УДК 517.9

Т. В. Ковальчук, Т. В. Шовкопляс
Київський національний торговельно-економічний університет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

КРИТЕРІЙ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЛІНІЙНОЇ НЕТЕРОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВІЙ ШКАЛІ

На часовій шкалі розглядається лінійна нетерова крайова задача для системи динамічних рівнянь другого порядку. Дана крайова задача розглядається у випадку, коли оператор лінійої частини є необоротним, тобто кількість крайових умов задачі і порядок операторної системи різні. Для того щоб встановити умови розв'язності розглядуваної крайової задачі, використовується апарат теорії псевдообернених матриць. Встановлюється зв'язок між умовою розв'язності динамічної системи та умовою розв'язності алгебраїчної системи рівнянь. Тобто, використовуючи теорію псевдообернених матриць, встановлено умову розв'язності динамічної системи рівнянь, до якої зводиться розглядувана крайова задача. При цьому умова розв'язності динамічної системи рівнянь випливає з умови розв'язності відповідної алгебраїчної системи рівнянь. Знайдено множину розв'язків розглядуваної крайової задачі. Також наведені часткові випадки крайової задачі, коли кількість крайових умов більша за кількість невідомих системи динамічних рівнянь та навпаки. Для кожного з цих випадків встановлено умови розв'язності розглядуваної крайової задачі та знайдено її розв'язки. Наведено приклад, який ілюструє застосування отриманих результатів.

MSC: 34N99, 34G20, 35J57 .
Ключові слова: нетерова крайова задача, система динамічних рівнянь, часова шкала, умова розв'язності, множина розв'язків, крайові умови, лінійний векторний функціонал, псевдообернена за Муром—Пенроузом матриця, матриця-ортопроектор.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149703.

Вступ. Актуальним питанням теорії диференціальних рівнянь є вивчення умов розв'язності лінійних нетерових крайових задач, тобто таких крайових задач, у яких оператор їх лінійної частини є необоротним, останнє означає, що кількість крайових умов в операторній системі не дорівнює кількості невідомих. Такі крайові задачі були розглянуті в роботах [2–4].

При встановленні умов розв'язності лінійних нетерових крайових задач застосовується апарат теорії псевдообернених матриць [5, 7].

Цікавим є дослідження нетерових крайових задач на часовій шкалі. Це питання розглядалося в праці [8].

Для дослідження умов існування розв'язків таких задач використовується теорія нетерових операторів, розвинута в роботах А. М. Самойленка та О. А. Бойчука [2,10], та теорія динамічних рівнянь на часових шкалах (див., наприклад, [9]).

В роботі розглядається лінійна нетерова крайова задача для системи динамічних рівнянь другого порядку на часовій шкалі. Встановлено умови розв'язності цієї задачі та побудована множина її розв'язків. Характерною особливістю роботи є те, що при дослідженні ми не зводимо рівняння другого порядку до системи

Надійшла 21.09.2018

рівнянь першого порядку, а працюємо безпосередньо з системою рівнянь другого порядку, що є набагато зручнішим і значно спрощує метод.

Робота складається зі вступу, основних результатів та висновків. У вступі описано актуальність розглядуваної задачі та наведено основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал. У другій частині, присвяченій основним результатам, сформульована постановка задачі, наведені умови розв'язності лінійної нетерової крайової задачі для динамічної системи рівнянь та проведено основні доведення.

Попередні результати. Наведемо необхідні поняття та означення, які пов'язані з теорією рівнянь на часових шкалах [9].

Означення 1. *[9] Часовою шкалою T називається довільна непорожня замкнена підмножина дійсних чисел.*

Для кожної множини $A \subset T$ позначимо $A_T = A \bigcap T$. Для характеризації часової шкали наведемо поняття прямого та оберненого операторів стрибка, функції зернистості [9].

Означення 2. [9] *Для довільного $t \in T$ прямим оператором стрибка називається функція $\sigma : T \to T$, визначена наступним чином: $\sigma(t) := inf\{s \in T : s < t\}$.*

Означення 3. [9] *Для довільного $t \in T$ оберненим оператором стрибка є функція $\rho : T \to T$, визначена наступним чином: $\rho(t) := sup\{s \in T : s > t\}$.*

Означення 4. [9] *Функція $\mu : T \to [0; +\infty)$ визначена наступним чином: $\mu(t) := \sigma(t) - t$ називається функцією зернистості.*

Означення 5. [9] *Точка $t \in T$ називається:*
1) лівограничною (LD), якщо $\rho(t) = t$;
2) ліворозсіяною (LS), якщо $\rho(t) < t$;
3) правограничною (RD), якщо $\sigma(t) = t$;
4) праворозсіяною (RS), якщо $\sigma(t) > t$;
функцією зернистості.

Якщо T має ліворозсіяний максимум M, тоді множина T^k визначається таким чином: $T^k = T \backslash M$; в іншому випадку вважаємо, що $T^k = T$.

Означення 6. [9] *Функція $f : T \to R^d$ називається $\Delta-$диференційованою в точці $t \in T^k$, якщо границя $f^{\Delta}(t) = \lim\limits_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$ існує в R^d.*

Наведемо наступні відомі результати [9]:

1. Якщо $t \in T^k$-правограничнa точка T, тоді функція f є Δ-диференційованою в точці t тоді і тільки тоді, коли границя $f^{\Delta}(t) = \lim\limits_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$ існує в R^d.

2. Якщо $t \in T^k$-праворозсіяна точка T і якщо функція f є неперервною по t, тоді функція f є Δ-диференційованою в точці t і $f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$.

Означення 7. [9] *Функція $f : T \to R$ є rd-неперервною, якщо вона неперервна в щільних справа точках на T і існує її лівостороння границя в щільних зліва точках шкали T. Множина всіх rd-неперервних функцій $f : T \to R$ позначається $C_{rd} = C_{rd}(T) = C_{rd}(T,R)$.*

Означення 8. [9] *Вважаємо, що функції $f,g : T \to R$ є диференційованими в точці $t \in T^k$. Тоді добуток $fg : T \to R$ є диференційованим в точці $t \in T^k$ і*

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))(g)^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

існує в R^d.

Означення 9. [9] *Для диференційованої функції $f : T \to R$, якщо її похідна $f^{\triangle}$ є диференційованою на множині $T^{k^2} = (T^k)^k$, то її друга похідна $f^{\triangle\triangle}$ визначена таким чином: $f^{\triangle\triangle} = (f^{\triangle})^{\triangle}$, $f^{\triangle\triangle} : T^{k^2} \to R$.*

Теорема 1. [9] *Нехай a, $b \in T$ та $f \in C_{rd}(T,R)$. Тоді, якщо T складається лише з ізольованих точок, то*

$$\int\limits_a^b f(s)\triangle s := \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(s)f(s), & \text{якщо} a < b, \\ 0, & \text{якщо} a = b; \\ -\sum\limits_{t\in(a,b]} \mu(s)f(s), & \text{якщо} a > b. \end{cases}$$

Основні результати

1. Постановка задачі. Розглядається лінійна неоднорідна нетерова крайова задача для системи динамічних рівнянь другого порядку на часовій шкалі T

$$(P(t)x^{\Delta}(t))^{\Delta} - Q(t)x(t) = f(t), t \in [a,b]_T, \tag{1}$$

$$lx(t) = \alpha, \alpha \in R^m, \tag{2}$$

де $[a,b]_T := [a,b] \bigcap T$, x, $f(t) = col(f_1(t), f_2(t),...,f_n(t)$—$n$-вимірна вектор-функція, яка є rd-неперервною на часовій шкалі T: $f(t) \in C_{rd}([a,b]_T, R^n)$; $P(t)$, $P^{\Delta}(t)$ та $Q(t)$—$(n \times n)$-вимірні матриці-функції, елементи яких є rd-неперервними на $[a,b]_T$ функціями: $P(t), P^{\Delta}(t), Q(t) \in \Re([a,b]_T; R^{n\times n})$, і матриця-функція $P(t)$ невироджена: $detP(t) \neq 0$; l—m-вимірний лінійний векторний функціонал, визначений на просторі n-вимірних неперервних вектор-функцій: $l = col(l_1,l_2,...,l_m)$, $l : C[a,b]_T \to R^m$, $l_i : C[a,b]_T \to R$, $i = 1,2,...,m$, $b < +\infty$, α—m-вимірний вектор-стовпець констант, $\alpha \in R^m$.

Застосовуючи до величиини $(P(t)x^{\Delta})^{\Delta}$ означення 8 двічі підряд та означення 9, отримаємо: $(P(t)x^{\triangle}(t))^{\triangle} = (P(t))^{\triangle}x^{\triangle}(t) + P(\sigma(t))(x^{\triangle}(t))^{\triangle} = P^{\triangle}(t)x^{\triangle}(t) + P(\sigma(t))x^{\triangle\triangle}(t)$.

Враховуючи умову на коефіцієнти динамічної системи (1), означення 8 та попередні викладки, зробимо деякі перетворення, в результаті яких система (1) набере вигляду

$$x^{\Delta\Delta}(t) + A(t)v(x(t)) = P^{-1}(\sigma(t))f(t), t \in [a,b]_T, \tag{3}$$

де $A(t) = [-P(t)Q(t), P^{-1}(\sigma(t))f(t)P^{\Delta}(t)]$—$(n \times 2n)$-вимірна матриця, $v(x(t)) = (x^T(t),(x^{\triangle}(t))^T)$—$2n$-вимірний вектор.

В результаті проведених перетворень динамічна система рівнянь (1) звелася до еквівалентної їй системи (3), тому міркування, проведені до системи (3), будуть також виконуватись і для системи (1).

Динамічна система (3) має $2n$-параметричну множину розв'язків:

$$x(t) = X(t)c + \overline{x}(t), c \in R^{2n}, \tag{4}$$

де

$$\overline{x}(t) := \int\limits_{t_0}^{t} e_A(t,\sigma(s))\varphi(s)\Delta s, t \in [a,b]_T, \tag{5}$$

$e_A(t,s)$ — $(n \times 2n)$-вимірна матрична експоненціальна функція, що є матрицантом відповідної однорідної динамічної системи: $e_A(t,s) = X(t)W^{-1}(X(s))$, де $(n \times 2n)$-вимірна матриця $X(t)$ є фундаментальною матрицею відповідної однорідної динамічної системи, нормованої в точці $t_0 \in [a,b]_T$, $W(X(t))$, $t \in [a,b]_T$, – $(2n \times 2n)$-вимірна матриця Вронського фундаментальної матриці $X(t)$; $\varphi(t)$–$2n$-вимірний вектор,перші n компонент якого є компонентами нульового вектора, а решта утворені добутком $(n \times n)$-вимірної матриці $P^{-1}(t)$ на n-вимірний вектор $f(t)$: $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ P^{-1}f(t) \end{pmatrix}$.

2. Умови розв'язності лінійної неоднорідної нетерової крайової задачі для системи динамічних рівнянь (1), (2) на часовій шкалі T. Оскільки динамічні системи (1) та (3) еквівалентні, то лінійній нетеровій крайовій задачі для динамічної системи, розглядуваної на часовій шкалі (1), (2), еквівалентна лінійна нетерова крайова задача для динамічної системи, розглядуваної на часовій шкалі:

$$x^{\Delta\Delta}(t) + A(t)v(x(t)) = P^{-1}(\sigma(t))f(t), \quad t \in [a,b]_T, \tag{6}$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^m. \tag{7}$$

За оператор Λ позначимо оператор вигляду:

$$\Lambda x(\cdot) := \begin{pmatrix} x^{\Delta\Delta}(\cdot) + A(\cdot)v(x(\cdot)) \\ lx(\cdot) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Враховуючи (5), задачу (6), (7) запишемо в операторній формі:

$$\Lambda x(\cdot) := \begin{pmatrix} (P^{-1}(\cdot)f(\cdot) \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що оператор Λ вигляду (8) є нетеровим оператором з індексом $ind\Lambda = 2n - m$, тому отримана крайова задача (6), (7) є нетеровою.

Загальний розв'язок (4) динамічної системи (3) буде розв'язком крайової задачі (6), (7) тоді і тільки тоді, коли векторна стала $c \in R^{2n}$ буде задовольняти алгебраїчну систему

$$Dc = \alpha - l\overline{x}(\cdot), \tag{9}$$

яка отримана в результаті підстановки загального розв'язку (4) динамічної системи (3) в крайову умову (2).

В (9) через D позначена $(m \times 2n)$-вимірна матриця, отримана в результаті дії m-вимірного лінійного вектор-функціоналу l на вектор-стовпчики матриці-функції $X(t)$: $D := lX(t)$; вважаємо, що $rankD = n_1$, $n_1 \leqslant min(2n; m)$.

Згідно з теоремою 3.9 [10], алгебраїчна система (9) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\overline{x}(\cdot)] = \theta_d, \qquad d = m - n_1. \tag{10}$$

В такому разі загальний розв'язок алгебраїчної системи (9) має вигляд:

$$c = P_{D_r}c_r + D^+[\alpha - l\overline{x}(\cdot)], r = 2n - n_1, \quad \forall c_r \in R^r, \tag{11}$$

де D^+ є $(2n \times m)$-вимірною матрицею, псевдооберненою за Муром—Пенроузом до матриці D.

Підставляючи знайдений сталий вектор $c \in R^{2n}$ вигляду (11) в (4), знаходимо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$x(t,c_r) = e_A(t,t_0)P_{D_r c_r} + e_A(t,t_0)D^+\alpha - e_A(t,t_0)D^+l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t), \forall c_r \in R^r. \tag{12}$$

В (12): $e_A(t,t_0)$—$(n \times 2n)$-вимірна матрична експоненціальна функція, що є фундаментальною матрицею відповідної однорідної $(P^{-1}(t)f(t) = 0)$ динамічної системи (3), нормованої в точці $t_0 \in [a,b]_T$; P_{D_r}—$(2n \times r)$-вимірна матриця, отримана з $(2n \times 2n)$-вимірної матриці-ортопроектора P_D, що проектує простір R^{2n} на нуль-простір $N(D)$ матриці D: $P_D : R^{2n} \to N(D)$, $N(D) = P_D R^{2n}$; $P_{D_d^*}$—$(d \times m)$-вимірна матриця, отримана з $(m \times m)$-вимірної матриці-ортопроектора P_{D*}, що проектує простір R^m на нуль-простір $N(D^*$ матриці D^*: $P_{D*} : R^m \to N(D^*)$, $N(D^*) = P_{D*}R^m$.

Звідси одержуємо, що розмірність нуль-простору $N(D)$ дорівнює дефекту матриці D [5, 7]:$rankD = n_1$.

Враховуючи, що $rankD = rankD^*$, отримуємо розмірність нуль-простору $N(D^*)$: $dimN(D^*) = m - rankD = m - n_1 = d$. Тому $rankP_D = r$, $rankP_{D*} = d$, внаслідок чого матриця P_D складається з r лінійно незалежних стовпців, а матриця P_{D*} складається з d лінійно незалежних рядків; тому $(m \times m)$-вимірну матрицю P_{D*} та $(2n \times 2n)$-вимірну матрицю P_D можна замінити $(d \times m)$-вимірною матрицею $P_{D_d^*}$ та $(2n \times r)$-вимірною матрицею P_{D_r} відповідно.

Наведені вище міркування приводять до наступної теореми.

Теорема 2. [5] *Якщо* $rankD = n_1 < min\{2n, m\}$, *то однорідна* $(\alpha = 0, f = 0)$ *крайова задача (1), (2) має* r *і лише* r $(r = 2n - n_1)$ *лінійно незалежних розв'язків*

$$x(t, c_r) = e_A(t,t_0)P_{D_r}c_r, \forall c_r \in R^r. \tag{13}$$

Неоднорідна крайова задача (1), (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли $f(t) \in C_{rd}([a,b]_T; R^n)$ *і* $\alpha \in R^m$ *задовольняють умову розв'язності*

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\overline{x}(\cdot)] = \theta_d, d = m - n_1 \tag{14}$$

і при цьому має r*-параметричну множину розв'язків*

$$x(t, c_r) = e_A(t,t_0)P_{D_r}c_r + X(t)D^+\alpha - X(t)D^+l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t), \forall c_r \in R^r. \tag{15}$$

Дана теорема сформульована в загальному вигляді. Для некритичних крайових задач з вище сформульованої теореми випливають твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $rankD = n_1 = m (m \neq 2n)$. *Тоді* $dimN(D^*) = m - rankD = m - n_1 = m - m = d = 0$, *тому* $rankP_{N(D^*)} = 0$ *і неоднорідна крайова задача (1), (2) завжди розв'язна і має* r*-параметричний* ($r = 2n - m$) *розв'язок*

$$x(t, c_r) = e_A(t,t_0)P_{D_r}c_r + e_A(t,t_0)D^+\alpha - e_A(t,t_0)D^+l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t), \forall c_r \in R^r. \quad (16)$$

Наслідок 2. *Нехай* $rankD = n_1 = 2n$. *Тоді однорідна* ($\alpha = 0, f = 0$) *крайова задача (1), (2) має лише тривіальний розв'язок* ($r = 2n - n_1 = 0$). *Неоднорідна крайова задача (1), (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова розв'язності*

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\overline{x}(\cdot)] = \theta_d, \quad d = m - 2n, \quad (17)$$

і при цьому неоднорідна крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок

$$x(t) = e_A(t,t_0)D^{-1}\alpha - e_A(t,t_0)D^+l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t). \quad (18)$$

Наслідок 3. *Нехай* $rankD = n_1 = m = 2n$. *Тоді* $detD \neq 0$ *та однорідна* ($\alpha = 0, f = 0$) *крайова задача (1), (2) має лише тривіальний розв'язок. Неоднорідна крайова задача (1), (2) завжди і при цьому має єдиний розв'язок*

$$x(t) = e_A(t,t_0)D^{-1}\alpha - e_A(t,t_0)D^-l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t). \quad (19)$$

Приклад. *Розглянемо лінійну крайову задачу на часовій шкалі* $T = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]$*:*

$$x^{\Delta\Delta}(t) - a^2x(t) = f(t), \quad x \in R^1, \quad t \in T. \quad (20)$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^2, \quad (21)$$

де $l : C(T) \to R^2$, $lx(\cdot) = Mx(0) + Nx(1)$, M *та* N*–*(2×1)*-вимірні матриці:* $M = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо фундаментальну матрицю відповідної однорідної динамічної системи

$$x^{\Delta\Delta}(t) - a^2x(t) = 0, \quad x \in R^1, \quad t \in T, \quad (22)$$

тобто (1×2)*-вимірну матричну функцію* $X(t)$.

При $t \in \left[0, \ \frac{1}{2}\right]$, $t \geqslant s$ *матричну функцію* $X(t)$ *визначимо по аналогії з фундаментальною матрицею звичайного диференціального рівняння [1, 6], тобто, при* $t \in [0, \ \frac{1}{2}]$, *фундаментальну матрицю (вектор-рядок) однорідної динамічної системи (22) визначено таким чином:*

$$X(t) = \left(\frac{e^{a(t-0)} + e^{-a(t-0)}}{2}; \frac{e^{a(t-0)} - e^{-a(t-0)}}{2a}\right).$$

При $t = \frac{1}{2}$ *фундаментальна матриця не буде фундаментальною матрицею відповідного диференціального рівняння і шукається як у випадку для однорідної* *динамічної системи, тобто використовується означення функції, Δ-диференційованої в точці [9]. Отже, при $t = \frac{1}{2}$ маємо: $X(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1; & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.*

При $t \in \left[\frac{3}{4},\ 1\right]$ фундаментальна матриця однорідної динамічної системи (22) збігається з фундаментальною матрицею відповідної диференціальної системи:

$$X(t) = \left(\frac{e^{a(t-\frac{3}{4})} + e^{-a(t-\frac{3}{4})}}{2}; \quad \frac{e^{a(t-\frac{3}{4})} - e^{-a(t-\frac{3}{4})}}{2a} \right).$$

Отже, експоненційна функція $e_A(t,s)$ є такою:

$$\begin{cases} e_A(t,s) = \left(\dfrac{e^{a(t-s)} + e^{-a(t-s)}}{2}; \quad \dfrac{e^{a(t-s)} - e^{-a(t-s)}}{2a} \right) & \text{при } t,\ s \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right), \\ e_A(t,s) = (1; \quad 0) & \text{при } t = s = \frac{1}{2}, \\ e_A(t,s) = \left(\dfrac{e^{a(t-s)} + e^{-a(t-s)}}{2}; \quad \dfrac{e^{a(t-s)} - e^{-a(t-s)}}{2a} \right) & \text{при } t,\ s \in \left[\frac{3}{4},\ 1\right]. \end{cases}$$

Прямий оператор стрибка буде таким:

$$\begin{cases} \sigma(t) = t & \text{при } t \in \left[0; \frac{1}{2}\right), \\ \sigma(t) = \frac{3}{4} & \text{в точці } t = \frac{1}{2}, \\ \sigma(t) = t & \text{при } t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]. \end{cases}$$

Функція $\mu(t)$ буде такою:

$$\begin{cases} \mu(t) = 0 & \text{при } t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ \mu(t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} & \text{в точці } t = \frac{1}{2}, \\ \mu(t) = 0 & \text{при } t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]. \end{cases}$$

Отже, експоненційна функція $e_A(t,\sigma(s))$ для розглядуваної задачі визначається таким чином:

$$\begin{cases} e_A(t,\sigma(s)) = \left(\dfrac{e^{a(t-s)} + e^{-a(t-s)}}{2}; \dfrac{e^{a(t-s)} - e^{-a(t-s)}}{2a} \right) & \text{при } t, s \in \left[0; \frac{1}{2}\right), \\ e_A(t,\sigma(s)) = (1; 0) & \text{при } t = s = \frac{1}{2}, \\ e_A(t,\sigma(s)) = \left(\dfrac{e^{a(t-s)} + e^{-a(t-s)}}{2}; \quad \dfrac{e^{a(t-s)} - e^{-a(t-s)}}{2a} \right) & \text{при } t, s \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]. \end{cases}$$

Тому можна зазначити, що $e_A(1,\sigma(s))$ є такою:

$$e_A(1,\sigma(s)) = \left(\frac{e^{a(1-s)} + e^{-a(1-s)}}{2}; \quad \frac{e^{a(1-s)} - e^{-a(1-s)}}{2a} \right).$$

Знайдемо матрицю D за формулою: $D := lX(\cdot)$. В розглядуваному прикладі $D := lX(\cdot) = MX(0) + NX(1)$. Отже,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{(e^{\frac{a}{8}} - e^{-\frac{a}{8}})^2}{2} & \dfrac{e^{\frac{a}{4}} - e^{-\frac{a}{4}}}{2} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю D^*. Оскільки $D^* = D^T$, то

$$D^* = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(e^{\frac{a}{8}} - e^{-\frac{a}{8}})^2}{2} \\ 0 & \dfrac{e^{\frac{a}{4}} - e^{-\frac{a}{4}}}{2} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо базис нуль-простору матриці D^*. Згідно з означенням нуль-простору $N(D^*) = kerD^* = \{\overrightarrow{b} \in R^2 : D^*\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}\}$. Отже, з рівності $D^*\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ знайдемо двовимірний вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, розв'язавши векторно-матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{(e^{\frac{a}{8}} - e^{-\frac{a}{8}})^2}{2} \\ 0 & \frac{e^{\frac{a}{4}} - e^{-\frac{a}{4}}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Оскільки $rankD^* = rankD = 1$, то рівняння (23) має безліч розв'язків і нуль-простір $N(D^*)$ матриці D^* містить лише вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 \in R$.

Знайдемо матрицю P_{D^*}. Для цього використаємо формулу:

$$P_{D^*} = \sum_{s,k=1} \beta_{sk}^{(-1)} \overrightarrow{b}_s \overrightarrow{b}_k^T,$$

де β_{sk}–скалярний добуток векторів $\overrightarrow{b}_s$ та $\overrightarrow{b}_k$: $\beta_{sk} = (\overrightarrow{b}_s, \overrightarrow{b}_k)$ в даному випадку $\beta_{11} = (\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_1)$.

Отже, $P_{D^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Оскільки $d = 1$, то $rankP_{D^*} = 1$, тому (2×2)-вимірну матрицю P_{D^*} можна замінити (1×2)-вимірною матрицею $P_{D_1^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Проводячи аналогічні міркування та використовуючи формулу

$$P_D = \sum_{s,k=1} \alpha_{sk}^{(-1)} \overrightarrow{\psi}_s \overrightarrow{\psi}_k^T,$$

де α визначається як скалярний добуток: $\alpha = (\psi_s, \psi_k)$, отримаємо матрицю

$$P_{D_1} = \frac{1}{2(e^{-\frac{a}{4}} + e^{\frac{a}{4}})} \begin{pmatrix} e^{-\frac{a}{4}} - e^{\frac{a}{4}} \\ (e^{-\frac{a}{8}} - e^{\frac{a}{8}})^2 \end{pmatrix}$$

Використовуючи формулу: $D^+ = D^T(DD^T + P_{D^*})^{-1}$, знайдемо матрицю D^+, псевдообернену за Муром—Пенроузом до матриці D:

$$D^+ = \frac{1}{(e^{\frac{a}{4}} + e^{-\frac{a}{4}})^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & (e^{\frac{a}{8}} - e^{-\frac{a}{8}})^2 \\ 0 & e^{\frac{a}{4}} - e^{-\frac{a}{4}} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, дана крайова задача розв'язна і при цьому має однопараметричну множину розв'язків

$$x(t, c_1) = e_A(t,t_0)P_{D_1}c_1 + X(t)D^+\alpha - X(t)D^+l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t), \forall c_1 \in R^1. \qquad (24)$$

В (24) матриці $e_A(t,t_0)$, P_{D_1}, $X(t)$, D^+ *визначені так само, як і вище,* c_1 — *одновимірний вектор, тобто дійсна стала величина,* $l\overline{x}(\cdot) = N\int\limits_0^1 e_A(1,\sigma(s))\varphi(s)\Delta s$, $x(t) = \int\limits_0^1 e_A(t,s)\varphi(s)\Delta s$, *де* $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$ — *двовимірний вектор. Інтеграли обчислюються за формулою, вказаною в теоремі 1.*

Висновки. Для розглядуваної на часовій шкалі крайової задачі для системи динамічних рівнянь встановлено умови її розв'язності та побудовано множину розв'язків у випадку, коли кількість крайових умов та розмірність динамічної системи не збігаються. Окремо розглянуті випадки, коли кількість крайових умов більша за розмірність динамічної системи рівнянь та навпаки. Для кожного з цих випадків встановлено умови розв'язності крайової задачі та знайдені їх розв'язки.

1. **Шовкопляс Т. В.** Критерій розв'язності лінійної крайової задачі для системи другого порядку // Т. В. Шовкопляс // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 861–864.
2. **Бойчук А. А.** Конструктивные методы анализа краевых задач / А. А. Бойчук. – Киев: Наукова думка, 1990. – 96 с.
3. **Бойчук А. А.** Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием / А. А. Бойчук, А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, № 4. – С. 564–568.
4. **Бойчук А. А.** Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 10. – С. 1677–1682.
5. **Воеводин В. В.** Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. – Москва: Наука, 1984. – 318 с.
6. **Ляшко И. И.** Математический анализ. Ч. 3. Интегрирование дифференциальных уравнений / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – Киев: Выща шк., 1987. – 342 с.
7. **Турбин А. Ф.** Формулы для вычисления полуобратной и псевдообратной матрицы // А. Ф. Турбин / Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1974. – Т. 14, № 3. – С. 772–776.
8. **Agarwal R.** Fredholm boundary value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales / R. Agarwal, M. Bohner, A. Boichuk , O. Strakh. – Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2014. – DOI: 10.1002/ mma.3356.
9. **Bohner M.** Advances in dynamic equations on time scales / M. Bohner, A. Peterson. – Birkhauser Inc., Boston: MA. – 2003. – 361 p.
10. **Boichuk A. A.** Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A. A. Boichuk , A. M. Samoilenko. – Utrecht, Boston: VPS. – 2004. – 317 p.

Ковальчук Т. В., Шовкопляс Т. В.
Критерий разрешимости линейной нетеровой краевой задачи для системы динамических уравнений на часовой шкале

Резюме

На часовой шкале рассматривается линейная нетерова краевая задача для системы динамических уравнений второго порядка. Эта краевая задача рассматривается в случае, когда оператор линейной части является необратимым, то есть количество краевых условий задачи и порядок операторной системы разные. Для определения условий разрешимости рассматриваемой краевой задачи используется аппарат теории псевдообратных матриц. Определяется взаимосвязь между условием разрешимости динамической системы и условием разрешимости алгебраической системы уравнений. То есть с помощью теории псевдообратных матриц определено условие разрешимости динамической системы уравнений, к которой сводится рассматриваемая краевая задача. И в этом случае условие разрешимости динамической системы уравнений следует из условия разрешимости соответствующей алгебраической системы уравнений. Найдено множество решений рассматриваемой краевой задачи. Также приведены частные случаи краевой задачи, когда количество краевых условий больше количества неизвестных системы динамических уравнений и наоборот. Для каждого из этих случаев определены условия разрешимости рассматриваемой краевой задачи и найдены ее решения. Приведен пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.
Ключевые слова: нетерова краевая задача, система динамических уравнений, временная шкала, условия разрешимости, множество решений, краевые условия, линейный векторный функционал, псевдообратная по Муру—Пенроузу матрица, матрица-ортопроектор .

Kovalchuk T. V., Shovkoplyas T. V.
The criterion for solvability of a linear Noether's boundary value problem for a system of dynamical equations on a time scale

Summary

On a time scale, the linear Noether's boundary value problem for a system of second-order dynamical equations is considered. This boundary-value problem is considered in the case when the operator of the linear part is irreversible, that is, the number of boundary conditions of the problem and the order of the operator system are different. To establish the solvability conditions of the boundary-value problem under consideration, the apparatus of the theory of pseudo-inverse matrices is used. A connection is established between the condition of solvability of a dynamical system and the condition of solvability of an algebraic system of equations. That is, using the theory of pseudo-inverse matrices, the condition for solvability of a dynamical system of equations is established, which reduces the considered boundary value problem. In this case, the condition of solvability of a dynamical system of equations follows from the condition of solvability of the corresponding algebraic system of equations. A set of solutions of the boundary value problem under consideration is found. Also, partial cases of the boundary value problem are given, when the number of boundary conditions is greater than the number of unknowns of the system of dynamic equations and vice versa. For each of these cases, the solvability conditions of the boundary-value problem under consideration are found and its solutions are found. An example is provided illustrating the application of the results obtained.
Key words: the Noether's boundary value problem, the system of dynamic equations, time

scale, the conditions of solvability, set of solutions, boundary conditions, linear vector functional, Moore–Penrose pseudoinverse matrix, orthoprojector matrix .

References

1. Shovkoplyas, T. V. (2000). Kryterij rozv'yaznosti linijnoji krajpvoji zadachi dlya sustemy drugogo poryadku [The criterion of solvability of linear the boundary value problem for the system of the second order]. *Ukr. Mat.zurn.*, Vol. 52, № 6. – P. 861–.864.
2. Boichuk A. A. (1990). *Konstruktivnyje metody analiza krajevyh zadach [The constructive methods for analyzing boundary value problems].* Kiev: Naukova Dumka, 96 p.
3. Boychuk A. A., Samojlenko A.M. (1992). *Linjejnyje njetjerovy krajevyje zadachi dlja differenzialnyh sistjem s impulsnym vozdjejstvijem [Linear Noether's boundary value problems for differential systems with impulse action] Ukr. Mat.zurn., Vol. 44, № 4. – P. 564–.568.*
4. Boychuk A. A., Zuravlev V. F., Samojlenko A.M. (1994). *Linjejnyje njetjerovy krajevyje zadachi dlja differenzialnyh sistjem s impulsnym vozdjejstvijem [Linear Noether's boundary value problems for differential systems with impulse action] Ukr. Mat.zurn., Vol. 44, № 4. – P. 564–.568.*
5. Vojevodin 4Vojevodin V. V. (1984). *Matritsy i vychisljenija [Matrices and calculations].* Moskva: Nauka, 318 p.
6. Ljashko I. I., Bojarchuk A. K., Gaj Ya. G., Kalajda A. F. (1987) *Matematicheskij analiz. Chast 3. Integrirovanie differencialnyh uravneniy [Integration of differential equations] Kiev: Vyshcha shkola, Выща шк., 342 p.*
7. *Turbin A. F. (1974). Formuly dlja vychislenija poluobratnoj i psevdoobratnoj matricy [Formulas for calculating the semi-inverted and pseudoinverse matrix] Zurn. Vychislit. Matematiki i mat. fiziki*, Vol. 14, № 3. P. 772–776.
8. Agarwal, R., Bohner, M., Boichuk, A., Strakh, O. (2014). *Fredholm boundary value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales* Mathematical Methods in the Applied Sciences. – DOI: 10.1002/ mma.3356
9. Bohner, M., Peterson, A. (2003). *Advances in dynamic equations on time scales* Birkhauser Inc., Boston: MA. 361 p.
10. Boichuk, A. A., Samoilenko A. M. (2004). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems* Utrecht, Boston: VPS. 317 p.