (плотность числа частиц $\rho = N/V$) в виде рядов по степеням активности $z = \lambda^{-3} \exp(\mu/k_B T)$ (где $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$ – длина волны де Бройля частиц):

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{P}{k_BT} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \\ \rho &= \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^n \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Для модели решеточного газа существует формальная симметрия гамильтониана по отношению к замене частиц на «дырки» (пустые ячейки решетки) [14] и на основе этой симметрии, сравнительно недавно [15], были получены разложения для давления и плотности числа дырок $\rho' = \rho_0 - \rho$ (ρ_0 соответствует плотной упаковке)

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{P}{k_BT} &= \rho_0 \left(\tfrac{u_0}{k_BT} + \ln \tfrac{\rho_0}{\eta}\right) + \sum_{n\geqslant 1} b_n \eta^n \\ \rho &= \rho_0 - \sum_{n\geqslant 1} n b_n \eta^n \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

по степеням обратной активности

$$\eta = \frac{\rho_0^2}{z} \exp\left(\frac{2u_0}{k_BT}\right).$$

Точность обоих уравнений (1) и (2) напрямую зависит от точности определения всего бесконечного ряда приводимых групповых интегралов $\{b_n\}$ [4] для заданной температуры T. В случае приближенного или ограниченного набора этих интегралов точность уравнений (1) и (2) будет максимальной в самых разреженных ($\rho \to 0$) и наиболее плотных ($\rho \to \rho_0$) состояниях соответственно.

Недавно в работе [12] было показано, что фазовому переходу решеточного газа соответствует значение активности

$$z_0 = \rho_0 \exp\left(\frac{u_0}{k_BT}\right), \tag{3}$$

где величина u_0 определяется как потенциальная энергия одной частицы в состоянии плотной упаковки.

При $z = z_0$ активность в уравнении (1) совпадает с обратной активностью η в уравнении (2), что соответствует равенству химического потенциала в различных фазах и является одним из термодинамических условий фазового перехода (правило Максвелла). Кроме того, величина z_0 из (3) является радиусом сходимости соответствующих серий в уравнениях (1) и (2) (по степеням z и η соответственно), и оба уравнения при этом дают разрыв (скачок) плотности [5,13] при строго одинаковом давлении [12], что также отвечает известным признакам фазовых переходов I рода.

К сожалению, все эти свойства уравнений (1) и (2) на сегодня имеют только теоретическое обоснование [12], а любые практические расчеты на их основе дают результаты, существенно отличающиеся от теории. Дело в том, что в традиционном методе расчета приводимых групповых интегралов $\{b_n\}$ используются уже известные значения неприводимых групповых интегралов $\{\beta_k\}$ (вириальных коэффициентов) [4], число которых остается все еще очень ограниченным. Например, для модели решеточного газа Ли—Янга были определены (в виде точной функциональной зависимости от температуры) только неприводимые интегралы до шестого порядка (вириальные коэффициенты до седьмого порядка) [15]. В принципе, на основе такого конечного набора неприводимых интегралов $\{\beta_k\}$ можно рассчитать приводимые интегралы сколь угодно больших порядков (до тысяч и даже десятков тысяч, как это и было сделано в работе [13]), но по-настоящему точными будут при этом $\{b_n\}$ только до того же самого седьмого порядка ($n \leqslant k+1$), а значения всех остальных интегралов ($n > k+1$) будут уже очень приближенными (полученными в предположении, что все неприводимые интегралы порядков $k > 6$ просто равны нулю, что не отвечает действительности, так как они остаются просто неизвестными). Несмотря на то, что уравнения (1) и (2) с таким большим, но приближенным набором приводимых интегралов все-таки демонстрируют поведение, соответствующее теории на качественном уровне (дают скачок плотности при постоянном давлении), количественные результаты пока остаются далекими от ожидаемых (см. пунктирные линии на рис. 1: активность перехода существенно отличается от теоретической z_0, а величины постоянного давления в уравнениях (1) и (2) очень сильно отличаются как друг от друга, так и от точного решения Ли—Янга [3]). Исследования, проведенные в работе [13], показали, что с ростом порядка известных групповых интегралов расчетные изотермы постепенно приближаются к точному решению, но эта сходимость на практике оказалась очень медленной.

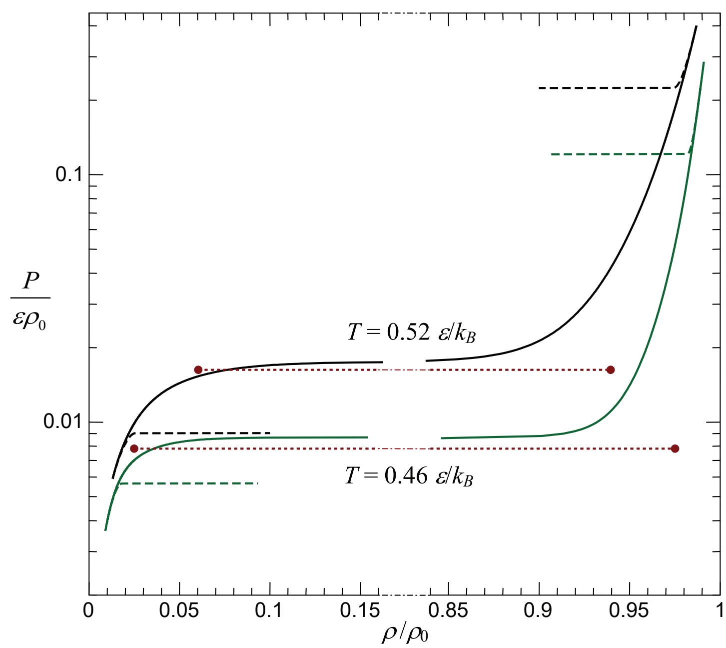

Рис 1. Изотермы уравнений (1) (слева) и (2) (справа) модели решеточного газа Ли—Янга с приводимыми интегралами до порядка $n = 10000$, рассчитанными только на основе первых шести неприводимых интегралов (пунктир) и с использованием уравнения (5) (сплошная линия). Точки соответствуют точным параметрам фазового перехода [3]

С другой стороны, точная информация о радиусе сходимости рядов по степеням активности (или обратной активности) предоставляет возможность определения групповых интегралов $\{b_n\}$ (как степенных коэффициентов этих рядов) очень высоких порядков абсолютно независимо от информации о неприводимых интегралах. В книге Майеров [4], как и в других работах [5–7, 12], связанных с групповым разложением статистической суммы, показано, что активность фазового перехода является в точности точкой сингулярности ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n z^n. \tag{4}$$

Несмотря на то, что ряды для плотности $\left(\sum n b_n z^n\right)$ и давления $\left(\sum b_n z^n\right)$ в (1) и (2) тоже должны расходиться непосредственно справа от сингулярности ряда (4) (благодаря тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$), уравнение (3) должно выражать точный радиус сходимости именно для ряда (4) или ряда $\sum n^2 b_n z^{n-1}$, где степень активности уменьшена на единицу с целью сделать ряд безразмерным. Тогда согласно теореме Коши—Адамара [16],

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 b_n\right) = z_0^{-(n-1)},$$

что, в свою очередь, позволяет определить приводимый групповой интеграл достаточно высокого порядка n:

$$b_n \approx n^{-2} z_0^{-(n-1)}. \tag{5}$$

2. Результаты расчетов для модели решеточного газа Ли—Янга. Для определения достаточно большого ряда приводимых групповых интегралов $\{b_n\}$ решеточного газа (с целью использования их в расчетах изотерм с помощью уравнений (1) и (2) со стороны газообразных и конденсированных состояний соответственно) использовались два различных подхода: как традиционный, так и основанный на уравнении (5).

«Традиционный» подход означает вычисление приводимого интеграла любого порядка n на основе известного ряда неприводимых интегралов $\{\beta_k\}$ с помощью недавно полученного рекурсивного соотношения [5, 13]:

$$n^2 b_n = B_{n,n-1}, \tag{6}$$

где

$$B_{n,i} = n \sum_{k=1}^{i} \frac{k}{i} \beta_k B_{n,i-k}.$$

Другой подход заключался в том, что с помощью рекурсивного соотношения (6) вычислялись приводимые интегралы только до порядка, соответствующего набору известных неприводимых интегралов ($n \leqslant k+1$), а значения приводимых интегралов всех более высоких порядков определялись уже уравнением (5) (т. е. на основе теоремы Коши—Адамара).

Изотермы уравнений (1) и (2) с различными наборами приводимых групповых интегралов модели решеточного газа Ли—Янга $\{b_n\}$ до $n = 10000$ для двух докритических температур представлены на Рис. 1. Пунктиром показаны изотермы, где весь набор приводимых интегралов определялся рекурсивным соотношением (6) на основе набора первых шести неприводимых интегралов $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\}$. Сплошная линия соответствует набору $\{b_n\}$, где на основе того же набора неприводимых интегралов определялись только $\{b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$, а все остальные (до $n = 10000$) — с использованием уравнения (5). На этом же рисунке горизонтальные отрезки показывают точное решение Ли—Янга [3] для рассмотренных температур.

Наблюдаемая разница в поведении изотерм по мере приближения к области фазового перехода является принципиальной. Изотермы уравнений (1) и (2) с набором приводимых интегралов, для определения которых использовалось уравнение (5), хоть и не совпадают с решением Ли—Янга в точности, но дают значения давления при фазовом переходе принципиально более близкие друг к другу и к точному решению по сравнению с изотермами, где весь набор $\{b_n\}$ определялся с помощью соотношения (6).

Эти результаты вполне объяснимы: уравнение (5), по сути, гарантирует расходимость рядов по степеням активности в (1) и (2) (т.е. скачок плотности или фазовый переход) при значении активности z_0 из (3), которое в точности соответствует решению Ли—Янга. С учетом того, что хотя бы несколько первых приводимых интегралов также определены точно, совсем не удивительно, что значения давления и плотности в точках насыщения и кипения тоже оказываются близки к точному решению.

С другой стороны, не такие существенные как полученные ранее (при «традиционном» определении групповых интегралов), но все еще заметные отличия от точного решения тоже довольно легко объяснимы: в наборе $\{b_n\}$ теперь точно определяются только несколько первых интегралов и асимптотические значения интегралов очень высоких порядков, в то время как значения $\{b_n\}$ «средних» порядков задаются очень приблизительно (в абсолютно необоснованном предположении, что они должны определяться тем же асимптотическим выражением (5), что и интегралы высоких порядков).

Заключение.

В работе показано, как установленная недавно [12] для модели решеточного газа точная информация о радиусе сходимости [см. уравнение (3)] вириальных рядов по степеням активности и обратной активности [см. уравнения (1) и (2)] позволяет определить приводимые групповые интегралы $\{b_n\}$ высоких порядков без использования каких-либо дополнительных данных [см. уравнение (5)].

Непосредственные расчеты показали, что уравнения состояния решеточного газа с определенным таким образом [т.е. с использованием уравнения (5)] набором приводимых интегралов принципиально точнее описывают состояния, близкие к фазовому переходу (в окрестностях точек насыщения и кипения), по сравнению с уравнениями, где весь набор интегралов $\{b_n\}$ (на практике, просто большой набор) определяется только на основе ограниченного набора известных неприводимых интегралов (вириальных коэффициентов).

Несмотря на то, что предложенный метод определения приводимых интегралов все еще является приближенным (по сути, точно определяются только несколько первых приводимых интегралов и интегралы самых высоких порядков), он может иметь большие перспективы для дальнейшего развития и уточнения.

Важным является уже сам факт того, что при определении вириального ряда существуют возможности «двигаться» одновременно с двух направлений: как со стороны низких порядков, так и бесконечных. В перспективе дальнейшее повышение точности становится возможным уже только за счет более «реалистичных» аппроксимаций групповых интегралов «средних» порядков. Кроме того, несмотря на то, что в данной работе рассматривались исключительно уравнения с приводимыми групповыми интегралами, некоторые дополнительные возможности могут открыться при исследовании соответствующей асимптотики строго связанных с ними неприводимых интегралов (или вириальных коэффициентов).

Также можно отметить то, что представленные в работе результаты относятся пока только к специфической модели двумерного решеточного газа, для которой существует точное решение Ли—Янга, хотя сами по себе базовые уравнения (3) и (5) остаются абсолютно применимыми и для более сложных моделей, а это, в свою очередь, тоже открывает дополнительные перспективы для дальнейших исследований.

1. **Ising E.** Contribution to the Theory of Ferromagnetism / E. Ising // Z. Phys. – 1925. – V. 31 – P. 253–258.
2. **Lebowitz J. L.** Rigorous Treatment of the Van Der Waals-Maxwell Theory of the Liquid-Vapor Transition / J. L. Lebowitz, O. Penrose // Journal of Mathematical Physics – 1966. – V. 7, №. 1 – P. 98-113.
3. **Lee T. D.** Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model / T. D. Lee, C. N. Yang // Phys. Rev. – 1952. – V. 87, №. 3 – P. 410–419.
4. **Mayer J. E.** Statistical Mechanics / J. E. Mayer, M. G. Mayer – N.–Y.: John Wiley, 1977. – 544 p.
5. **Ushcats M. V.** Divergence of activity expansions: Is it actually a problem? / M. V. Ushcats, L. A. Bulavin, V. M. Sysoev, S. Y. Ushcats // Phys. Rev. E – 2017. – V. 96, №. 6 – P. 062115(4).
6. **Ushcats M. V.** Equation of State Beyond the Radius of Convergence of the Virial Expansion / M. V. Ushcats // Phys. Rev. Lett. – 2012. – V. 109, №. 4 – P. 040601(4).
7. **Ushcats M. V.** Statistical theory of condensation – Advances and challenges / M. V. Ushcats, L. A. Bulavin, V. M. Sysoev, V. Yu. Bardik, A. N. Alekseev // Journal of Molecular Liquids – 2016. – V. 224, Part A – P. 694 - 712.
8. **Lennard-Jones J. E.** On the Determination of Molecular Fields. I. From the Equation of State of a Gas / J. E. Lennard-Jones // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science – 1924. – V. 106, №. 738 – P. 463-477.
9. **Morse P. M.** Diatomic Molecules According to the Wave Mechanics. II. Vibrational Levels / P. M. Morse // Phys. Rev. – 1929. – V. 34, №. 1 – P. 57–64.
10. **Ushcats M. V.** Communication: Low-temperature approximation of the virial series for the Lennard-Jones and modified Lennard-Jones models / M. V. Ushcats // The Journal of Chemical Physics – 2014. – V. 141, №. 10 – P. 101103(4).
11. **Ushcats M. V.** Virial coefficients of Morse potential / M. V. Ushcats, S. Y. Ushcats, A. A. Mochalov // Ukrainian Journal of Physics – 2016. – V. 61, №. 2 – P. 160-167.

12. **Ushcats M. V.** Evidence for the first-order phase transition at the divergence region of activity expansions / M. V. Ushcats, L. A. Bulavin // Phys. Rev. E – 2018. – (submitted).

13. **Ushcats M. V.** Lattice gas condensation and its relation to the divergence of virial expansions in the powers of activity / M. V. Ushcats, L. A. Bulavin, V. M. Sysoev, S. Y. Ushcats // Ukrainian Journal of Physics – 2017. – V. 62, №. 6 – P. 533-538.

14. **Ushcats M. V.** High-density equation of state for a lattice gas / M. V. Ushcats // Phys. Rev. E – 2015. – V. 91, №. 5 – P. 052144(4).

15. **Ushcats M. V.** Virial and high-density expansions for the Lee-Yang lattice gas / M. V. Ushcats, L. A. Bulavin, V. M. Sysoev, S. Y. Ushcats // Phys. Rev. E – 2016. – V. 94, №. 1 – P. 012143(5).

16. **Hadamard J.** Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor / J. Hadamard // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées – 1892. – V. 8, №. 4 – P. 101-186.

Ушкац С. Ю., Ушкац М. В., Алексеев О. М.
Групові інтеграли високих порядків для моделі ґраткового газу

Резюме

У роботі запропоновано новий метод визначення звідних групових інтегралів високих порядків для відомої статистичної моделі ґраткового газу на основі теореми Коші—Адамара та нещодавно отриманої точної інформації стосовно радіуса збіжності віріальних розкладів для тиску й густини за степенями активності. У порівнянні з попередніми дослідженнями (в яких увесь ряд звідних групових інтегралів визначався лише на основі дуже обмеженого числа незвідних інтегралів низьких порядків) запропонований комбінований метод апроксимації звідних групових інтегралів дає теоретичні значення тиску в точках насичення й кипіння суттєво ближчі одне до одного та до розв'язку Лі—Янга для двовимірного ґраткового газу.
Ключові слова: ґратковий газ, віріальний ряд, груповий інтеграл, теорема Коші—Адамара, радіус збіжності .

Ushcats S. Y., Ushcats M. V., Alekseev A. N.
High-order cluster integrals for the lattice-gas model

Summary

In the paper, for the known statistical lattice-gas model, a new method is proposed to define the high-order reducible cluster integrals on the basis of the Cauchy–Hadamard theorem and recently established strict information about the convergence radius of the virial expansions for pressure and density in powers of activity. Compared with previous studies (where the whole set of reducible cluster integrals were evaluated on the basis of the extremely limited number of low-order irreducible integrals), the proposed complex method to approximate the reducible cluster integrals yields the theoretical values of pressure at the saturation and boiling points considerably close to each other as well as to the Lee–Yang solution for the two-dimensional lattice gas.
Key words: lattice gas, virial series, cluster integral, Cauchy-Hadamard theorem, radius of convergence .

References

1. Ising, E. (1925). Contribution to the Theory of Ferromagnetism. *Z. Phys.*, Vol. 31, P. 253–258.
2. Lebowitz, J. L., Penrose, O. (1966). Rigorous Treatment of the Van Der Waals-Maxwell Theory of the Liquid-Vapor Transition. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 7, №. 1, P. 98-113.
3. Lee, T. D., Yang, C. N. (1952). Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model. *Phys. Rev.*, Vol. 87, №. 3, P. 410–419.
4. Mayer, J. E. (1977). *Statistical Mechanics* New-York: John Wiley, 544 p.
5. Ushcats, M. V., Bulavin, L. A., Sysoev, V. M., Ushcats, S. Y. (2017). Divergence of activity expansions: Is it actually a problem? *Phys. Rev. E*, Vol. 96, №. 6, P. 062115(4).
6. Ushcats, M. V. (2012). Equation of State Beyond the Radius of Convergence of the Virial Expansion. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 109, №. 4, P. 040601(4).
7. Ushcats, M. V., Bulavin, L. A., Sysoev, V. M., Bardik, V. Yu., Alekseev, A. N. (2016). Statistical theory of condensation – Advances and challenges. *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 224, Part A, P. 694 - 712.
8. Lennard-Jones, J. E. (1924). On the Determination of Molecular Fields. I. From the Equation of State of a Gas. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, Vol. 106, P. 463-477.
9. Morse, P. M. (1929). Diatomic Molecules According to the Wave Mechanics. II. Vibrational Levels. *Phys. Rev*, Vol. 34, №. 1, P. 57–64.
10. Ushcats, M. V. (2014). Communication: Low-temperature approximation of the virial series for the Lennard-Jones and modified Lennard-Jones models. *The Journal of Chemical Physics*, V. 141, №. 10, P. 101103(4).
11. Ushcats, M. V., Ushcats, S. Y., Mochalov, A. A. (2016). Virial coefficients of Morse potential. *Ukrainian Journal of Physics*, Vol. 61, №. 2, P. 160-167.
12. Ushcats, M. V., Bulavin, L. A. (2018). Evidence for the first-order phase transition at the divergence region of activity expansions. *Phys. Rev. E*, (submitted).
13. Ushcats, M. V., Bulavin, L. A., Sysoev, V. M., Ushcats, S. Y. (2017). Lattice gas condensation and its relation to the divergence of virial expansions in the powers of activity. *Ukrainian Journal of Physics*, Vol. 62, №. 6, P. 533-538.
14. Ushcats, M. V. (2015). High-density equation of state for a lattice gas. *Phys. Rev. E*, V. 91, №. 5, P. 052144(4).
15. Ushcats, M. V., Bulavin, L. A., Sysoev, V. M., Ushcats, S. Y. (2016). Virial and high-density expansions for the Lee-Yang lattice gas. *Phys. Rev. E*, Vol. 94, №. 1, P. 012143(5).
16. Hadamard, J. (1892). Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Vol. 8, №. 4, P. 101-186.