УДК 517.911.5

Н. В. Скрипник
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

СХЕМА ПОЛНОГО УСРЕДНЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЧЕТКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В ТЕРМИНАХ R-РЕШЕНИЙ

В работах Т. А. Комлевой, А. В. Плотникова, Л. И. Плотниковой доказана возможность применения метода усреднения на конечном промежутке для дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр в терминах множеств решений (с переходом к отдельным α-решениям при доказательстве), а в работах Н. В. Скрипник аналогичные результаты получены для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью. В дальнейшем в работах Т. А. Комлевой, А. В. Плотникова введено понятие R-решения дифференциального включения с нечеткой правой частью и обоснована возможность применения метода усреднения в терминах R-решений (без перехода к α-решений при доказательстве). В данной статье эти результаты перенесены на импульсный случай, а именно, введено понятие R-решения и обоснована возможность применения схемы полного усреднения для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью в терминах R-решений.
MSC: 03E72, 34A37, 34A60, 34C29.
Ключевые слова: нечеткие системы, дифференциальные включения, импульсы, метод усреднения, R-решение.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149706.

Введение. Нечеткие системы — очень важная тема как с теоретической точки зрения, так и с практической. Они применяются, например, в автомобильной, аэрокосмической и транспортной промышленности, в строительстве, при создании гидравлических и популяционных моделей, в сфере финансов, анализа и принятия управленческих решений, при прогнозировании разных экономических, политических, биржевых ситуаций и тому подобное. Нечеткие системы являются естественным способом моделирования динамических систем в условиях неопределенности. Формализация нечетких понятий позволяет приближенно описывать поведение систем настолько сложных, что они не поддаются точному математическому анализу. В ряде случаев такое описание является единственно возможным, так как в реальных ситуациях закономерности, ограничения, критерии выбора в большей части субъективны и точно не определены. С 1965 г., когда L. Zadeh [1] опубликовал свою новаторскую работу, были рассмотрены сотни примеров, в которых природа неопределенности в поведении системы является скорее нечеткой, нежели имеет стохастический характер.

Асимптотические методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений занимают центральное место в нелинейной механике и смежных разделах математики, механики, физики и техники. Разработка общего алгоритма, получившего название метода усреднения Крылова—Боголюбова, и теорема о близости решений точной и усредненной систем принадлежат Н. М. Крылову и Н. Н. Боголюбову [2]. В дальнейшем Н. Н. Боголюбов создал строгую теорию

Получена 20.01.2018

метода усреднения и показал, что этот метод органично связан с существованием замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей рассматриваемых уравнений с наперед заданной степенью точности относительно малого параметра ε, обосновал асимптотический характер приближений, получаемых методом усреднения, и установил соответствие между решениями точных и усредненных уравнений на бесконечном временном интервале.

Полученные результаты получили дальнейшее развитие в работах Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, Л. Д. Акуленко, В. М. Волосова, Е. А. Гребенникова, М. А. Красносельского, С. Г. Крейна, Н. Н. Моисеева, Н. А. Перестюка, В. А. Плотникова, А. Н. Филатова, Ф. Л. Черноусько и др. для нелинейных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, многочастотных систем, уравнений в частных производных, разностных уравнений, уравнений с разрывными правыми частями, импульсных дифференциальных уравнений, уравнений с запаздыванием, стохастических уравнений, уравнений в бесконечномерных пространствах, дифференциальных включений, дифференциальных уравнений и включений с производной Хукухары, многозначных интегральных и интегро–дифференциальных уравнений, квазидифференциальных уравнений, нечетких уравнений и включений и тому подобное (см. [3]– [18] и ссылки в них).

В данной статье рассматривается обоснование метода полного усреднения для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью на конечном промежутке в терминах R-решений.

Предварительные результаты. Введем в рассмотрение **нечеткое пространство** $\mathbb{E}^n$ отображений $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) u полунепрерывно сверху по Бэру, т.е. для любых $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\tilde{y},\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\|y-\tilde{y}\| < \delta$ справедливо неравенство $u(y) < u(\tilde{y})+\varepsilon$;

2) u нормально, т.е. существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $u(y_0) = 1$;

3) u нечетко выпукло, т.е. для любых $y_1,y_2 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $u(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geqslant \min\{u(y_1), u(y_2)\}$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является отображение

$$\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$$

Определение 1. **α-срезкой** $[u]^\alpha$ *нечеткого множества* $u \in \mathbb{E}^n$ *называется множество* $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) \geqslant \alpha\}$ *при* $\alpha \in (0,1]$ *и замыкание множества* $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > 0\}$ *при* $\alpha = 0$.

Теорема 1. [19] *Если* $u \in \mathbb{E}^n$, *то*

1) $[u]^\alpha \in conv(\mathbb{R}^n)$ *для всех* $\alpha \in [0,1]$;

2) $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$ *для всех* $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$;

3) если $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ *– неубывающая последовательность, стремящаяся к* α, *то* $[u]^\alpha = \bigcap\limits_{k\geqslant 1} [u]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если семейство множеств $\{A_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ *из пространства* $conv(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет свойствам 1)–3), то существует* $u \in \mathbb{E}^n$ *такое, что* $[u]^\alpha = A_\alpha$ *для всех* $\alpha \in (0,1]$ *и* $[u]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\leqslant 1} A_\alpha} \subset A_0$.

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ **метрику** $D : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}_+$, полагая

$$D(u,v) = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} h([u]^\alpha,[v]^\alpha),$$

где $h : conv(\mathbb{R}^n) \times conv(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+-$ расстояние по Хаусдорфу.

В 1989 г. В.А.Байдосов [20, 21] и J.-P.Aubin [22] ввели понятие дифференциального включения с нечеткой правой частью:

$$\dot{x} \in F(t,x),\ x(t_0) \in X_0, \tag{1}$$

где $t \in I = [t_0,T]-$ время, $x : I \to \mathbb{R}^n-$ фазовая переменная, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}-$ производная вектор-функции $x(\cdot)$, $F : I\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n-$ нечеткое отображение, $X_0 \in \mathbb{E}^n-$ нечеткое множество начальных состояний.

Определение 2. *[23]* $\alpha-$ **решением** *включения (1) назовем абсолютно непрерывную функцию* $x : I \to \mathbb{R}^n$ *такую, что* $\dot{x}(t) \in [F(t,x(t))]^\alpha$ *почти всюду на* I *и* $x(t_0) \in [X_0]^\alpha$.

Множество всех α*-решений включения (1) в момент времени* t *обозначим* $X_\alpha(t)$. *В случае, если семейство* $\{X_\alpha(t),\ \alpha \in [0,1]\}$ *определяет нечеткое множество* $X(t)$, *то* $X(t)$ *называется* **множеством решений** *включения (1) в момент времени* t.

Вопросы существования множества $X(t)$, его свойства рассматривались в работах А. В. Плотникова, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, P. Balasubramaniam, Y. Chalco-Cano, E. Hullermeier, V. Laksmikantham, O. Lopez-Pouso, K. K. Majumdar, R. N. Mohapatra, J. J. Nieto, J. Y. Park, D. O'Regan, H. Roman-Flores, A. A. Tolstonogov и др.

Очевидно, что семейство $\{X_\alpha(t),\ \alpha \in [0,1]\}$ может не удовлетворять условиям теоремы 1, т.е. не определять нечеткое множество $X(t)$, поэтому в работах [24, 25] введено понятие R-решения дифференциального включения с нечеткой правой частью.

Определение 3. *[24, 25] Полунепрерывное сверху нечеткое отображение* $R : I \to \mathbb{E}^n$, $R(t_0) = X_0$, *удовлетворяющее условию*

$$\lim_{\sigma\downarrow 0} \frac{1}{\sigma} \sup_{\alpha\in[0,1]} h\left([R(t+\sigma)]^\alpha, \bigcup_{x\in[R(t)]^\alpha} \left\{ x + \int_t^{t+\sigma} [F(s,x)]^\alpha ds \right\} \right) = 0,$$

называется R**-решением** *дифференциального включения с нечеткой правой частью (1).*

Определение 4. *Говорят, что отображение* $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ **вогнутозначно** *по* x, *если*

$$\beta[F(t,x)]^\alpha + (1-\beta)[F(t,y)]^\alpha \subset [F(t,\beta x + (1-\beta)y)]^\alpha$$

для любых $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Теорема 2. [24, 25] *Пусть нечеткое отображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *измеримо по t при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$;*

2) *удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ при почти всех $t \in I$;*

3) *существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $D(F(t,x),\hat{0}) \leqslant \gamma$ для почти всех $t \in I$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$;*

4) *вогнутозначно по x для почти всех $t \in I$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$.*

Тогда существует единственное R*-решение $R(\cdot)$ включения (1), определенное на промежутке $[t_0,t_0+d] \subset I$.*

Многие процессы в биологии, теории управления, электронике описываются при помощи импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью [26]:

$$\dot{x} \in F(t,x),\ t \neq \tau_i,\ x(0) = x_0, \qquad (2)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in I_i(x),$$

где $\tau_i \in I$, $i \in \overline{1,m}$– моменты импульсов, занумерованные в возрастающем порядке, $\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0) = x(\tau_i+0) - x(\tau_i)$– скачок фазового вектора в точке импульса τ_i, $I_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$– нечеткие отображения.

Введем в рассмотрение понятие R-решения импульсного дифференциального включения с нечеткой правой частью вида (2).

Определение 5. *Нечеткое отображение $R : I \to \mathbb{E}^n$, $R(t_0) = X_0$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) на промежутках между моментами импульсов $R(\cdot)$ полунепрерывно сверху и

$$\lim_{\sigma\downarrow 0}\frac{1}{\sigma}\sup_{\alpha\in[0,1]} h\left([R(t+\sigma)]^\alpha, \bigcup_{x\in[R(t)]^\alpha}\left\{x + \int_t^{t+\sigma}[F(s,x)]^\alpha ds\right\}\right) = 0;$$

2) $R(\cdot)$ непрерывно слева в точках импульсов τ_i и $R(\tau_i+0) = \bigcup\limits_{x\in R(\tau_i)}\{x+I_i(x)\}$

называется R**-решением** *импульсного дифференциального включения с нечеткой правой частью (2).*

Очевидно, что существование и единственность R-решения задачи (2) имеет место, если нечеткое отображение $F(t,x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 на промежутках между моментами импульсов и нечеткие отображения $I_i(x)$ ограничены, вогнутозначны и удовлетворяют условию Липшица.

В работах [27, 28] обоснована возможность применения метода усреднения на конечном промежутке для дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр. При этом при доказательстве осуществлялся переход к отдельным α-решениям и в результате показана близость множеств решений исходного и усредненного включений. Аналогичные результаты для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью получены в работах [29–32].

В [24, 25] обоснована возможность применения метода усреднения в терминах R-решений для дифференциальных включений с нечеткой правой частью с малым параметром. В данной статье перенесем полученные в [24, 25] результаты на импульсный случай.

Основные результаты. Рассмотрим дифференциальное включение с нечеткой правой частью стандартного вида с импульсами

$$\dot{x} \in \varepsilon F(t,x),\ t \neq \tau_i,\ x(0) \in X_0, \tag{3}$$

$$\Delta x\mid_{t=\tau_i} \in \varepsilon I_i(x),$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$, $I_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ — нечеткие отображения, моменты импульсов τ_i занумерованы множеством натуральных чисел в возрастающем порядке.

Поставим в соответствие включению (3) следующее усредненное дифференциальное включение

$$\dot{\xi} \in \varepsilon \widetilde{F}(\xi),\ \xi(0) \in X_0, \tag{4}$$

где нечеткое отображение $\widetilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ таково, что

$$\widetilde{F}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} D\left(\int\limits_t^{t+T} F(t,x)dt + \sum_{t\leqslant\tau_i\leqslant t+T} I_i(x) \right). \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть в области $Q = \{t \geqslant 0, x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$ выполнены следующие условия:*

1) нечеткие отображения $F(t,x), I_i(x)$ непрерывны, равномерно ограничены постоянной M, удовлетворяют по x условию Липшица с постоянной λ, вогнутозначны по x;

2) равномерно относительно t, x существует предел (5) и

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\, i(t,t+T) = d < \infty,$$

где $i(t,t+T)$ — количество точек последовательностей $\{t_i\}$ на промежутке $[t, t+T]$;

3) R*-решения включения (4) для всех $X_0 \subset G' \subset G$ при $t \in [0, L^*\varepsilon^{-1}]$ лежат вместе с некоторой ρ-окрестностью в области G.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L \in (0, L^*]$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо следующее неравенство

$$D(R(t,\varepsilon), \widetilde{R}(t,\varepsilon)) < \eta, \tag{6}$$

где $R(t,\varepsilon), \widetilde{R}(t,\varepsilon)$ — R*-решения включений (3) и (4) соответственно, $R(0,\varepsilon) = \widetilde{R}(0,\varepsilon)$.*

Доказательство. Из условий 1) и 2) следует, что нечеткое отображение $\bar{F} : G \to \mathbb{E}^n$ равномерно ограничено постоянной $M(1+d)$ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\lambda(1+d)$.

Действительно,

$$D(\widetilde{F}(x),\{\hat{0}\}) \leqslant D\left(\widetilde{F}(x), \frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x)\right) +$$

$$+D\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x),\{\hat{0}\}\right) < \delta + \frac{1}{T}\int_t^{t+T} D(F(s,x),\{\hat{0}\})ds+$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} D(I_i(x),\{\hat{0}\}) < \delta + M + dM = \delta + M(1+d);$$

$$D(\widetilde{F}(x_1),\widetilde{F}(x_2)) \leqslant D\left(\widetilde{F}(x_1),\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x_1)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x_1)\right) +$$

$$+D\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x_1)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x_1), \frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x_2)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x_2)\right) +$$

$$+D\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x_2)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x_2), \widetilde{F}(x_2)\right) <$$

$$< 2\delta + \frac{1}{T}\int_t^{t+T} D(F(s,x_1),F(s,x_2))ds + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} D(I_i(x_1),I_i(x_2)) \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta + \lambda||x_1 - x_2|| + \lambda d||x_1 - x_2|| = 2\delta + \lambda(1+d)||x_1 - x_2||,$$

где δ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора T. Таким образом,

$$D(\widetilde{F}(x),\{\hat{0}\}) \leqslant M(1+d),\ D(\widetilde{F}(x_1),\widetilde{F}(x_2)) \leqslant \lambda(1+d)||x_1 - x_2||.$$

Кроме того, нечеткое отображение $\widetilde{F}(x)$ является вогнутозначным. Выберем произвольные $\alpha,\beta \in [0,1]$ $x,y \in G$. Тогда

$$\beta[\widetilde{F}(x)]^\alpha + (1-\beta)[\widetilde{F}(y)]^\alpha =$$

$$= \beta\left[\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x)\right)\right]^\alpha +$$

$$+(1-\beta)\left[\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,y)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(y)\right)\right]^\alpha =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} (\beta[F(t,x)]^\alpha + (1-\beta)[F(t,y)]^\alpha)dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} (\beta[I_i(x)]^\alpha + (1-\beta)[I_i(y)]^\alpha)\right) \subset$$

$$\subset \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T}[F(t,\beta x+(1-\beta)y)]^\alpha dt+\frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T}[I_i(\beta x+(1-\beta)y)]^\alpha\right)=$$

$$=[\widetilde{F}(\beta x+(1-\beta)y)]^\alpha.$$

В силу условий теоремы R-решения включений (3) и (4) существуют.

Для любого целого $m>1$ разобъем отрезок $[0,L\varepsilon^{-1}]$ на m равных частей точками $t_k=\frac{kL}{\varepsilon m}, k=\overline{0,m}$.

Построим нечеткие отображения $R^m(t,\varepsilon)$ и $\widetilde{R}^m(t,\varepsilon)$ такие, что

$$[R^m(t,\varepsilon)]^\alpha=\bigcup_{x\in[R^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha}\left\{x+\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,x)]^\alpha ds+\varepsilon\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(x)]^\alpha\right\},\ [R^m(0,\varepsilon)]^\alpha=[X_0]^\alpha,$$

$$[\widetilde{R}^m(t,\varepsilon)]^\alpha=\bigcup_{y\in[\widetilde{R}^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha}\left\{y+\varepsilon(t-t_k)[\widetilde{F}(y)]^\alpha ds\right\},\ [\widetilde{R}^m(0,\varepsilon)]^\alpha=[X_0]^\alpha,$$

для всех $\alpha\in[0,1]$, $t\in(t_k,t_{k+1}]$, $k=\overline{0,m-1}$.

При $t\in(t_k,t_{k+1}]$ справедлива оценка

$$D\bigg(R^m(t_k,\varepsilon),R^m(t,\varepsilon)\bigg)=$$

$$=\sup_{\alpha\in[0,1]}h\left([R^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha,\bigcup_{x\in[R^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha}\left\{x+\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,x)]^\alpha ds+\varepsilon\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(x)]^\alpha\right\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon M(t-t_k)+\varepsilon Md(t-t_k)\leqslant\frac{ML(1+d)}{m}.$$

Аналогично

$$D\left(\widetilde{R}^m(t_k,\varepsilon),\widetilde{R}^m(t,\varepsilon)\right)\leqslant\frac{ML(1+d)}{m},$$

$$D\left(R(t_k,\varepsilon),R(t,\varepsilon)\right)\leqslant\frac{ML(1+d)}{m},$$

$$D\left(\widetilde{R}(t_k,\varepsilon),\widetilde{R}(t,\varepsilon)\right)\leqslant\frac{ML(1+d)}{m}.$$

Докажем, что

$$\lim_{m\to\infty}D\bigg(R^m(t,\varepsilon),R(t,\varepsilon)\bigg)=0,\quad \lim_{m\to\infty}D\bigg(\widetilde{R}^m(t,\varepsilon),\widetilde{R}(t,\varepsilon)\bigg)=0.$$

Пусть $t\in(t_k,t_{k+1}]$. Обозначим через $\tau_1^k,\tau_2^k,\ldots,\tau_p^k$ моменты импульсных воздействий τ_i на промежутке $[t_k,t_{k+1}]$. Тогда для всех $\alpha\in[0,1]$ имеем

$$[R(t,\varepsilon)]^\alpha=\bigcup_{x\in[R(t_k,\varepsilon)]^\alpha}\ \bigcup_{v(s)\in[F(s,y(s))]^\alpha}\left\{y(t)=x+\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}v(s)ds\right\},\quad t_k\leqslant t\leqslant\tau_1^k,$$

$$[R(t,\varepsilon)]^\alpha = \bigcup_{x\in[R(\tau_q^k,\varepsilon)]^\alpha} \bigcup_{v(\cdot),r} \left\{ y(t) = z + \varepsilon \int\limits_{\tau_q^k}^{t} v(s)ds : \quad \begin{array}{c} v(s) \in [F(s,y(s))]^\alpha, \\ z = x + \varepsilon r, \quad r \in [I_{\tau_q^k}(x)]^\alpha \end{array} \right\},$$

$$\tau_q^k < t \leqslant \tau_{q+1}^k, \quad q = \overline{1,p}.$$

Пусть $\delta_k = D\Big(R(t_k,\varepsilon), R^m(t_k,\varepsilon)\Big)$. Тогда при $t \in [t_k, \tau_1^k]$, $\alpha \in [0,1]$ получим

$$h\Big([R(t,\varepsilon)]^\alpha,[R^m(t,\varepsilon)]^\alpha\Big) =$$

$$= h\left(\bigcup_{x\in[R(t_k,\varepsilon)]^\alpha} \bigcup_{v(s)\in[F(s,y(s))]^\alpha} \{y(t) = x+\varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} v(s)ds\}, \bigcup_{z\in[R^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha} \{z+\varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} [F(s,z)]^\alpha ds\} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,z,v(\cdot)} \rho \left(x + \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} v(s)ds, z + \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} [F(s,z)]^\alpha ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,z,v(\cdot)} \left(||x-z|| + \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} \rho(v(s),[F(s,z)]^\alpha) ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant \delta_k + \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} \sup_{x,z,v(\cdot)} h\left([F(s,y(s))]^\alpha,[F(s,z)]^\alpha) ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant \delta_k + \varepsilon\lambda \int\limits_{t_k}^{t} \left[\sup_{x,v(\cdot)} ||y(s)-x|| + \delta_k \right] ds \leqslant \delta_k + \varepsilon\lambda \left[\varepsilon M \frac{L}{\varepsilon m} + \delta_k \right] \frac{L}{\varepsilon m} =$$

$$= \delta_k \left(1 + \frac{\lambda L}{m} \right) + \frac{\lambda M L^2}{m^2}.$$

При $t \in (t_q^k, t_q^{k+1}]$, $\alpha \in [0,1]$ имеем

$$h\Big([R(t,\varepsilon)]^\alpha,[R^m(t,\varepsilon)]^\alpha\Big) =$$

$$= h\left(\bigcup_{x\in[R(t_k,\varepsilon)]^\alpha} \bigcup_{v(s)\in[F(s,y(s))]^\alpha} \left\{ y(t) = x + \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} v(s)ds + \varepsilon \sum_{t_k\leqslant\tau_i<t} \Delta_i, \ \Delta_i \in [I_i(y(t_i))]^\alpha \right\}, \right.$$

$$\left. \bigcup_{v\in[R^m(\tau_k,\varepsilon)]^\alpha} \left\{ v + \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{t} [F(s,v)]^\alpha ds + \varepsilon \sum_{\tau_k\leqslant t_i<t} [I_i(v)]^\alpha \right\} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,v,v(\cdot)} \rho\left(x + \varepsilon\int\limits_{t_k}^{t} v(s)ds + \varepsilon\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}\Delta_i, v + \varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,v)]^{\alpha}ds + \varepsilon\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(v)]^{\alpha}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,v,v(\cdot)}\left(||x-v|| + \varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}\rho(v(s),[F(s,v)]^{\alpha})ds + \varepsilon\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}\rho(\Delta_i,[I_i(v)]^{\alpha})\right) \leqslant$$

$$\leqslant \delta_k + \varepsilon\lambda\int\limits_{t_k}^{t}\left(\sup_{x,v(\cdot)}||y(s)-x|| + \delta_k\right)ds + \frac{\lambda dL}{m}\left(\sup_{x,v(\cdot)}||y(t_i)-x|| + \delta_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \delta_k\left(1 + \frac{\lambda L}{m} + \frac{\lambda dL}{m}\right) + \varepsilon\lambda\frac{L}{\varepsilon m}\left(\varepsilon M\frac{L}{\varepsilon m} + \varepsilon dM\frac{L}{\varepsilon m}\right) + \frac{\lambda dL}{m}\left(\varepsilon M\frac{L}{\varepsilon m} + \varepsilon dM\frac{L}{\varepsilon m}\right) =$$

$$= \delta_k\left(1 + \frac{\lambda L(1+d)}{m}\right) + \frac{\lambda ML^2(1+d)^2}{m^2}.$$

Тогда

$$\delta_{k+1} \leqslant \delta_k\left(1 + \frac{\lambda L(1+d)}{m}\right) + \frac{\lambda ML^2(1+d)^2}{m^2},\ \delta_0 = 0.$$

Следовательно,

$$\delta_k \leqslant \frac{\lambda ML^2(1+d)^2}{m^2}\cdot\frac{\left(1+\frac{\lambda L(1+d)}{m}\right)^k - 1}{\frac{\lambda L(1+d)}{m}} \leqslant \frac{ML(1+d)}{m}\left(e^{\lambda L(1+d)} - 1\right).$$

Таким образом,

$$D(R(t,\varepsilon), R^m(t,\varepsilon)) \leqslant$$

$$\leqslant D(R(t,\varepsilon),R(\tau_k,\varepsilon)) + D(R(\tau_k,\varepsilon),R^m(\tau_k,\varepsilon)) + D(R^m(\tau_k,\varepsilon),R^m(t,\varepsilon)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2ML(1+d)}{m} + \frac{ML(1+d)}{m}\left(e^{\lambda L(1+d)} - 1\right) = \frac{ML(1+d)}{m}\left(e^{\lambda L(1+d)} + 1\right). \quad (7)$$

Аналогично можно получить оценку

$$D\left(\widetilde{R}(t,\varepsilon),\widetilde{R}^m(t,\varepsilon)\right) \leqslant \frac{ML(1+d)}{m}\left(e^{\lambda L(1+d)} + 1\right). \quad (8)$$

Обозначим через $\sigma_k = D(R^m(t_k,\varepsilon),\widetilde{R}^m(t_k,\varepsilon))$. При $t \in (t_k,t_{k+1}], k = \overline{0,m-1}$, $\alpha \in [0,1]$ оценим

$$h([R^m(t,\varepsilon)]^{\alpha},[\widetilde{R}^m(t,\varepsilon)]^{\alpha}) = h\Bigg(\bigcup_{x\in[R^m(t_k,\varepsilon)]^{\alpha}}\Bigg\{x + \varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,x)]^{\alpha}ds +$$

$$
+\,\varepsilon\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(x)]^\alpha\Bigg\},\bigcup_{y\in[\widetilde{R}^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha}\Bigg\{y+\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}[\widetilde{F}(y)]^\alpha ds\Bigg\}\Bigg)\leqslant
$$

$$
\leqslant\sup_{x,y}\left(||x-y||+\varepsilon h\left(\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,x)]^\alpha ds+\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(x)]^\alpha,\int\limits_{\tau_k}^{t}[\widetilde{F}(y)]^\alpha ds\right)\right)\leqslant
$$

$$
\leqslant\sup_{x,y}\left(||x-y||+\varepsilon h\left(\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,x)]^\alpha ds+\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(x)]^\alpha,\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,y)]^\alpha ds+\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(y)]^\alpha\right)+\right.
$$

$$
\left.+\varepsilon h\left(\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,y)]^\alpha ds+\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(y)]^\alpha,\int\limits_{t_k}^{t}[\widetilde{F}(y)]^\alpha ds\right)\right)\leqslant
$$

$$
\leqslant\sup_{x,y}\left(||x-y||+\varepsilon\lambda\int\limits_{t_k}^{t}||x-y||ds+\varepsilon\lambda d\frac{L}{\varepsilon m}||x-y||\right)+\varepsilon\frac{L}{\varepsilon m}\eta_1\leqslant
$$

$$
\leqslant\sigma_k\left(1+\frac{\lambda L(1+d)}{m}\right)+\frac{L\eta_1}{m}\leqslant\frac{L\eta_1}{m}\cdot\frac{\left(1+\frac{\lambda L(1+d)}{m}\right)^{k+1}-1}{\frac{\lambda L(1+d)}{m}}\leqslant
$$

$$
\leqslant\frac{\eta_1\left(e^{\lambda L(1+d)}-1\right)}{\lambda(1+d)}. \tag{9}
$$

Из (7)–(9) имеем

$$
D\Big(R(t,\varepsilon),\widetilde{R}(t,\varepsilon)\Big)\leqslant\frac{\eta_1\left(e^{\lambda L(1+d)}-1\right)}{\lambda(1+d)}+\frac{2ML(1+d)}{m}\left(e^{\lambda L(1+d)}+1\right). \tag{10}
$$

Выбирая

$$
m>\frac{4ML(1+d)\left(e^{\lambda L(1+d)}+1\right)}{\eta}\quad\text{и}\quad\eta_1<\frac{\lambda(1+d)\eta}{2(e^{\lambda L(1+d)}-1)},
$$

получим из (10) утверждение теоремы.

Замечание 1. *Если включения (3),(4) периодичны по времени, то оценка (6) принимает вид*

$$
D\Big(R(t,\varepsilon),\widetilde{R}(t,\varepsilon)\Big)\leqslant C\varepsilon.
$$

Заключение. Таким образом, в данной статье обоснована возможность применения схемы полного усреднения для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью на конечном промежутке в терминах R-решений. Полученные результаты обобщают аналогичные результаты для импульсных дифференциальных включений [11].

1. **Zadeh L.** Fuzzy sets / L. Zadeh // Inform. Control. – 1965. – № 8. – P. 338 – 353.
2. **Крылов Н.М.** Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
3. **Боголюбов Н.Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
4. **Гребенников Е.А.** Метод усреднения в прикладных задачах / Е.А. Гребенников. – М.: Наука, 1986. – 256 с.
5. **Митропольский Ю.А.** Метод усреднения в нелинейной механике / Ю.А. Митропольский. – К.: Наукова думка, 1971. – 440 с.
6. **Митропольский Ю.А.** Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики / Ю.А. Митропольский, Г.Л. Хома. – К.: Наукова думка, 1983. – 216 с.
7. **Моисеев Н.Н.** Асимптотические методы нелинейной механики/ Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
8. **Перестюк Н.А.** Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н.А. Перестюк, В.А. Плотников, А.М. Самойленко, Н.В. Скрипник. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
9. **Плотников А.В.** Дифференциальные уравнения с «четкой» и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы / А.В. Плотников, Н.В. Скрипник. – Одесса : Астропринт, 2009. – 192 с.
10. **Плотников В.А.** Метод усреднения в задачах управления / В.А. Плотников. – Киев;Одесса: Лыбидь, 1992. – 187 с.
11. **Плотников В.А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999. – 354 с.
12. **Самойленко А.М.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. – К.: Вища шк., 1987. – 288 с.
13. **Филатов А.Н.** Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений / А.Н. Филатов. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.
14. **Черноусько Ф.Л.** Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
15. **Gama R.** Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method / R. Gama, G. Smirnov // Set-Valued and Variational Analysis. – 2014. – Vol. 22, № 2. – P. 349–374.
16. **Klimchuk S.** Overview of V.A. Plotnikov 's research on averaging of differential inclusions / S. Klimchuk, A. Plotnikov, N. Skripnik // Physica D. - 2012. - Vol. 241, № 22. – P.1932 - 1947.
17. **Perestyuk N. A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities (De Gruyter Studies in Mathematics: 40) / N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik. - Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbHCo., 2011. - 307 p.
18. **Samoilenko A. M.** Impulsive differential equations / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. - Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.

19. **Park J. Y.** Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations / J. Y. Park, H. K. Han // Int. J. Math. Math. Sci. – 1999. – Vol. 22, № 2. – P. 271 – 279.

20. **Байдосов В. А.** Дифференциальные включения с нечеткой правой частью / В.А. Байдосов // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 309, № 4. – С. 781 – 783.

21. **Байдосов В. А.** Нечеткие дифференциальные включения / В. А. Байдосов // Прикл. матем. и мех. – 1990. – Т. 54, вып. 1. – С. 12 – 17.

22. **Aubin J.-P.** Fuzzy differential inclusions / J.-P. Aubin // Probl. Control Inf. Theory. – 1990. – Vol. 19, № 1. – P. 55 – 67.

23. **Hullermeier E.** An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system / E. Hullermeier // Internat. J. Uncertainty, Fuzziness Knoeledge - Based Systems. – 1997. – №7. – P. 117 - 137.

24. **Plotnikov A.V.** A Procedure of complete averaging for fuzzy differential inclusions on a finite segment / A.V. Plotnikov // Ukrainian Math. J. – 2015. – Vol. 67, № 3. – P. 421-430. doi: 10.1007/s11253-015-1090-4

25. **Plotnikov A.V.** The averaging of fuzzy linear differential inclusions on finite interval / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms. - 2016. – Vol. 23, № 1. - P. 1-9.

26. **Guo M.** Impulsive functional differential inclusions and fuzzy population models / M. Guo, X. Xue, R. Li // Fuzzy sets and System. – 2003. - Vol. 138. – P. 601 -– 615.

27. **Plotnikov A.V.** The partial averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva, L.I. Plotnikova // J. Adv. Research Dyn. Control Systems. - 2010. – Vol. 2, № 2. – P. 26-34.

28. **Plotnikov A.V.** On the averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average of the right-hand side is absent / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva, L.I. Plotnikova // Iranian journal of optimization. - 2010. – Vol. 2, № 3. – P. 506-517.

29. **Скрипник Н. В.** Усреднение импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью / Н. В. Скрипник // Укр. мат. журн. – 2014. – Т.66, №11. – С. 1563–1577.

30. **Скрипник Н. В.** Схема частичного усреднения для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью / Н. В. Скрипник // Мат.студии. – 2015. – Т. 43, №2. – С. 129–139.

31. **Skripnik N.** Averaging of impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average is absent / N. Skripnik // Asian-European J. Math. – Vol. 12, № 4. – 2015. – P.1550086-1–1550086-12.

32. **Skripnik N.** Step scheme of averaging method for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side / N. Skripnik // Contemporary Methods in Mathematical Physics and Gravitation. – Vol. 1, № 1. – 2015. – P. 9–26.

Скрипник Н. В.

Схема повного усереднення імпульсних диференціальних включень з нечіткою правою частиною в термінах R-розв'язків

Резюме

В роботах Т. О. Комлєвої, А. В. Плотнікова, Л. І. Плотнікової доведено можливість застосування методу усереднення на скінченному проміжку для диференціальних включень з нечіткою правою частиною, що містять малий параметр, у термінах множин

розв'язків (з переходом до окремих α-розв'язків при доведенні), а в роботах Н. В. Скрипник аналогічні результати отримані для імпульсних диференціальних включень з нечіткою правою частиною. В подальшому в роботах Т. О. Комлєвої, А. В. Плотнікова введено поняття R-розв'язку диференціального включення з нечіткою правою частиною та обгрунтовано можливість застосування методу усереднення в термінах R-розв'язків (без переходу до α-розв'язків при доведенні). В даній статті ці результати перенесено на імпульсний випадок, а саме введено поняття R-розв'язку та обгрунтовано можливість застосування схеми повного усереднення для імпульсних диференціальних включень з нечіткою правою частиною в термінах R-розв'язків.
Ключові слова: нечіткі системи, диференціальні включення, імпульси, метод усереднення, R-розв'язок .

Skripnik N. V.

Full averaging scheme for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side in terms of R-solutions

Summary

In the works of T. A. Komleva, A. V. Plotnikov, L. I. Plotnikova the possibility of applying the averaging method on a finite interval for differential inclusions with a fuzzy right-hand side containing a small parameter in terms of solution sets (with a transition to separate α-solutions in the proof), and in the works of N. V. Skripnik similar results were obtained for impulse differential inclusions with a fuzzy right-hand side. Later in the works of T. A. Komleva and A. V. Plotnikov the concept of R-solution of the differential inclusion with a fuzzy right-hand side was introduced and the possibility of applying the averaging method in terms of R-solutions was justified (without passing to α-solutions in the proof). In this article, these results are transferred to the impulse case, namely, the concept of R-solution is introduced and the possibility of using the full averaging scheme for impulse differential inclusions with a fuzzy right-hand side in terms of R-solutions is substantiated.
Key words: fuzzy systems, differential inclusions, impulses, averaging method, R-solution.

References

1. Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Inform. Control.*, № 8, P. 338 – 353.
2. Krylov, N. M. and N. N. Bogoliubov (1947). *Vvedenie v nelineynuyu mehaniku [Introduction to nonlinear mechanics]*. Kiev: Izd. AN USSR, 363 p.
3. Bogoliubov, N. N. and Yu. A. Mitropolsky (1974). *Asimptoticheskie metodyi v teorii nelineynyih kolebaniy [Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations]*. Moscow: Nauka, 503 p.
4. Grebennikov, Ye. A. (1986). *Metod usredneniya v prikladnyih zadachah [Averaging method in applied problems]*. Moscow: Nauka, 256 p.
5. Mitropolskiy, Yu. A. (1986). *Metod usredneniya v nelineynoy mehanike [Averaging method in nonlinear mechanics]*. Kiev: Naukova Dumka, 440 p.
6. Mitropolskiy, Yu. A. and Homa, G. L. (1983). *Matematicheskoe obosnovanie asimptoticheskih metodov nelineynoy mehaniki [Mathematical substantiation of asymptotical methods in nonlinear mechanics]*. Kiev: Naukova dumka, 216 p.
7. Moiseev, N. N. (1981). *Asimptoticheskie metody nelineynoy mehaniki [Asymptotical methods of nonlinear mechanics]*. Moscow: Nauka, 400 p.

8. Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M. and Skripnik N.V. (2007). *Impulsnyie differentsialnyie uravneniya s mnogoznachnoy i razryivnoy pravoy chastyu [Impulsive differential equations with multivalued and discontinuous right-hand side]*, Kiev: IM NAN Ukraine, 428 p.

9. Plotnikov, A. V. and Skripnik, N. V. (2009). *Differentsialnyie uravneniya s "chetkoy" i nechetkoy mnogoznachnoy pravoy chastyu. Asimptoticheskie metody [Differential equations with "clear" and fuzzy set valued right - hand side. Asymptotical methods]*, Odessa: Astroprint, 192 p.

10. Plotnikov, V. A. (1992). *Metod usredneniya v zadachah upravleniya [Averaging method in control problems]*, Kiev - Odessa: Lybid, 187 p.

11. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V. and Vityuk, A. N. (1999). *Differentsialnyie uravneniya s mnogoznachnoy pravoy chastyu. Asimptoticheskie metody [Differential equations with a multivalued right-hand side. Asymptotic methods]*, Odessa: AstroPrint, 354 p.

12. Samoilenko, A.M. and Perestyuk, N.A. (1987). *Differentsialnyie uravneniya s impulsnyim vozdeystviem [Differential equations with impulses]*, Kiev: Vischa shkola, 288 p.

13. Filatov, A. N. (1974). *Asimptoticheskie metody v teorii differentsialnyih i integro-differentsialnyih uravneniy [Asymptotical methods in the theory of differential and integro-differential equations]*, Tashkent: Fan, 216 p.

14. Chernous'ko, F. L., Akulenko, L. D. and Sokolov, B. N. (1980). *Upravleniye kolebaniyami [Control of oscillations]*, Moscow: Nauka, 384 p.

15. Gama, R. (2014). Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method. *Set-Valued and Variational Analysis*, Vol. 22, № 2, P. 349–374.

16. Klimchuk, S., Plotnikov, A. and Skripnik N. (2012). Overview of V.A. Plotnikov 's research on averaging of differential inclusions. *Physica D*, Vol. 241, № 22, P.1932 - 1947.

17. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M. and Skripnik N.V. (2011). *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities (De Gruyter Studies in Mathematics: 40)*, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbHCo., 307 p.

18. Samoilenko, A. M. and Perestyuk, N. A. (1995). *Impulsive differential equations*, Singapore: World Scientific, 462 p.

19. Park, J. Y. and Han, H. K. (1999). Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations. *Int. J. Math. Math. Sci.*, Vol. 22, № 2, P. 271 – 279.

20. Baidosov, V. A. (1990). Differentsialnyie vklyucheniya s nechetkoy pravoy chastyu [Differential inclusions with fuzzy right-hand side]. *Soviet Mathematics*, Vol. 40, № 3, P. 567–569.

21. Baidosov, V. A. (1990). Nechetkie differentsialnyie vklyucheniya [Fuzzy differential inclusions]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 54, № 1, P. 8–13.

22. Aubin, J.-P. (1990). Fuzzy differential inclusions. *Probl. Control Inf. Theory*, Vol. 19, № 1, P. 55 – 67.

23. Hullermeier, E. (1997). An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system. *Internat. J. Uncertainty, Fuzziness Knoeledge - Based Systems*, №7, P. 117 - 137.

24. Plotnikov, A. V. (2015). A Procedure of complete averaging for fuzzy differential inclusions on a finite segment. *Ukrainian Math. J.*, Vol. 67, № 3, P. 421-430.

25. Plotnikov, A. V. and Komleva, T. A. (2016). The averaging of fuzzy linear differential inclusions on finite interval. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms*, Vol. 23, № 1, P. 1-9.
26. Guo, M., Xue, X. and Li, R. (2003) Impulsive functional differential inclusions and fuzzy population models. *Fuzzy sets and System*, Vol. 138, P. 601 -– 615.
27. Plotnikov, A. V., Komleva, T. A. and Plotnikova L. I. (2010). The partial averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side. *J. Adv. Research Dyn. Control Systems*, Vol. 2, № 2, P. 26-34.
28. Plotnikov, A. V., Komleva, T. A. and Plotnikova L. I. (2010). On the averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average of the right-hand side is absent. *Iranian journal of optimization*, Vol. 2, № 3, P. 506-517.
29. Skripnik, N. V. (2015). Usrednenie impulsnyih differentsialnyih vklyucheniy s nechetkoy pravoy chastyu [Averaging of impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side]. *Ukr.Math.J.*, Vol. 66, №1 , P. 1563 - 1577.
30. Skripnik, N. V. (2015). Shema chastichnogo usredneniya dlya impulsnyih differentsialnyih vklyucheniy s nechetkoy pravoy chastyu [The scheme of partial averaging for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side]. *Math. Studii*, Vol. 43, № 2, P. 129-139.
31. Skripnik, N. (2015). Averaging of impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average is absent. *Asian-European J. Math.*, Vol. 12, № 4, P.1550086-1 - 1550086-12.
32. Skripnik, N. (2015). Step scheme of averaging method for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side. *Contemporary Methods in Mathematical Physics and Gravitation*, Vol. 1, № 1, P. 9 - 26.