УДК 517.925

**Н. П. Колун**
Военная академия (г. Одесса)

# АСИМПТОТИКА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО И БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В настоящей работе для дифференциального уравнения второго порядка, которое содержит в правой части сумму слагаемых с правильно и быстро меняющимися нелинейностями, устанавливаются необходимые и достаточные условия существования так называемых $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений ($Y_0$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$) в особом случае, когда параметр $\lambda_0 = 0$. При таком значении параметра $\lambda_0$ исследуемые решения являются медленно меняющимися при $t \uparrow \omega$ ($\omega \leqslant +\infty$) функциями. Также устанавливаются асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления для таких решений и их производных первого порядка. Результаты работы получены в предположении, что на каждом решении из рассматриваемого класса правая часть исследуемого дифференциального уравнения эквивалентна при $t \uparrow \omega$ одному слагаемому с правильно меняющейся нелинейностью. Рассмотрен пример дифференциального уравнения, иллюстрирующий полученные в работе результаты.
*MSC: 34E99.*
*Ключевые слова: правильно меняющиеся функции, быстро меняющиеся функции, нелинейные дифференциальные уравнения, $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения, асимптотика $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений, асимптотическое представление $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений.*
*DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149704.*

**Введение.** Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y), \tag{1}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1,1\}$ $(i = \overline{1,m})$, $p_i : [a,\omega[\to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1,m})$ — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$; $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to ]0, +\infty[$ $(i = \overline{1,m})$, где $\Delta_{Y_0}$ — односторонняя окрестность $Y_0$, $Y_0$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$, являются непрерывными функциями при $i = \overline{1,l}$ и дважды непрерывно дифференцируемыми при $i = \overline{l+1,m}$, причем для каждого $i \in \{1,...,l\}$ при некотором $\sigma_i \in \mathbb{R}$ выполняются условия

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i} \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0, \tag{2}$$

а для каждого $i \in \{l+1,...,m\}$ –

$$\varphi_i'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) \in \{0, +\infty\}, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1. \tag{3}$$

*Получена 05.07.2018* © Колун Н. П., 2018

Функции $\varphi_i$ $(i = \overline{1,l})$, удовлетворяющие условиям (2), являются правильно меняющимися при $y \to Y_0$ функциями порядков $\sigma_i$ $(i = \overline{1,l})$ (см. монографию Е. Сенеты [3], гл. 1, §1, с. 9). Для них имеют место представления вида

$$\varphi_i(y) = \mid y \mid^{\sigma_i} L_i(y) \quad (i = \overline{1,l}), \tag{4}$$

где $L_i$ $(i = \overline{1,l})$ — медленно меняющиеся функции при $y \to Y_0$, т.е. такие, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{L_i(\lambda y)}{L_i(y)} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0.$$

Из условий (3) непосредственно вытекают предельные соотношения

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} = \pm\infty \quad (i = \overline{l+1,m}),$$

в силу которых при $i \in \{l+1,...,m\}$ каждая из функций $\varphi_i$ и ее производная первого порядка являются быстро меняющимися при $y \to Y_0$ функциями (см. монографию В. Марича [2], гл. 3, §3.4, леммы 3.2, 3.3, с. 91–92).

**Определение 1.** *Решение $y$ уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решением, где $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ и удовлетворяет следующим условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \textit{либо} & 0, \\ \textit{либо} & \pm\infty, \end{cases} \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{5}$$

В работе В. А. Касьяновой [3] были получены необходимые и достаточные условия существования, а также асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений в случае, когда в правой части дифференциального уравнения (1) все нелинейности являются правильно меняющимися при $y \to Y_0$ функциями. В работах В. М. Евтухова, А. Г. Черниковой [4–6] и А. Г. Черниковой [7] исследовалось двучленное уравнение с быстро меняющейся нелинейностью. В случае уравнения вида (1) в [8] изучались $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (1) при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования $P_\omega(Y_0,0)$-решений $y$ дифференциального уравнения (1), а также асимптотических при $t \uparrow \omega$ представлений для таких решений и их производных первого порядка в случае, когда для некоторого $s \in \{1,...,l\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \quad \text{при} \quad i \in \{1,...,m\}\setminus\{s\}, \tag{6}$$

т.е. когда на каждом таком решении уравнения (1) правая часть уравнения эквивалентна при $t \uparrow \omega$ одному слагаемому с правильно меняющейся нелинейностью.

При изучении $P_\omega(Y_0,0)$-решений дифференциального уравнения (1) понадобится одно вспомогательное утверждение об их априорных асимптотических свойствах, справедливость которого непосредственно вытекает из работы В. М. Евтухова [9] (см. следствие 10.1).

Введем функцию $\pi_\omega : [a,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

**Лемма 1.** *Для каждого $P_\omega(Y_0,0)$-решения дифференциального уравнения (1)*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0 \tag{7}$$

*и в случае существования (конечного или равного $\pm\infty$) $\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = -1. \tag{8}$$

**Основные результаты.** В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(b), \quad \text{где} \quad \Delta_{Y_0}(b) = \begin{cases} [b,Y_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{левая окрестность} \quad Y_0, \\ ]Y_0,b], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{правая окрестность} \quad Y_0, \end{cases}$$

и число $b$ удовлетворяет неравенствам

$$|b| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0 \quad \text{и} \quad b > 1 \quad (b < -1) \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty \quad (Y_0 = -\infty).$$

Положим

$$\nu_0 = \operatorname{sign} b, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b,Y_0[, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) = ]Y_0,b]. \end{cases}$$

Учитывая определение $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (1), заметим, что числа $\nu_0$ и $\nu_1$ определяют знаки любого $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения и его первой производной (соответственно) в некоторой левой окрестности $\omega$. При этом ясно, что условия

$$\nu_0\nu_1 = -1, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0, \quad \nu_0\nu_1 = 1, \quad \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty,$$

являются необходимыми для наличия $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений. Если же для таких решений уравнения (1), кроме того, выполняются условия (6), то $\operatorname{sign} y''(t) = \alpha_s$ в некоторой левой окрестности $\omega$ и при этом

$$\nu_1\alpha_s = -1, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = 0, \quad \nu_1\alpha_s = 1, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \pm\infty.$$

Положим при $s \in \{1,\ldots,l\}$

$$H_s(y) = \int_{B_s}^{y} \frac{du}{\varphi_s(u)},$$

где

$$B_s = \begin{cases} b, \text{ если} & \int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} = \pm\infty, \\ Y_0, \text{ если} & \int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} = \text{const}. \end{cases}$$

Так как $H_s'(y) = \frac{1}{\varphi_s(y)} > 0$ при $y \in \Delta_{Y_0}(b)$, то функция $H_s$ возрастающая на $\Delta_{Y_0}(b)$ и существует обратная функция $H_s^{-1} : \Delta_{Z_s}(c_s) \to \Delta_{Y_0}(b)$ такая, что

$$\lim_{\substack{z \to Z_s \\ z \in \Delta_{Z_s}(c_s)}} H_s^{-1}(z) = Y_0, \tag{9}$$

где

$$Z_s = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} H_s(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad B_s = Y_0, \\ +\infty, & \text{если} \quad B_s = b < Y_0, \\ -\infty, & \text{если} \quad B_s = b > Y_0, \end{cases}$$

$$\Delta_{Z_s}(c_s) = \begin{cases} [c_s,Z_s[, \text{ если} & \Delta_{Y_0}(b) = [b,Y_0[, \\ ]Z_s,c_s], \text{ если} & \Delta_{Y_0}(b) = ]Y_0,b], \end{cases} \quad c_s = \int_{B_s}^{b} \frac{du}{\varphi_s(u)}.$$

В силу представлений (4), свойств медленно меняющихся функций (см. монографию Е. Сенеты [3], гл. 1, §2, с. 15) и правила Лопиталя

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{y}{H_s(y)\varphi_s(y)} = 1 - \sigma_s. \tag{10}$$

Введем также вспомогательные функции

$$J_s(t) = \int_{A_s}^{t} p_s(\tau)d\tau, \quad J_{ss}(t) = \int_{A_{ss}}^{t} J_s(\tau)d\tau,$$

в которых

$$A_s = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^\omega p_s(\tau)d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega p_s(\tau)d\tau = \text{const}, \end{cases} \qquad A_{ss} = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^\omega J_s(\tau)d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega J_s(\tau)d\tau = \text{const}. \end{cases}$$

**Теорема 1.** *Пусть для некоторого $s \in \{1,...,l\}$ выполняется неравенство $\sigma_s \neq 1$ и существует конечный или равный $\pm\infty$ предел*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_s'(t)}{J_s(t)}.$$

*Тогда для существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega(Y_0,0)$-решений, удовлетворяющих условиям (6), необходимо, чтобы*

$$\alpha_s \nu_0 (1 - \sigma_s) J_{ss}(t) > 0, \quad \alpha_s \nu_1 \pi_\omega(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in ]a,\omega[, \tag{11}$$

$$\alpha_s \lim_{t \uparrow \omega} J_{ss}(t) = Z_s, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_s'(t)}{J_s(t)} = -1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{J_s^2(t)}{p_s(t) J_{ss}(t)} = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))} = 0 \quad \textit{при любом} \quad i \in \{1,...,l\} \setminus \{s\}, \tag{13}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+\delta_i)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}=0 \quad \text{при любом} \quad i\in\{l+1,...,m\}, \tag{14}$$

*где $\delta_i$ — любое число из некоторой односторонней окрестности нуля. Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления*

$$y(t)=H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{15}$$

$$y'(t)=\frac{J_s(t)H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t))}{(1-\sigma_s)J_{ss}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{16}$$

**Теорема 2.** *Пусть для некоторого $s\in\{1,...,l\}$ выполняется неравенство $\sigma_s\neq 1$, справедливы условия (11)–(13) и*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}=0 \quad \text{при любом} \quad i\in\{l+1,...,m\} \tag{17}$$

*равномерно по $u\in[-\delta,\delta]$ для некоторого $0<\delta<1$. Тогда у дифференциального уравнения (1) существуют $P_\omega(Y_0,0)$-решения, допускающие асимптотические представления (15) и (16), причем если $\alpha_s\nu_0(1-\sigma_s)\pi_\omega(t)<0$ при $t\in]a,\omega[$, то при $\omega=+\infty$ таких решений существует однопараметрическое семейство, а при $\omega<+\infty$ — двухпараметрическое семейство.*

**Доказательство теоремы 1.** Пусть $y:[t_0,\omega[\to\mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,0)$-решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условиям (6). Тогда в силу (1) и (6) имеет место асимптотическое представление

$$y''(t)=\alpha_s p_s(t)\varphi_s(y(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{18}$$

Согласно свойствам правильно меняющихся функций, существует непрерывно дифференцируемая и правильно меняющаяся при $y\to Y_0$ порядка $\sigma_s$ функция $\varphi_{0s}:\Delta_{Y_0}(b)\to]0,+\infty[$ такая, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\varphi_s(y)}{\varphi_{0s}(y)}=1, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{y\varphi_{0s}'(y)}{\varphi_{0s}(y)}=\sigma_s. \tag{19}$$

Поэтому для рассматриваемого решения $y$ дифференциального уравнения (1), с учетом (18), имеем

$$\frac{y''(t)}{\varphi_{0s}(y(t))}=\alpha_s p_s(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{20}$$

Ввиду последнего из условий (5) и (19) справедливо соотношение

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{0s}(y(t))}\right)'=\frac{y''(t)}{\varphi_{0s}(y(t))}\left[1-\frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)}\cdot\frac{y(t)\varphi_{0s}'(y(t))}{\varphi_{0s}(y(t))}\right]=$$

$$=\frac{y''(t)}{\varphi_{0s}(y(t))}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Следовательно, с учетом (20), имеем

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{0s}(y(t))}\right)' = \alpha_s p_s(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от $t_0$ до $t$, получим

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{0s}(y(t))} = C + \alpha_s J_s(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где $C$ — некоторая вещественная постоянная.

В случае, когда в функции $J_s$ предел интегрирования $A_s = a$, $J_s(t) \to +\infty$ при $t \uparrow \omega$ и полученное соотношение представимо в виде

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{0s}(y(t))} = \alpha_s J_s(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{21}$$

Покажем, что в случае $A_s = \omega$ постоянная $C$ равна нулю. Предположим противное, что в этом случае $C \neq 0$. Тогда $J_s(t) \to 0$ при $t \uparrow \omega$ и будем иметь

$$\varphi_{0s}(y(t)) = \left[\frac{1}{C} + o(1)\right] y'(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому ввиду (20) справедливо соотношение

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_s \left[\frac{1}{C} + o(1)\right] p_s(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

из которого следует, что

$$\ln|y'(t)| = C_1 + \frac{\alpha_s}{C} J_s(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где $C_1$ — некоторая постоянная. Однако этого быть не может, поскольку здесь выражение, стоящее слева, согласно определению $P_\omega(Y_0,0)$-решения, стремится к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, а справа имеет конечный предел.

Таким образом, в каждом из двух возможных случаев выбора предела интегрирования $A_s$ получаем представление (21), из которого, с учетом (19), имеем

$$\frac{y'(t)}{\varphi_s(y(t))} = \alpha_s J_s(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{22}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от $t_1$ до $t$ ($t_1 \in ]t_0,\omega[$), получим

$$\int\limits_{y(t_1)}^{y(t)} \frac{ds}{\varphi_s(s)} = \alpha_s \int\limits_{t_1}^{t} J_s(\tau)[1+o(1)]\, d\tau \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{23}$$

Поскольку в силу первого из условий (5) $\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0$, то из (22) ясно, что несобственные интегралы

$$\int\limits_{y(t_1)}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi_s(s)} \quad \text{и} \quad \int\limits_{t_1}^{\omega} J_s(\tau)\, d\tau$$

сходятся или расходятся одновременно. Ввиду этого факта и выбора пределов интегрирования $A_{ss}$ и $B_s$ в функциях $J_{ss}$ и $H_s$, соотношение (23) может быть записано в виде

$$H_s(y(t)) = \alpha_s J_{ss}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{24}$$

Из (24) в силу первого из условий (5) и свойств функции $H$ следует выполнение первого из условий (12).

Из соотношений (18) и (22) имеем

$$\frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \frac{\pi_\omega(t) J_s'(t)}{J_s(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому в силу соотношения (8) леммы 1 соблюдается второе из условий (12). Кроме того, из соотношения (8) леммы 1 непосредственно вытекает второе из неравенств (11).

Далее, в силу (24) имеем

$$y(t) = H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)[1 + o(1)]) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{25}$$

Здесь $H_s^{-1}$ является правильно меняющейся функцией порядка $\frac{1}{1-\sigma_s}$ при $z \to Z_s$ как обратная для правильно меняющейся при $y \to Y_0$ функции $H_s$ порядка $1-\sigma_s \neq 0$. Более того, в силу первого из условий (12), существует $t_2 \in [t_1,\omega[$ такое, что функция $z(t) = \alpha_s J_{ss}(t)[1 + o(1)]$ такова, что $\lim_{t\uparrow\omega} z(t) = Z_s$ и $z(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_2,\omega[$. Поэтому, с учетом свойств правильно меняющихся функций, соотношение (25) можно переписать в виде (15). Кроме того, принимая во внимание предельное соотношение (10), из (24) получим

$$\frac{y(t)}{\varphi_s(y(t))} = \alpha_s(1 - \sigma_s) J_{ss}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{26}$$

Из (26) следует первое из условий (11). Из (22) и (26) имеем

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{J_s(t)}{(1 - \sigma_s) J_{ss}(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда с учетом (15) следует (16). Кроме того, с учетом последнего предельного соотношения, из (18), (22) и последнего из условий (5) следует третье из условий (12).

Поскольку при $s \in \{1,\dots,l\}$ функции $\varphi_i$ $(i = \overline{1,l})$ являются правильно меняющимися при $y \to Y_0$, а функция $z$ удовлетворяет указанным выше условиям, то

$$\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)[1 + o(1)])) = \varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тогда в силу (15) при $i \in \{1,\dots,l\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))[1 + o(1)]}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))[1 + o(1)]} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))},$$

откуда, с учетом (6), следует справедливость условий (13).

При $i \in \{l+1,...,m\}$ из (25), с учетом свойств функции $z$, имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)[1+o(1)])}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}. \tag{27}$$

В силу монотонности функций $\varphi_i(H_s^{-1}(z))$ $(i = \overline{l+1,m})$ на промежутке $\Delta_{Z_s}(c_s)$ для любых $\delta_i$ из некоторой окрестности нуля существует $t_3 \in [t_2,\omega[$ такое, что при $t \in [t_3,\omega[$

$$\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)[1+o(1)]))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))} \geqslant \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)[1+\delta_i]))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))} > 0,$$

откуда с учетом (6) и (27) следует справедливость условий (14). Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Используя преобразование

$$H_s(y(t)) = \alpha_s J_{ss}(t)[1+u_1(t)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{J_s(t)}{(1-\sigma_s)J_{ss}(t)}[1+u_2(t)], \tag{28}$$

сведем дифференциальное уравнение (1) к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_1' = h_1(t)\left[\frac{G(t,u_1)}{\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)}(1+u_2) - (1+u_1)\right], \\ u_2' = h_2(t)\left[(q(t)-1)(1+u_2) - \frac{q(t)}{1-\sigma_s}(1+u_2)^2 + \frac{\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)(1+R(t,u_1))}{G(t,u_1)}\right], \end{cases} \tag{29}$$

в которой

$$h_1(t) = \frac{J'_{ss}(t)}{J_{ss}(t)}, \quad h_2(t) = \frac{p_s(t)}{J_s(t)}, \quad q(t) = \frac{J_s^2(t)}{p_s(t)J_{ss}(t)}, \quad G(t,u_1) = \frac{Y(t,u_1)}{\varphi_s(Y(t,u_1))},$$

$$Y(t,u_1) = H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1)), \tag{30}$$

$$R(t,u_1) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m} \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))}. \tag{31}$$

Учитывая первое из условий (12), подберем число $t_0 \in [a,\omega[$ так, чтобы при $|u_1| \leqslant \delta$

$$\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1) \in \Delta_{Z_s}(c_s), \quad Y(t,u_1) \in \Delta_{Y_0}(b),$$

и рассмотрим систему (29) на множестве

$$\Omega = [t_0,\omega[\times D, \quad \text{где} \quad D = \{(u_1,u_2) : |u_i| \leqslant \delta, \quad i = 1,2\}.$$

Тогда в силу (9) и первого из условий (12)

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t,u_1) = Y_0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1 \in [-\delta,\delta]. \tag{32}$$

Отсюда, с учетом (10) и вида функции $G$, следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{G(t,u_1)}{H_s(Y(t,u_1))} = 1 - \sigma_s \quad \text{равномерно по} \quad u_1 \in [-\delta,\delta],$$

то есть
$$G(t,u_1)=[1-\sigma_s+R_1(t,u_1)]H_s(Y(t,u_1))$$
и
$$\frac{1}{G(t,u_1)}=\frac{1/(1-\sigma_s)+R_2(t,u_1)}{H_s(Y(t,u_1))},$$
где функции $R_i \quad (i=1,2)$ удовлетворяют условиям
$$\lim_{t\uparrow\omega} R_i(t,u_1)=0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1\in[-\delta,\delta]. \tag{33}$$
Следовательно, с учетом вида функции $Y(t,u_1)$, имеют место представления
$$G(t,u_1)=\alpha_s J_{ss}(t)[1-\sigma_s+R_1(t,u_1)](1+u_1), \tag{34}$$
$$\frac{1}{G(t,u_1)}=\frac{1/(1-\sigma_s)+R_2(t,u_1)}{\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1)}. \tag{35}$$
Кроме того, покаже, что
$$\lim_{t\uparrow\omega} R(t,u_1)=0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1\in[-\delta,\delta]. \tag{36}$$

Так как функции $\varphi_i$ $(i=\overline{1,l})$ являются правильно меняющимися при $y\to Y_0$ $(y\in\Delta_{Y_0}(b))$ порядков $\sigma_i$, то в силу представлений (4), с учетом свойств медленно меняющихся функций, имеем
$$\begin{gathered}\varphi_i(Y(t,u_1))=\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1)))=\\ =|H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1))|^{\sigma_i}L_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1)))=\\ =|H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1))|^{\sigma_i}L_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))(1+r_i(t,u_1))=\\ =\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))(1+u_1)^{\sigma_i}(1+r_i(t,u_1)), \quad (i=\overline{1,l}),\end{gathered}$$
где функции $r_i$ таковы, что
$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(t,u_1)=0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1\in[-\delta,\delta].$$

С учетом этих условий
$$\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))}=0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1\in[-\delta,\delta], \tag{37}$$
поскольку в силу условий (13)
$$\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))}=\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))(1+u_1)^{\sigma_i}[1+r_i(t,u_1)]}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))(1+u_1)^{\sigma_s}[1+r_s(t,u_1)]}=$$
$$=\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}=0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1\in[-\delta,\delta].$$

Из (37) и (17), в силу вида функции $R$, следует (36).

Учитывая (31), (34) и (35), систему дифференциальных уравнений (29) запишем в виде

$$\begin{cases} u_1' = h_1(t)\left[f_1(t,u_1,u_2) + u_2 + V_1(u_1,u_2)\right], \\ u_2' = h_2(t)\left[f_2(t,u_1,u_2) - u_1 - u_2 + V_2(u_1)\right], \end{cases} \tag{38}$$

где

$$f_1(t,u_1,u_2) = (1-\sigma_s)^{-1}R_1(t,u_1)(1+u_1)(1+u_2), \quad V_1(u_1,u_2) = u_1u_2,$$

$$f_2(t,u_1,u_2) = (1-\sigma_s)R_2(t,u_1)(1+u_1)^{-1} + (1+(1-\sigma_s)R_2(t,u_1))R(t,u_1)(1+u_1)^{-1} - \\ -(1-\sigma_s)^{-1}q(t)(1+u_1)(\sigma_s+u_2), \quad V_2(u_1) = (1+u_1)^{-1} - 1 + u_1.$$

В этой системе уравнений слагаемые $V_1$ и $V_2$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{|u_1|+|u_2|\to 0}\frac{V_1(u_1,u_2)}{|u_1|+|u_2|} = 0, \quad \lim_{u_1\to 0}\frac{V_2(u_1)}{u_1} = 0,$$

а в силу третьего из условий (12), с учетом (33) и (36),

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_i(t,u_1,u_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1, u_2 \in [-\delta,\delta] \quad (i=1,2).$$

Кроме того,

$$\int_{t_0}^{\omega} h_1(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{\omega}\frac{J_{ss}'(\tau)}{J_{ss}(\tau)}\,d\tau = \ln|J_{ss}(\tau)|\Big|_{t_0}^{\omega} = \pm\infty$$

и, с учетом третьего из условий (12),

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{J_s^2(t)}{p_s(t)J_{ss}(t)} = 0.$$

Тем самым показано, что для системы (38) выполняются все условия теоремы 2.8 из работы В. М. Евтухова и А. М. Самойленко [10]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (38) имеет хотя бы одно решение $(u_1,u_2) : [t_*,\omega[\to \mathbb{R}^2$ $(t_* \geqslant t_0)$, стремящееся к нулю при $t\uparrow\omega$. Каждому такому решению системы (38), в силу замен (28), соответствует решение дифференциального уравнения (1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (15) и (16), причем это решение является $P_\omega(Y_0,0)$-решением уравнения (1). Более того, из этой теоремы следует, что если $\frac{J_{ss}'(t)}{J_{ss}(t)} > 0$ при $t \in ]a,\omega[$ (данное условие, в силу (11), равносильно выполнению неравенства $\alpha_s\nu_0(1-\sigma_s)\pi_\omega(t) < 0$ при $t\in]a,\omega[$), то при $\omega=+\infty$ у системы (38) существует однопараметрическое семейство таких решений, а при $\omega<+\infty$ — двухпараметрическое семейство. Теорема доказана.

**Пример.** *Рассмотрим дифференциальное уравнение вида*

$$y'' = \alpha_1p_1(t)|y|^\sigma + \alpha_2p_2(t)e^{\mu y}, \tag{39}$$

*в котором* $\alpha_i \in \{-1,1\}$ $(i=1,2)$, $p_i : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(i=1,2)$ — *непрерывные функции,* $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $\sigma\neq 1$, $\mu\neq 0$.

Из теорем 1 и 2 имеем

**Следствие.** *Пусть $\sigma \neq 1$. Тогда для существования у дифференциального уравнения (39) $P_\omega(Y_0,0)$-решений, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = \pm\infty \quad (Y_0 = \pm\infty) \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_2(t)e^{\mu y(t)}}{p_1(t)|y(t)|^\sigma} = 0,$$

*необходимо, а если*

$$p_2(t) = o\left(\frac{p_1(t)|(1-\sigma)J_{11}(t)|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}{e^{\mu\nu_0|(1-\sigma)(\alpha_1 J_{11}(t)(1+u)+C)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}}\right) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega$$

*равномерно по $u \in [-\delta,\delta]$ для некоторого $0<\delta<1$, где*

$$C = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sigma > 1, \\ \frac{\nu_0|b|^{1-\sigma}}{1-\sigma}, & \text{если} \quad \sigma < 1, \end{cases}$$

*то и достаточно, чтобы*

$$\alpha_1\nu_0(1-\sigma)J_{11}(t) > 0, \quad \alpha_1\nu_1\pi_\omega(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in ]a,\omega[,$$

$$\alpha_1 \lim_{t\uparrow\omega} J_{11}(t) = Z_1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J_1'(t)}{J_1(t)} = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{J_1^2(t)}{p_1(t)J_{11}(t)} = 0.$$

*Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления*

$$y(t) = \nu_0|(1-\sigma)J_{11}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

$$y'(t) = \frac{\nu_0 J_1(t)|(1-\sigma)J_{11}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}{(1-\sigma)J_{11}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

*причем если $\alpha_s\nu_0(1-\sigma_s)\pi_\omega(t) < 0$ при $t \in ]a,\omega[$, то при $\omega = +\infty$ таких решений существует однопараметрическое семейство, а при $\omega < +\infty$ — двухпараметрическое семейство.*

**Заключение.** В настоящей работе исследован вопрос о наличии и асимптотике медленно меняющихся решений дифференциального уравнения (1) в случае, когда в правой части уравнения (1) главным является слагаемое с правильно меняющейся при $y \to Y_0$ ($Y_0$ равно либо 0, либо $\pm\infty$) нелинейностью. Аналогично можно рассмотреть случай, когда в правой части несколько главных слагаемых, среди которых хотя бы одно с правильно меняющейся при $y \to Y_0$ нелинейностью.

1. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета – М. : Наука, 1985. – 144 с.
2. **Marić V.** Regular Variation and Differential Equations / V. Marić – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000. – 128 p. – (Lecture Notes in Mathematics 1726).

3. **Касьянова В. А.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, асимптотически близкими к степенным: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / В. А. Касьянова. – Одесса, 2009. – 154 с.
4. **Евтухов В. М.** Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью / В. М. Евтухов, А. Г. Черникова // Нелинейные колебания. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 458–475.
5. **Евтухов В. М.** Асимптотическое поведение медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью / В. М. Евтухов, А. Г. Черникова // Нелинейные колебания. – 2017. – Т. 20, № 3. – С. 346–360.
6. **Евтухов В. М.** Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. Г. Черникова // Укр. мат. журн.– 2017. – Т. 69, № 10. – С. 1345–1363.
7. **Черникова А. Г.** Асимптотика быстро изменяющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью / А. Г. Черникова // Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех. – 2015. – Т. 20, № 2. – С. 52–68.
8. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно и быстро меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, Н. П. Колун // Математические методы и физико-механические поля. – 2017. – Т. 60, № 1. – С. 32–43.
9. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / В. М. Евтухов. – Киев, 1998. – 295 с.
10. **Евтухов В. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2010. –Т. 62, № 1. – С. 52–80.

*Колун Н. П.*

Асимптотика повільно змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з правильно та швидко змінними нелінійностями

*Резюме*

У цій роботі для диференціального рівняння другого порядку, яке містить в правій частині суму доданків з правильно та швидко змінними нелінійностями, встановлюються необхідні та достатні умови існування так званих $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків ($Y_0$ дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$) в особливому випадку, коли параметр $\lambda_0 = 0$. При такому значенні параметра $\lambda_0$ досліджувані розв'язки є повільно змінними при $t \uparrow \omega$ $(\omega \leqslant +\infty)$ функціями. Також встановлюються асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Результати роботи отримані в припущенні, що на кожному розв'язку із класу, що розглядається, права частина досліджуваного диференціального рівняння еквівалентна при $t \uparrow \omega$ одному доданку з правильно змінною нелінійністю. Розглянуто приклад диференціального рівняння, що ілюструє отримані в роботі результати.

*Ключові слова: правильно змінні функції, швидко змінні функції, нелінійні диференціальні рівняння, $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язки, асимптотика $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків, асимптотичне зображення $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків .*

*Kolun N. P.*

Asymptotics of slowly varying solutions of second-order differential equations with regularly and rapidly varying nonlinearities.

*Summary*

In this paper for the second-order differential equation which has a right-hand side containing the sum of the terms with regularly and rapidly varying nonlinearities the necessary and sufficient conditions of the existence so-called $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-solutions ($Y_0$ is either 0, or $\pm\infty$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$) in a special case when the parameter $\lambda_0 = 0$ are established. At this value of the parameter $\lambda_0$ researched solutions are slowly varying as $t \uparrow \omega$ ($\omega \leqslant +\infty$) functions. The asymptotic representations when $t \uparrow \omega$ for such solutions and their first-order derivatives also are established. The results of the work were obtained on the assumption that on each solution from the class under consideration the right-hand side of the differential equation being studied is equivalent when $t \uparrow \omega$ to one term with a regularly varying nonlinearity. An example of a differential equation that illustrates the results obtained in this paper is considered.

*Key words: regularly varying functions, rapidly varying functions, non-linear differential equation, $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-solutions, asymptotic of $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-solutions, asymptotic representations of $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-solutions.*

## References

1. Seneta, E. (1985). *Pravilno menyayuschiesya funktsii [Regularly varying functions]*. M: Nauka, 144 p.
2. Maric, V. (2000). Regular Variation and Differential Equations. *Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg,*, Vol. 1726, 128.
3. Kasyanova, V. A. (2009). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnyih obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s nelineynostyami, asimptoticheski blizkimi k stepennyim [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary Differential equations of the second order with nonlinearities asymptotically close to power], *Dissertacia cand. fiz.-mat. nauk: spec. 01.01.02 "Differencial'nie uravneniya" – Dissertation of cand. phys.-math. sci.: spec. 01.01.02 "Differential equations",* 154 [in Russian].
4. Evtukhov, V. M., Chernikova, A. G. (2016). Asimptotika medlenno menyayuschihsya resheniy obyiknovennyih dvuchlennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s byistro menyayuscheysya nelineynostyu [Asymptotics of slowly varying solutions of ordinary second-order two-term differential equations with rapidly varying nonlinearity]. *Nelineynyie kolebaniya*, Vol. 19, №4, P. 458–475.
5. Evtukhov, V. M., Chernikova, A. G. (2017). Asimptoticheskoe povedenie medlenno menyayuschihsya resheniy obyiknovennyih dvuchlennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s byistro menyayuscheysya nelineynostyu [Asymptotic behavior of slowly varying solutions of second-order binomial differential equations with rapid varying nonlinearity]. *Nelineynyie kolebaniya*, Vol. 20, №3, P. 346–360.
6. Evtukhov, V. M., Chernikova, A. G. (2017). Asimptoticheskoe povedenie resheniy obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s byistro

menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic behavior of the solutions of second-order differential equations with rapidly varying nonlinearities]. *Ukr. Mat. Zh. – Ukr. Math. J.,* Vol. 69, №10, P. 1345–1363.

7. Chernikova, A. G. (2015). Asimptotika byistro izmenyayuschihsya resheniy differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s byistro menyayuscheysya nelineynostyu [Asymptotics of rapidly varying solutions of second-order differential equations with rapidly varying nonlinearity]. *Vistnik Od. nats. un-tu im. Mat. i Meh.*, Vol. 20, №2, P. 52–68.
8. Evtukhov, V. M., Kolun, N. P. (2017). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy differentsialnyih uravneniy s pravilno i byistro menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic representations of solutions of differential equations with regularly and rapidly varying nonlinearities]. *Matematicheskie metodyi i fiziko-mehanicheskie polya*, Vol. 60, №1, P. 32–43.
9. Evtukhov, V. M. (1998). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnih obiknovennih differencial'nih uravneniy [Asymptotic presentations of the solutions for the nonautonomous ordinary differential equations]. *Dissertacia d. fiz.-mat. nauk: spec. 01.01.02 "Differencial'nie uravneniya" – Dissertation of d. phys.-math. sci.: spec. 01.01.02 "Differential equations",* 295 [in Russian].
10. Evtukhov, V. M., Samoylenko, A. M. (2010). Usloviya sushestvovaniya ischezayushih v osoboy tochke resheniy u veshestvennih neavtonomnih system kvazilineynih differencial'nih uravneniy [Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point]. *Ukr. Mat. Zh. – Ukr. Math. J.,* Vol. 62, №1, P. 52–80.