УДК 517.988 : 519.633

М. В. Сидоров
Харківський національний університет радіоелектроніки

МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ І МЕТОД ПРЯМИХ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО НАПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянуто першу початково-крайову задачу для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності. На основі модифікованого методу Роте на кожному часовому шарі вихідна нестаціонарна задача замінена нелінійною крайовою задачею для звичайного диференціального рівняння. Методом функцій Гріна від цієї задачі виконано перехід до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке далі розглянуто як нелінійне операторне рівняння з гетеротонним оператором у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Для знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (а отже, і узагальненого розв'язку відповідної крайової задачі) на кожному часовому шарі побудовано метод послідовних наближень з двобічним характером збіжності. Отже, у роботі для першої початково-крайової задачі для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності зі змінним коефіцієнтом теплопровідності вперше побудовано напівдискретний метод її розв'язання, який базується на сумісному використанні модифікованого методу прямих Роте та методу двобічних наближень. Обчислювальний експеримент проведено для задачі з експоненціальним коефіцієнтом теплопровідності, гетеротонною степеневою нелінійністю і параболічним початковим розподілом температури.
MSC: 65M20.
Ключові слова: напівлінійне рівняння теплопровідності, додатний розв'язок, двобічні наближення .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149705.

Вступ. Проблема математичного моделювання різноманітних біологічних та фізико-хімічних явищ і процесів приводить до необхідності розв'язання початкових або початково-крайових задач для напівлінійного параболічного рівняння вигляду [13,20]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,t)u = f(x,t,u). \tag{1}$$

При цьому, виходячи з сенсу функції $u(x,t)$ у тій чи іншій предметній області, природно постає задача знаходження додатного розв'язку рівняння (1).

Рівняння (1) досліджується у багатьох працях, зокрема можна відмітити роботи [2,8,10,13]. Для чисельного аналізу задач для рівняння (1) використовуються скінченно-різницеві методи (метод сіток), скінченно-елементні методи та напівдискретні методи (метод прямих, або метод Роте) [6,10,11,20,21]. Метод Роте, запропонований вперше у [21], дозволяє зводити розв'язання початково-крайових задач для нестаціонарних рівнянь до розв'язання послідовності крайових задач для стаціонарних рівнянь. Його перевагою порівняно, наприклад, з сітковими методами, є відсутність умов стійкості типу Куранту—Леві. На сьогодні цей метод

Надійшла 23.09.2018

широко використовується у математичному моделюванні проблем математики та механіки [16, 17, 19, та ін.].

Метою даної роботи є розробка нового методу розв'язання першої початково-крайової задачі для рівняння (1) на основі сумісного використання модифікованого метода Роте і методу двобічних наближень. Двобічні наближені методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь, засновані на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, розроблялись у роботах [1, 3–5, 9, 12, 14]. Дана робота продовжує дослідження, розпочаті в [1], і розповсюджує їх на нестаціонарні рівняння.

Основні результати

1. Побудова модифікованим методом Роте напівдискретної апроксимації задачі. Розглянемо першу початково-крайову задачу для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,t)u = f(x,t,u), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T_0], \tag{2}$$

$$u(x,t) > 0, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T_0], \tag{3}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T_0], \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in (0,l). \tag{5}$$

Позначимо $\bar{Q}_{T_0} = \{(x,t)|x \in [0,l], t \in [0,T_0]\}$. Вважатимемо, що

$$p(x,t) > 0,\ q(x,t) \geqslant 0, \text{ якщо } (x,t) \in \bar{Q}_{T_0},$$

$$p(x,t),\ \frac{\partial p(x,t)}{\partial x},\ q(x,t) \text{ неперервні, якщо } (x,t) \in \bar{Q}_{T_0},$$

$$f(x,t,u) \text{ неперервна і додатна, якщо } (x,t) \in \bar{Q}_{T_0},\ u > 0,$$

$$\varphi(x) \text{ неперервна і додатна, якщо } x \in (0,l),\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

На відрізку $[0,T_0]$ введемо часову сітку з кроком τ, яка складається з точок

$$t_j = j\tau, \quad j = 0,1,2,...,m, \quad m\tau = T_0,$$

і позначимо

$$U_j = U_j(x) = u(x,t_j), \quad j = 0,1,2,...,m.$$

Відповідно до методу прямих (методу Роте) диференціальний оператор $\frac{\partial u}{\partial t}$ в рівнянні (2) апроксимуємо відношенням скінченних різниць і розв'язок задачі (2) – (5) шукатимемо вздовж прямих $t = \text{const}$.

Рівняння (2) замінимо на прямій $t = t_j$, $j = 1,2,...,m$, з похибкою $O(\tau)$ звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{U_j - U_{j-1}}{\tau} - \frac{d}{dx}\left(p(x,t_j)\frac{dU_j}{dx}\right) + q(x,t_j)U_j = f(x,t_j,U_j). \tag{6}$$

Зауважимо, що на відміну від оригінального методу Роте [21] у (6) нелінійність $f(x,t,u)$ апроксимується на поточному, а не на попередньому часовому шарі.

На нульовому часовому шарі відповідно початковій умові (5) покладемо

$$U_0(x) = \varphi(x).$$

Рівняння (6) розглядаються при $x \in (0,l)$. Використовуючи крайові умови (4) вихідної задачі, для кожного з рівнянь (6) поставимо першу крайову задачу.

Тоді розв'язання початково-крайової задачі (2) – (5) зводиться до розв'язання послідовності напівлінійних крайових задач

$$-\frac{d}{dx}\left(P_j(x)\frac{dU_j}{dx}\right) + Q_j(x)U_j = \frac{1}{\tau}U_{j-1} + f(x,t_j,U_j), \quad x \in (0,l), \tag{7}$$

$$U_j(x) > 0, \quad x \in (0,l), \tag{8}$$

$$U_j(0) = 0, \quad U_j(l) = 0, \tag{9}$$

$$j = 1, ..., m;$$

$$U_0(x) = \varphi(x),$$

де позначено

$$P_j(x) = p(x,t_j), \quad Q_j(x) = q(x,t_j) + \frac{1}{\tau}.$$

Зауважимо, що $Q_j(x) > 0$ на $[0,l]$ при будь-якому $\tau > 0$.

Збіжність метода Роте при $\tau \to 0$ доведена у різних класах гладких та узагальнених розв'язків для широкого класу нелінійностей у рівнянні (2) [6, 21].

Крайові задачі (7) – (9) розв'язуються послідовно. Отже, при знаходженні функції $U_j(x)$ функція $U_{j-1}(x)$ вже знайдена як розв'язок попередньої задачі, тому праву частину рівняння (7) позначимо через $F(x,U_j)$:

$$F_j(x,U_j) = \frac{1}{\tau}U_{j-1}(x) + f(x,t_j,U_j). \tag{10}$$

2. Розв'язання методом двобічних наближень задачі (7) – (9)**.** Для розв'язання кожної з задач (7) – (9) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна [1] і методів теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [5, 9, 15, 18].

Розглядатимемо задачу (7) – (9) для деякого фіксованого j. Нехай $G_j(x,s)$ – функція Гріна розглядуваної крайової задачі. Тоді задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$U_j(x) = \int_0^l G_j(x,s)F_j(s,U_j(s))ds. \tag{11}$$

Як відомо, $G(x,s) = G(s,x)$, $G(x,s) > 0$, якщо $0 < x,s < l$, і $G(x,s) = 0$, якщо $x = 0$, $s = 0$, $x = l$ чи $s = l$.

Рівняння (11) розглядатимемо у банаховому просторі $C[0,l]$ неперервних на відрізку $[0,l]$ функцій з нормою $\|U\| = \max_{x\in[0,l]} |U(x)|$. У просторі $C[0,l]$ виділимо конус $\mathcal{K}_+$ невід'ємних на відрізку $[0,l]$ функцій. Конус $\mathcal{K}_+$ у $C[0,l]$ є нормальним (і навіть гострим) [5, 9, 15]. За допомогою конуса $\mathcal{K}_+$ у просторі $C[0,l]$ введемо напівупорядкованість за правилом:

$$\text{для } U,V \in C[0,l] \quad U \leqslant V, \text{ якщо } V-U \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$U \leqslant V, \text{ якщо } U(x) \leqslant V(x) \text{ для всіх } x \in [0,l].$$

Шукатимемо узагальнений розв'язок $U_j(x)$ крайової задачі (7) – (9), тобто неперервний розв'язок інтегрального рівняння (11).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор T_j, що діє у $C[0,l]$ за правилом

$$T_j(U)(x) = \int_0^l G_j(x,s)F_j(s,U(s))ds. \tag{12}$$

Нехай функція $f(x,t,u)$ дозволяє діагональне подання $f(x,t,u) = \hat{f}(x,t,u,u)$, де невід'ємна функція $\hat{f}(x,t,v,w)$ є неперервною за сукупністю змінних x, t, v, w, монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in (0,l)$, $t \in (0,T_0]$. Тоді діагональне подання дозволятиме і функція $F_j(x,U_j)$ вигляду (10): $F_j(x,U_j) = \hat{F}_j(x,U_j,U_j)$, де функція $\hat{F}_j(x,v,w)$ задається рівністю

$$\hat{F}_j(x,v,w) = \frac{1}{\tau}U_{j-1}(x) + \hat{f}(x,t_j,v,w). \tag{13}$$

Оскільки функція $U_{j-1}(x)$ неперервна і невід'ємна на $[0,l]$, то й $\hat{F}_j(x,v,w)$ буде неперервною за сукупністю змінних x, v, w невід'ємною функцією, яка монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in (0,l)$.

Отже, оператор T_j вигляду (12) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}_j(v,w)(x) = \int_0^l G_j(x,s)\hat{F}_j(s,v(s),w(s))ds. \tag{14}$$

Оператори T_j і $\hat{T}_j$ є цілком неперервними.

Крім того, оператор T_j вигляду (12) є:

а) додатним оператором, тобто залишає інваріантним конус $\mathcal{K}_+$ (якщо $U \in \mathcal{K}_+$, то і $T_j(U) \in \mathcal{K}_+$);

б) u_0-додатним оператором з функцією $u_0^j(x)$, яка задається формулою

$$u_0^j(x) = \int_0^l G_j(x,s)ds, \tag{15}$$

якщо функція Гріна задачі (7) – (9) допускає оцінку

$$\varphi_j(s)u_0^j(x) \leqslant G_j(x,s) \leqslant \psi_j(s)u_0^j(x), \quad 0 \leqslant x,s \leqslant l, \tag{16}$$

де $\varphi_j(s)$, $\psi(s)$ – невід'ємні неперервні на $[0,l]$ функції, відмінні від тотожного нуля (u_0-додатність оператора T означає, що для будь-якого $U \in \mathcal{K}_+$ існують такі числа $\alpha = \alpha(U) > 0$, $\beta = \beta(U) > 0$, що $\alpha u_0 \leqslant T(U) \leqslant \beta u_0$);

в) гетеротонним оператором з супровідним оператором вигляду (14), якщо функція $f(x,t,u)$ дозволяє діагональне подання $f(x,t,u) = \hat{f}(x,t,u,u)$, де невід'ємна функція $\hat{f}(x,t,v,w)$ є неперервною за сукупністю змінних x, t, v, w, монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in (0,l)$, $t \in (0,T_0]$;

г) псевдоувігнутим і навіть u_0-псевдоувігнутим оператором з функцією $u_0^j(x)$, яка має вигляд (13), якщо виконується умова: для всіх $v, w > 0$ і при будь-якому $\nu \in (0,1)$

$$\hat{f}\left(x,t,\nu v,\frac{1}{\nu}w\right) > \nu\hat{f}(x,t,v,w), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T_0]. \tag{17}$$

Позначимо через $K(u_0)$ підмножину функцій U з $\mathcal{K}_+$, для яких існують числа $\alpha, \beta > 0$ такі, що $\alpha u_0 \leqslant U \leqslant \beta u_0$. Тоді гетеротонний оператор T називається псевдоувігнутим [9], якщо для будь-яких ненульових елементів V, W з $\mathcal{K}_+$ маємо, що $\hat{T}(V,W) \in K(u_0)$, і для всіх $V, W \in K(u_0)$ та будь-якого $\nu \in (0;1)$ виконується нерівність $\hat{T}\left(\nu V, \frac{1}{\nu}W\right) > \nu\hat{T}(V,W)$. Умова u_0-псевдоувігнутості для псевдоувігнутого оператора є більш жорсткою, ніж умова просто псевдоувігнутості [9]: для всіх $V, W \in K(u_0)$ та будь-якого $\nu \in (0;1)$ існує $\eta = \eta(V,W,\nu) > 0$ таке, що має місце нерівність $\hat{T}\left(\nu V, \frac{1}{\nu}W\right) > \nu(1+\eta)\hat{T}(V,W)$.

Вважатимемо, що оператор T_j вигляду (12) є гетеротонним з супровідним оператором $\hat{T}_j$ вигляду (14). Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (11) (а отже, і крайової задачі (7) – (9)).

Для гетеротонного оператора T_j виділимо у конусі $\mathcal{K}_+$ сильно інваріантний конусний відрізок $< v_j^0, w_j^0 >$. Відповідні умови $\hat{T}_j(v_j^0,w_j^0) \geqslant v_j^0$, $\hat{T}_j(w_j^0,v_j^0) \leqslant w_j^0$ набувають вигляду

$$\int_0^l G_j(x,s)\hat{F}_j(s,v_j^0(s),w_j^0(s))ds \geqslant v_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [0,l],$$

$$\int_0^l G_j(x,s)\hat{F}_j(s,w_j^0(s),v_j^0(s))ds \leqslant w_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [0,l]$$

або (з урахуванням (13))

$$\varphi_j(x) + \int_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,v_j^0(s),w_j^0(s))ds \geqslant v_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [0,l], \tag{18}$$

$$\varphi_j(x) + \int_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,w_j^0(s),v_j^0(s))ds \leqslant w_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [0,l], \tag{19}$$

де позначено

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{\tau}\int_0^l G_j(x,s)U_{j-1}(s)ds.$$

Зауважимо, що $\varphi_j(x) > 0$ для всіх $x \in (0,l)$ і $\varphi_j(0) = \varphi_j(l) = 0$.

Сформуємо ітераційний процес за схемою $v^{(k+1)} = \hat{T}_j(v^{(k)},w^{(k)})$, $w^{(k+1)} = \hat{T}_j(w^{(k)},v^{(k)})$, $k = 0,1,2,...$, починаючи з кінців відрізка $< v_j^0, w_j^0 >$:

$$v^{(k+1)}(x) = \int\limits_0^l G_j(x,s)\hat{F}_j(s,v^{(k)}(s),w^{(k)}(s))ds, \quad k = 0,1,2,...,$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int\limits_0^l G_j(x,s)\hat{F}_j(s,w^{(k)}(s),v^{(k)}(s))ds, \quad k = 0,1,2,...,$$

$$v^{(0)}(x) = v_j^0(x), \quad w^{(0)}(x) = w_j^0(x).$$

З урахуванням (13) ітераційні формули набувають вигляду

$$v^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int\limits_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,v^{(k)}(s),w^{(k)}(s))ds, \quad k = 0,1,2,..., \tag{20}$$

$$w^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int\limits_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,w^{(k)}(s),v^{(k)}(s))ds, \quad k = 0,1,2,..., \tag{21}$$

$$v^{(0)}(x) = v_j^0(x), \quad w^{(0)}(x) = w_j^0(x). \tag{22}$$

Відмітимо, що всі функції $v^{(k)}(x)$, $w^{(k)}(x)$, $k = 1,2,...$, задовольняють однорідні крайові умови: $v^{(k)}(0) = v^{(k)}(l) = 0$, $w^{(k)}(0) = w^{(k)}(l) = 0$.

Послідовність $\{v^{(k)}(x)\}$ не спадає за конусом $\mathcal{K}_+$, а послідовність $\{w^{(k)}(x)\}$ не зростає за конусом $\mathcal{K}_+$, який є нормальним, та існують границі цих послідовностей $v^*(x)$ і $w^*(x)$. Функції $v^*(x)$ і $w^*(x)$ є розв'язком системи рівнянь

$$v(x) = \varphi_j(x) + \int\limits_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,v(s),w(s))ds, \tag{23}$$

$$w(x) = \varphi_j(x) + \int\limits_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,w(s),v(s))ds. \tag{24}$$

Теорема 1. *Нехай $< v_j^0, w_j^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду* (12) *з супровідним оператором $\hat{T}_j$ вигляду* (14) *і система рівнянь* (23), (24) *не має на $< v_j^0, w_j^0 >$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес* (20) – (22) *двобічно збігається у нормі простору $C[0,l]$ до единого на $< v_j^0, w_j^0 >$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(x)$ крайової задачі* (7) – (9).

Двобічна збіжність ітераційного процесу (20) – (22) означає виконання ланцюга нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant ... \leqslant v^{(k)} \leqslant ... \leqslant U_j^* \leqslant ... \leqslant w^{(k)} \leqslant ... \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0. \quad (25)$$

Ця теорема може бути уточнена за рахунок накладання додаткових умов, за виконання яких система рівнянь (23), (24) не має на $< v_j^0, w_j^0 >$ розв'язків таких, що $v \neq w$, і ми отримаємо умови розв'язності задач (7) – (9) для всіх $j = 1, ..., m$. Однією з таких умов є умова u_0-псевдоувігнутості оператора T_j.

Отже, справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай $< v_j^0, w_j^0 >\subset K(u_0^j)$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду* (12) *з супровідним оператором $\hat{T}_j$ вигляду* (14)*, $j = 1, ..., m$, та для всіх $v, w > 0$ і при будь-якому $\nu \in (0, 1)$*

$$\hat{f}\left(x, t, \nu v, \frac{1}{\nu} w\right) > \nu \hat{f}(x, t, v, w), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T_0]. \quad (26)$$

Тоді при кожному j, $j = 1, ..., m$, ітераційний процес (20) – (22) *двобічно збігається у нормі простору $C[0, l]$ до єдиного на $< v_j^0, w_j^0 >$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(x)$ крайової задачі* (7) – (9).

За наближений розв'язок вихідної нестаціонарної задачі (2) – (5) на j-му часовому шарі на k-й ітерації приймаємо функцію

$$U_j^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}. \quad (27)$$

Перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є те, що на кожній k-й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (27):

$$\left\| U_j^* - U_j^{(k)} \right\| \leqslant \frac{1}{2} \max_{x \in [0, l]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)).$$

Тоді якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес розв'язання j-ї задачі, $j = 1, ..., m$, слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in [0, l]} \left| w^{(k_j)}(x) - v^{(k_j)}(x) \right| < 2\varepsilon$$

і з точністю ε можна вважати, що

$$u^*(x, t_j) = U_j^*(x) \approx U_j^{(k_j)}(x).$$

Отже, застосовуючи запропонований метод двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, ми отримаємо набір функцій

$$U_0(x) = \varphi(x), \quad U_1^{(k_1)}(x), \quad U_2^{(k_2)}(x), \quad \dots, \quad U_m^{(k_m)}(x). \quad (28)$$

З теореми 2 відповідно до загальних теорем збіжності метода Роте [6, 21] випливає збіжність запропонованої схеми до розв'язку задачі (2) – (5) при $\tau \to 0$.

За набором функцій (28) можна, використовуючи, наприклад, апарат теорії інтерлінації [7], побудувати наближений розв'язок задач (2) – (5) у вигляді функції $u_m(x,t)$, визначеної при всіх $x \in [0,l]$, $t \in [0,T_0]$. Цей наближений розв'язок має точність $O(\tau)$. Якщо зробити розрахунки з кроком $\frac{\tau}{2}$, то отримаємо наближений розв'язок $u_{2m}(x,t)$, який відповідно до правила Рунге можна уточнити до порядку $O(\tau^2)$ за формулою

$$u(x,t) = 2u_{2m}(x,t) - u_m(x,t).$$

Для побудови сильно інваріантного конусного відрізка $< v_j^0, w_j^0 >$ при чисельній реалізації методу двобічних наближень розв'язання задач (7) – (9) можна надати такі рекомендації.

Якщо шукати відрізок $< v_j^0, w_j^0 >$ у вигляді $v_j^0(x) = \alpha_j u_0^j(x)$, $w_j^0(x) = \beta_j u_0^j(x)$, то для визначення чисел α_j, β_j $(0 < \alpha_j < \beta_j)$ з (18), (19) отримаємо систему нерівностей

$$\alpha_j \leqslant \min_{x\in[0,l]} h_1^j(x;\alpha_j,\beta_j), \quad \beta_j \geqslant \max_{x\in[a,b]} h_2^j(x;\alpha_j,\beta_j), \tag{29}$$

де

$$h_1^j(x;\alpha_j,\beta_j) = \frac{\varphi_j(x)}{u_0^j(x)} + \int\limits_0^l \frac{G_j(x,s)}{u_0^j(x)} \hat{f}(s,t_j,\alpha_j u_0^j(s),\beta_j u_0^j(s))ds,$$

$$h_2^j(x;\alpha_j,\beta_j) = \frac{\varphi_j(x)}{u_0^j(x)} + \int\limits_0^l \frac{G_j(x,s)}{u_0^j(x)} \hat{f}(s,t_j,\beta_j u_0^j(s),\alpha_j u_0^j(s))ds.$$

Якщо ж функція $f(x,t,u)$ визначена при $u = 0$, то незалежно від того $f(x,t,0) > 0$ чи $f(x,t,0) = 0$, конусний відрізок $< v_j^0, w_j^0 >$ можна шукати у вигляді $v_j^0(x) = 0$, $w_j^0(x) = \beta_j$. Це приводить до нерівностей

$$\varphi_j(x) + \int\limits_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,0,\beta)ds \geqslant 0 \text{ для всіх } x \in [0,l],$$

$$\varphi_j(x) + \int\limits_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,\beta,0)ds \leqslant \beta \text{ для всіх } x \in [0,l],$$

перша з яких завжди виконуватиметься, а друга приводиться до вигляду

$$\max_{x\in[0,l]} \varphi_j(x) + M^j \max_{x\in[0,l]} \hat{f}(x,t_j,\beta,0) \leqslant \beta,$$

де $M^j = \max\limits_{x\in[0,l]} u_0^j(x)$.

3. Обчислювальний експеримент. Роботу запропонованого методу продемонструємо на тестовій задачі з експоненціальним коефіцієнтом теплопровідності та гетеротонною степеневою нелінійністю:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\delta x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \kappa^2 u = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T_0], \tag{30}$$

$$u(x,t) > 0, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T_0], \tag{31}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T_0], \tag{32}$$

$$u\big|_{t=0} = x(l-x), \quad x \in (0,l), \tag{33}$$

де $p, q > 0$, $\lambda, \mu > 0$.

Для функції $f(x,t,u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ обираємо $\hat{f}(x,t,v,w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$. Умова u_0-псевдоувігнутості (26), записана для функції $f(x,t,u)$, приводить до нерівності

$$\lambda\nu(\nu^{p-1} - 1)v^p + \mu\nu(\nu^{q-1} - 1)w^{-q} > 0,$$

яка виконуватиметься для всіх $\nu \in (0,1)$, $v, w > 0$ і для будь-яких $\lambda, \mu > 0$, якщо $0 < p < 1$, $0 < q < 1$.

Задача (7) – (9) для j-го часового шару, відповідна нестаціонарній задачі (30)–(33), матиме вигляд

$$-\frac{d}{dx}\left(e^{\delta x}\frac{dU_j}{dx}\right) + \left(\kappa^2 + \frac{1}{\tau}\right)U_j = \frac{1}{\tau}U_{j-1} + \lambda U_j^p + \mu U_j^{-q}, \quad x \in (0,l), \tag{34}$$

$$U_j(x) > 0, \quad x \in (0,l), \tag{35}$$

$$U_j(0) = 0, \quad U_j(l) = 0, \tag{36}$$

$$j = 1, ..., m;$$

$$U_0(x) = x(l-x).$$

Як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь, функція Гріна $G(x,s)$ задачі

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0,$$

де $p(x) \in C^1[0,l]$, $q(x), f(x) \in C[0,l]$, визначається такими умовами:

1) $G(x,s)$ задовольняє однорідне рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = 0$$

всюди, крім точки $x = s$ (ξ – довільна, але фіксована точка з $(0,l)$);

2) $G(x,s)$ задовольняє крайовим умовам $u(0) = 0$, $u(l) = 0$;

3) $G(x,s)$ неперервна за x при будь-якому фіксованому ξ;

4) має місце співвідношення

$$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = -\frac{1}{p(s)}.$$

Доведено, що цим умовам задовольняє функція

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{u_1(x)u_2(s)}{p(s)|W(s)|}, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ -\frac{u_1(s)u_2(x)}{p(s)|W(s)|}, & s < x \leqslant l, \end{cases}$$

де $u_1(x)$ – нетривіальний розв'язок задачі $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_1}{dx}\right) + q(x)u_1 = 0$, $u_1(0) = 0$, $u_2(x)$ – нетривіальний розв'язок задачі $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_2}{dx}\right) + q(x)u_2 = 0$, $u_2(l) = 0$, $|W(s)| = \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1'(s) & u_2'(s) \end{vmatrix}$ – визначник Вронського функцій u_1, u_2.

Фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(e^{\delta x}\frac{dU}{dx}\right) + \left(\kappa^2 + \frac{1}{\tau}\right)U = 0$$

утворюють функції $e^{-\frac{\delta}{2}x} I_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)$ та $e^{-\frac{\delta}{2}x} K_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)$, де $I_1(z)$ і $K_1(z)$ – модифіковані функції Бесселя першого і другого роду відповідно.

Крайовій умові $U(0) = 0$ задовольняє функція

$$g_1(x) = e^{-\frac{\delta}{2}x}\left[\frac{K_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}{K_1\left(\frac{2\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)} - \frac{I_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}{I_1\left(\frac{2\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}\right],$$

а крайовій умові $U(l) = 0$ – функція

$$g_2(x) = e^{-\frac{\delta}{2}x}\left[\frac{I_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}{I_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}l}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)} - \frac{K_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}{K_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}l}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}\right].$$

Якщо $|W(x)| = \begin{vmatrix} g_1(x) & g_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}$ – визначник Вронського функцій $g_1(x)$ і $g_2(x)$, то функція Гріна задачі (34) – (36) матиме вигляд

$$G(x,s) = -\begin{cases} \dfrac{g_1(x)g_2(s)}{e^{\delta s}\,|W(s)|}, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ \dfrac{g_1(s)g_2(x)}{e^{\delta s}\,|W(s)|}, & s \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Шукаючи на j-му часовому шарі кінці сильно інваріантного конусного відрізка $< v_j^0, w_j^0 >$ у вигляді $v_j^0(x) = \alpha_j u_0(x)$, $w_j^0(x) = \beta_j u_0(x)$, де $u_0(x) = \int\limits_0^l G(x,s)ds$, відповідно до (29) для визначення чисел α_j, β_j $(0 < \alpha_j < \beta_j)$ отримаємо систему нерівностей

$$\alpha_j \leqslant m_0^j + \lambda m_1 \alpha_j^p + \mu m_2 \beta_j^{-q}, \quad \beta_j \geqslant M_0^j + \lambda M_1 \alpha_j^p + \mu M_2 \beta_j^{-q}, \qquad (37)$$

де

$$m_0^j = \min_{x\in[0,l]} \frac{\varphi_j(x)}{u_0(x)}, \quad M_0^j = \max_{x\in[0,l]} \frac{\varphi_j(x)}{u_0(x)},$$

$$m_1 = \min_{x\in[0,l]} \int_0^l \frac{G(x,s)}{u_0(x)} u_0^p(s)ds, \quad M_1 = \max_{x\in[0,l]} \int_0^l \frac{G(x,s)}{u_0(x)} u_0^p(s)ds,$$

$$m_2 = \min_{x\in[0,l]} \int_0^l \frac{G(x,s)}{u_0(x)} u_0^{-q}(s)ds, \quad M_2 = \max_{x\in[0,l]} \int_0^l \frac{G(x,s)}{u_0(x)} u_0^{-q}(s)ds.$$

Отже, для $\lambda, \mu > 0$ і $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ згідно з теоремою 2 на кожному часовому шарі j, $j = 1, ..., m$, ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int_0^l G(x,s)\{\lambda[v^{(k)}(s)]^p + \mu[w^{(k)}(s)]^{-q}\}ds, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{38}$$

$$w^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int_0^l G(x,s)\{\lambda[w^{(k)}(s)]^p + \mu[v^{(k)}(s)]^{-q}\}ds, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{39}$$

$$v^{(0)}(x) = \alpha_j u_0(x), \quad w^{(0)}(x) = \beta_j u_0(x), \tag{40}$$

де α_j, β_j $(0 < \alpha_j < \beta_j)$ є розв'язком системи нерівностей (37), двобічно збігається до функції $U_j^*(x)$, яка є наближенням за модифікованим методом Роте для функції $u(x, t_j)$.

Для проведення обчислень оберемо $l = 1$, $\delta = 1$, $\kappa = 1$, $\lambda = \mu = 1$, $p = q = \frac{1}{2}$, $T_0 = 0{,}3$. Візьмемо крок сітки за часом $\tau = 0{,}1$ і побудуємо з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ наближення $U_1(x)$ до функції $u(x,t)$ на першому часовому шарі $t = \tau$.

Знаходимо

$$\varphi_1(x) = 10 \int_0^1 G(x,s)s(1-s)ds, \quad u_0(x) = \int_0^1 G(x,s)ds,$$

$$m_0^1 = 1{,}4539, \quad M_0^1 = 2{,}1171, \quad m_1 = 0{,}1554,$$

$$M_1 = 0{,}1942, \quad m_2 = 5{,}2837, \quad M_2 = 8{,}5482.$$

Множину значень (α_1,β_1), що задовольняють при $j = 1$ систему нерівностей (37), наведено на рис. 1.

Для реалізації ітераційного процесу (38) – (40) обираємо $\alpha_1 = 3{,}7444$, $\beta_1 = 7{,}0503$. Для досягнення заданої точності було зроблено шість ітерацій. На рис. 2 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(x)$ для $k = 0, 2, 4, 6$.

Розглядаючи відношення $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$, $k = 0, 1, ..., 5$, похибок $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max\limits_{x\in[0,l]} (w^{(k)}(x) - -v^{(k)}(x))$, отримали, що $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0{,}301$. Це свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з показником 0,301.

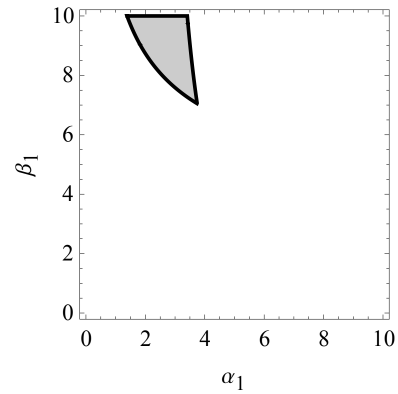

Рис. 1. Розв'язок системи нерівностей (37) при $j = 1$ ($\tau = 0{,}1$)

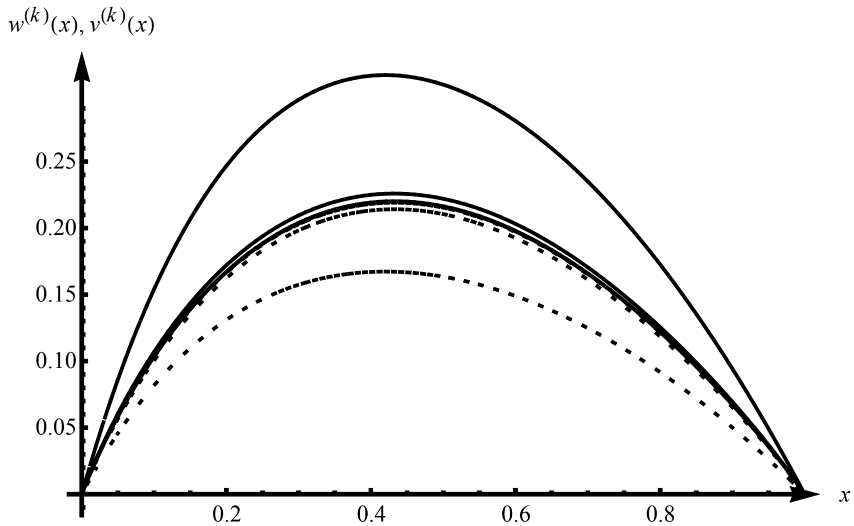

Рис. 2. Графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень до $U_1^*(x)$ для $k = 0, 2, 4, 6$ ($\tau = 0{,}1$)

Аналогічно було знайдено з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ наближення до $u(x,t)$ на часових шарах $t_j = 0{,}1j$ при $j = 2{,}3$. Отримані функції $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ наближають з точністю $O(\tau)$ значення $u(x,t)$ у моменти часу $t_1 = 0{,}1$, $t_2 = 0{,}2$, $t_3 = 0{,}3$ відповідно. Для їх уточнення до порядку $O(\tau^2)$ було з тією ж самою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ отримано розв'язки $\tilde{U}_1(x)$, $\tilde{U}_2(x)$, $\tilde{U}_3(x)$, $\tilde{U}_4(x)$, $\tilde{U}_5(x)$, $\tilde{U}_6(x)$ з кроком $\tau = 0{,}05$ для відповідних моментів часу $t_1 = 0{,}05$, $t_2 = 0{,}1$, $t_3 = 0{,}15$, $t_4 = 0{,}2$, $t_5 = 0{,}25$, $t_6 = 0{,}3$. З їх допомогою значення $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ було уточнено за формулами

$$u(x{,}0{,}1) \approx 2\tilde{U}_2(x) - U_1(x), \quad u(x{,}0{,}2) \approx 2\tilde{U}_4(x) - U_2(x), \quad u(x{,}0{,}3) \approx 2\tilde{U}_6(x) - U_3(x).$$

Значення функції $u(x,0) = x(1-x)$ та наближень до $u(x{,}0{,}1)$, $u(x{,}0{,}2)$, $u(x{,}0{,}3)$ у точках відрізка $[0{,}1]$ з кроком 0,1 наведено у таблиці.

Таблиця

Значення наближеного розв'язку задачі (30) − (33)

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$u(x_i,0)$	0	0,09	0,16	0,21	0,24	0,25	0,24	0,21	0,16	0,09	0
$u(x_i,0{,}1)$	0	0,104	0,167	0,201	0,213	0,208	0,188	0,157	0,115	0,064	0
$u(x_i,0{,}2)$	0	0,102	0,162	0,195	0,207	0,203	0,184	0,154	0,113	0,063	0
$u(x_i,0{,}3)$	0	0,101	0,162	0,195	0,207	0,202	0,202	0,154	0,113	0,063	0

Висновки. Для розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного одновимірного рівняння теплопровідності зі змінним коефіцієнтом теплопровідності у роботі вперше запропоновано комбінацію модифікованого метода Роте і метода двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Обчислювальний експеримент, проведений для задачі з експоненціальним коефіцієнтом теплопровідності та гетеротонною степеневою нелінійністю, продемонстрував можливості та ефективність метода. Запропонований метод може бути використаний при розв'язанні прикладних задач, математичними моделями яких є початково-крайові задачі вигляду (2)–(5), і розповсюджений на задачі для багатовимірних параболічних рівнянь. Перевагами запропонованого методу як методу обчислювальної математики є відсутність залежності між кроком за часом та кількістю ітерацій на кожному часовому шарі, яка у сіткових методах визначає стійкість різницевої схеми (вибір кроку за часом визначається лише необхідною точністю), та наявність зручної апостеріорної оцінки похибки на кожному часовому шарі при реалізації послідовних наближень. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих результатів.

1. **Вороненко М. Д.** Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь / М.Д. Вороненко, М.В. Сидоров // Радиоэлектрон. и инф. – 2018. – № 1 (80). – С. 48–54.

2. **Зельдович Я. Б.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – 2-е изд., доп. / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. – М.: Наука, 1966. – 686 с.

3. **Колосов А. И.** Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений / А. И. Колосов, С. В. Колосова, М. В. Сидоров // Вісн. Запоріз. нац. у–ту. Сер.: фіз.-мат. н. – 2012. – № 2. – С. 50–57.

4. **Колосова С. В.** О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане—Эмдена / С. В. Колосова, В. С. Луханин, М. В. Сидоров // Вісн. Запоріз. нац. у–ту. Сер.: фіз.-мат. н. – 2015. – № 3. – С. 107–120.

5. **Красносельский М. А.** Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.

6. **Ладыженская О. А.** Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений / О. А. Ладыженская // Тр. ММО. – 1958. – Т. 7. – С. 149–177.

7. **Литвин О. М.** Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.

8. **Маслов В. П.** Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур / В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов. – М.: Наука, 1987. – 352 с.

9. **Опойцев В. И.** Нелинейные операторы в пространствах с конусом / В. И. Опойцев, Т. А. Хуродзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.

10. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. – М.: Наука, 1987. – 478 с.

11. **Самарский А. А.** Численные методы математической физики. – 2-е изд. / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.

12. **Сидоров М. В.** Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна—Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач / М. В. Сидоров // Вісн. Запоріз. нац. у-ту. Сер.: фіз.-мат. н. – 2017. – № 2. – С. 250–259.

13. **Франк-Каменецкий Д. А.** Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике / Д. А. Франк-Каменецкий. – М.: Интеллект, 2008. – 408 с.

14. **Шувар Б. А.** Двосторонні наближені методи / Б. А. Шувар, М. І. Копач, С. М. Ментинський, А. Ф. Обшта. – Івано-Франковськ: ВДВ ЦІТ, 2007. – 515 с.

15. **Amann H.** Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces / H. Amann // SIAM Review. – 1976. – Vol. 18. – № 4. – P. 620–709.

16. **Bartosz K.** The Rothe method for variational-hemivariational inequalities with applications to contact mechanics / K. Bartosz, M. Sofonea // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 2016. – Vol. 48. – № 2. – P. 861–883.

17. **Chaoui A.** On the solution of a fractional diffusion integrodifferential equation with Rothe time discretization / A. Chaoui, A. Hallaci // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2018. – Vol. 39. – № 6. – P. 643–654.

18. **Guo D.** Coupled fixed points of nonlinear operators with applications / D. Guo, V. Lakshmikantham // Nonlinear Anal. – 1987. – Vol. 11. – № 5. – P. 623–632.

19. **Nochetto R.** Space-time methods for time-dependent partial differential equations / R. Nochetto, S. Sauter, C. Wieners // Oberwolfach Rep. – 2017. – Vol. 14. – P. 863–947.

20. **Pao C. V.** Nonlinear parabolic and elliptic equations / C. V. Pao. – New York: Plenum Press, 1992. – 794 p.

21. **Rothe E.** Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben // Math. Ann. – 1930. – Vol. 102. – № 1. – P. 650–670.

Сидоров М. В.

Метод двусторонних приближений и метод прямых решения задач для одномерного полулинейного уравнения теплопроводности

Резюме

Рассмотрена первая начально-краевая задача для одномерного полулинейного уравнения теплопроводности. На основании модифицированного метода Роте на каждом временном слое исходная нестационарная задача заменена нелинейной краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения. Методом функций Грина от этой задачи выполнен переход к эквивалентному интегральному уравнению Гаммерштейна, которое рассмотрено далее как нелинейное операторное уравнение с гетеротонным

оператором в пространстве непрерывных функций, полуупорядоченном конусом неотрицательных функций. Для нахождения положительного решения интегрального уравнения (а значит, и обобщенного решения соответствующей краевой задачи) на каждом временном слое построен метод последовательных приближений с двусторонним характером сходимости. Итак, в работе для первой начально-краевой задачи для одномерного полулинейного уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности впервые построен полудискретный метод её решения, основанный на совместном использовании модифицированного метода прямых Роте и метода двусторонних приближений. Вычислительный эксперимент был проведен для задачи с экспоненциальным коэффициентом теплопроводности, гетеротонной степенной нелинейностью и параболическим начальным распределением температуры.
Ключевые слова: полулинейное уравнение теплопроводности, положительное решение, двусторонние приближения .

Sidorov M. V.
Two-sided approximations method and Rothe method for solving problems for the one-dimensional semilinear heat equation

Summary

We consider the first initial-boundary problem for the one-dimensional semilinear heat equation. Based on the modified Rothe method at each time layer the original non-stationary problem is replaced by a nonlinear boundary-value problem for an ordinary differential equation. Using the Green's functions method of nonlinear boundary value problems for an ordinary differential equation, a transition to an equivalent Hammerstein integral equation is considered, which is investigated as a nonlinear operator equation with a heterotone operator in the space of continuous functions that is semiordered by a cone of non-negative functions. To find a positive solution of the integral equation (and hence a generalized solution of the corresponding boundary value problem), a method of successive approximations with a two-sided character of convergence is constructed on each time layer. Thus, in the work for the first initial-boundary value problem for the one-dimensional semilinear heat equation with a variable heat conduction coefficient, a semi-discrete method for its solution was first built, based on the combined use of the modified Rothe lines method and the two-sided approximation method. A computational experiment was carried out for a heterotone power nonlinearity problem with exponential coefficient of thermal conductivity and parabolic initial temperature distribution.
Key words: semilinear heat equation, positive solution, two-sided approximations.

References

1. Voronenko M. D., Sidorov M. V. (2018) Constructive investigation of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations. [in Russian] // Radioelektronica i informatika, Vol. 1 (80). – P. 48–54.

2. Zel'dovich Ya. B., Raizer Yu. P. (1966) Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena [in Russian], Nauka, Moscow.

3. Kolosov A. I., Kolosova S. V., Sidorov M. V. (2012) Constructive research of boundary value problems for nonlinear differential equations. [in Russian] // Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences, Vol. 2. – P. 50–57.

4. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. (2015) On the construction of two-sided approximations to the positive solution of the Lane-Emden equation. [in Russian] // Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences, Vol. 3. – P. 107–120.
5. Krasnosel'skij M. A. (1962) Positive Solutions of Operator Equations [in Russian], Fizmatgiz, Moscow.
6. Ladyženskaya O. A. (1958) Solution of the first boundary problem in the large for quasilinear parabolic equations. [in Russian] // Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshestva, Vol. 7. – P. 149–177.
7. Lytvyn O. M. (2002) Interlineation of Functions and some its Applications [in Ukrainian], Osnova, Kharkiv.
8. Maslov V. P., Danilov V. G., Volosov K. A. (1987) Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Processes. Evolution of Dissipative Structures [in Russian], Nauka, Moscow.
9. Opojtsev V. I., Khurodze T. A. (1984) Nonlinear Operators in Spaces with a Cone [in Russian], Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta, Tbilisi.
10. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. (1987) Regimes with Peaking in Problems for Quasilinear Parabolic Equations [in Russian], Nauka, Moscow.
11. Samarskii A. A., Gulin A. V. (2003) Numerical Methods of Mathematical Physics [in Russian], Nauchnyj mir, Moscow.
12. Sidorov M. V. (2017) Construction two-sided iterative processes for solving nonlinear boundary value problems using methods of Green's functions and the quasi-functions of Green-Rvachev. [in Ukrainian] // Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences, Vol. 2. – P. 250–259.
13. Frank-Kamenetskii D. A. (2008) Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics [in Russian], Intellekt, Moscow.
14. Shuvar B. A., Kopach M. I., Mentins'kij S. M., Obshta A. F. (2007) Two-sided Approximates Methods [in Ukrainian], VDV CIT, Ivano-Frankovs'k.
15. Amann H. (1976) Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces // SIAM Review, Vol. 18 (4). – P. 620–709.
16. Bartosz K., Sofonea M. (2016) The Rothe method for variational-hemivariational inequalities with applications to contact mechanics // SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 48 (2). – P. 861–883.
17. Chaoui A., Hallaci A. (2018) On the solution of a fractional diffusion integrodifferential equation with Rothe time discretization // Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 39 (6). – P. 643–654.
18. Guo D., Lakshmikantham V. (1987) Coupled fixed points of nonlinear operators with applications // Nonlinear Anal., Vol. 11 (5). – P. 623–632.
19. Nochetto R., Sauter S., Wieners C. (2017) Space-time methods for time-dependent partial differential equations // Oberwolfach Rep., Vol. 14. – P. 863–947.
20. Pao C. V. (1992) Nonlinear parabolic and elliptic equations // New York: Plenum Press. – 794 p.
21. Rothe E. (1930) Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben // Math. Ann., Vol. 102 (1). – P. 650–670.