УДК 517.9

О. В. Капустян, О. В. Перегуда, І. В. Романюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНИХ АТРАКТОРІВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ІМПУЛЬСНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проектом № Ф78/187-2018 Державного фонду фундаментальних досліджень

У роботі розглядається слабо нелінійна двовимірна параболічна система, розв'язки якої зазнають імпульсного збурення при досягненні фіксованої (імпульсної) підмножини у фазовому просторі. Вона породжує імпульсну динамічну систему, що має у фазовому просторі мінімальну компактну рівномірно притягуючу множину — рівномірний атрактор. При цьому траєкторії системи можуть нескінченну кількість разів зустрічатись з імпульсною множиною. Тоді, в загальному випадку, рівномірний атрактор має непорожній перетин з імпульсною множиною і не є ані інваріантною, ані стійкою множиною відносно імпульсного напівпотоку. В роботі доведено, що при певних додаткових умовах на параметри задачі інваріантною і стійкою є неімпульсна частина рівномірного атрактора.
MSC: 34D45, 35R12.
Ключові слова: імпульсна система, параболічна система, атрактор, стійкість.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149702.

Вступ. Важливою задачею в теорії імпульсних систем диференціальних рівнянь [1]– [5] є якісне дослідження розривних (або імпульсних) динамічних систем [6]– [11]. У випадку нескінченновимірного фазового простору одним з найефективніших інструментів дослідження якісної поведінки розв'язків є теорія глобальних атракторів [12], [13], [14]. Перенесення основних понять та результатів теорії атракторів на імпульсні динамічні системи наштовхується на принципову проблему — відсутність у таких системах неперервної залежності розв'язку від початкових даних. Використовуючи поняття рівномірного атрактора [13], [15], в роботі [16] вдалося довести існування мінімальної компактної рівномірно притягуючої множини для класу слабонелінійних імпульсно-збурених параболічних рівнянь. Пізніше в роботах [17–19] цей підхід було поширено на інші класи імпульсних систем. Виявилось, що у випадку, коли траєкторії імпульсної динамічної системи можуть нескінченну кількість разів зустрічатись з імпульсною множиною, рівномірний атрактор може мати непорожній перетин з імпульсною множиною і не бути ні інваріантною, ні стійкою множиною відносно імпульсного напівпотоку. Інваріантність неімпульсної частини рівномірного атрактору для різних класів імпульсних систем була доведена в роботах [19], [20], [21]. В роботі [22] вперше було запропоновано умови на імпульсний напівпотік, які гарантують стійкість неімпульсної частини рівномірного атрактору. В данній роботі ми уточнюємо ці умови і застосовуємо їх до дослідження стійкості рівномірного атрактора слабонелінійної двивимірної імпульсно-збуреної параболічної системи.

Надійшла 01.10.2018

Основні результати

1. Рівномірні атрактори імпульсних систем. Під імпульсною динамічною системою (надалі – імпульсна ДС) $G = G(V,M,I)$, заданою на нормованому просторі X, будемо розуміти відображення $G : R_+ \times X \to X$, що будується за допомогою неперервної напівгрупи $V : R_+ \times X \to X$, імпульсної множини $M \subset X$ та імпульсного відображення $I : M \to X$, виходячи з наступного правила [7]: якщо для $x \in X$ для всіх $t > 0$ $V(t,x) \notin M$, то $G(t,x) = V(t,x)$; інакше

$$G(t,x) = \begin{cases} V(t - t_n), \ t \in [t_n, t_{n+1}), \\ x^+_{n+1}, \ t = t_{n+1}, \end{cases} \tag{1}$$

де $t_0 = 0$, $t_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} s_k$, $x^+_{n+1} = IV(s_n, x^+_n)$, $x^+_0 = x$, s_n – моменти імпульсного збурення, що характеризуються умовою $V(s_n, x^+_n) \in M$.
За умов

$$\begin{gathered} M - \text{замкнена}, \ M \cap IM = \varnothing, \\ \forall x \in M \ \ \exists \tau = \tau(x) > 0 \ \ \forall t \in (0, \tau) \ \ V(t,x) \notin M, \\ \forall \ x \in X \ t \to G(t,x) \ \text{визначена на} \ [0, +\infty) \end{gathered} \tag{2}$$

формула (1) визначає напівгрупу $G : R_+ \times X \to X$ [10], [16].

Зауваження 1. *З умов (2) і неперервності V випливає [10], [19], що для довільного $x \in X$ або існує момент часу $s := s(x) > 0$ такий, що $\forall t \in (0,s)$ $V(t,x) \notin M$, $V(s,x) \in M$, або $\forall \ t > 0$ $V(t,x) \cap M = \varnothing$ (і в цьому випадку покладемо $s(x) = \infty$).*

Означення 1. [16] *Компакт $\Theta \subset X$ будемо називати рівномірним атрактором імпульсної ДС G, якщо*
1) Θ – рівномірно притягуюча множина, тобто

$$\forall B \in \beta(X) \ \ dist(G(t,B),\Theta) \to 0, \ t \to \infty;$$

2) Θ – мінімальна замкнена множина, що задовольняє 1).

Зауваження 2. *Рівномірний атрактор може не бути інваріантним відносно G, тобто рівність*

$$\forall \ t \geqslant 0 \ \ \Theta = G(t,\Theta)$$

може не мати місця [16].

Теорема 1. [19] *Нехай імпульсна ДС G – дисипативна, тобто*

$$\exists B_0 \in \beta(X) \ \ \ \forall B \in \beta(X) \ \ \ \exists T = T(B) \ \ \ \forall t \geqslant T \ \ \ G(t,B) \subset B_0. \tag{3}$$

Тоді G має рівномірний атрактор Θ тоді і тільки тоді, коли G — асимптотично компактна, тобто $\forall \{x_n\} \in \beta(X)$ $\forall \{t_n \nearrow \infty\}$ послідовність $\{G(t_n,x_n)\}$ — предкомпактна. При цьому

$$\Theta = \omega(B_0) := \bigcap_{\tau > 0} \overline{\bigcup_{t \geqslant \tau} G(t,B_0)}. \tag{4}$$

Означення 2. [23] *Множина $A \subset X$ називається стійкою відносно напівпотоку G, якщо*

$$A = D^{+}(A) := \bigcup_{x \in A} \{y \mid y = \lim G(t_n,x_n),\ x_n \to x,\ t_n \geqslant 0\}\,. \tag{5}$$

В роботі [22] показано, що рівномірний атрактор імпульсної ДС може не задовольняти властивість (5), проте, за додаткових припущень щодо характеру поведінки траєкторій в околі імпульсної множини, вдається одержати наступний результат, який уточнює твердження теорем 1, 2 з [22].

Теорема 2. *Нехай імпульсна ДС $G = (V, M, I)$ задовольняє умови (2), (3) і має рівномірний атрактор Θ. Нехай імпульсне відображення $I : M \to X$ і напівгрупа $V : R_+ \times X \to X$ неперервні і додатково виконуються умови:*

для довільної послідовності $x_n \to x \in \Theta \backslash M$

$$\left\{ \begin{array}{l} s(x) = \infty, \text{ якщо } s(x_n) = \infty \text{ для нескінченно багатьох } n, \\ s(x_n) \to s(x), \text{ інакше;} \end{array} \right. \tag{6}$$

для довільної послідовності $x_n \to x \in \Theta \cap M$

$$\text{або } s(x_n) = \infty \text{ для нескінченно багатьох } n, \text{ або } s(x_n) \to 0. \tag{7}$$

Тоді справедлива рівність

$$\Theta = \overline{\Theta \backslash M}. \tag{8}$$

Крім того, Θ – інваріантний в тому сенсі, що

$$\forall t \geqslant 0 \ \ G(t, \Theta \backslash M) = \Theta \backslash M, \tag{9}$$

і стійкий в тому сенсі, що

$$D^{+}(\Theta \backslash M) \subset \overline{\Theta \backslash M}. \tag{10}$$

2. Застосування до параболічної імпульсно-збуреної системи. Нехай $\Omega \subset R^n,\ n \geqslant 1$ – обмежена область. Відносно невідомих функцій $u(t,x), v(t,x)$ в $(0, +\infty) \times \Omega$ розглядається задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + \varepsilon f_1(u,v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = a\Delta v + 2b\Delta u + \varepsilon f_2(u,v), \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \end{array} \right. \tag{11}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр,

$$a > 0,\ |b| < a. \tag{12}$$

Нелінійне збурення $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in C^1(R^2)$ задовольняє умови:

$$\exists C > 0 \quad \forall u,v \in R \quad |f_1(u,v)| + |f_2(u,v)| \leqslant C, \quad Df(u,v) \geqslant -C, \tag{13}$$

які гарантують однозначну глобальну розв'язність задачі (11) у фазовому просторі $X = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ з нормою $\|z\|_X = \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}$, де тут і надалі $\|\cdot\|$ та $(\cdot,\cdot)$ — це норма та скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

Нехай $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ – розв'язки спектральної задачі $\Delta\psi = -\lambda\psi,\ \psi \in H_0^1(\Omega)$.

Для фіксованих $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \mu > 0$ на розв'язках (11) розглядається наступна імпульсна задача:

фазова точка $z(t)$ при зустрічі з імпульсною множиною

$$M = \left\{ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X \mid |(u,\psi_1)| \leqslant \gamma,\ \alpha(u,\psi_1) + \beta(v,\psi_1) = 1 \right\} \tag{14}$$

миттєво переводиться за допомогою імпульсного відображення $I : M \to M'$ в нове положення $Iz \in M'$, де

$$M' = \left\{ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X \mid |(u,\psi_1)| \leqslant \gamma,\ \alpha(u,\psi_1) + \beta(v,\psi_1) = 1 + \mu \right\}. \tag{15}$$

Будемо розглядати наступний клас імпульсних відображень:

$$\text{для } z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M \quad I(z) = I_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M',$$

де $I_1 : R^2 \to R^2$ – задане неперервне відображення.

В роботі [18] було доведено, що за додаткової умови

$$2\beta\gamma \leqslant 1 \tag{16}$$

задача (11)–(15) для достатньо малих ε породжує імпульсну ДС G_ε, яка має рівномірний атрактор Θ_ε.

Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай $f_1 \equiv 0$. Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ рівномірний атрактор Θ_ε імпульсної ДС G_ε, породженої задачею* (11)–(15), *інваріантний і стійкий в сенсі (8)–(10).*

Доведення. Перевіримо умови теореми 2. Неперевність $I : M \to X$ випливає з неперервності $I_1 : R^2 \to R^2$, неперервність (неімпульсної) напівгрупи, породженої задачею (11), випливає з наступної властивості розв'язків задачі (11):

$$\begin{aligned} &\text{якщо } z_0^{(n)} \to z_0 \ \text{ слабо в } X, \text{ то } \ \forall\ t_n \to t_0 > 0\ z^{(n)}(t_n) \to z(t_0) \text{ в } X; \\ &\text{якщо } z_0^{(n)} \to z_0 \text{ в } X, \text{ то } z^{(n)} \to z \text{ в } C([0,T];X). \end{aligned} \tag{17}$$

Отже, залишилось перевірити умови (6), (7). Для зручності покладемо $\psi := \psi_1,\ \lambda := \lambda_1$. Для $z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ – розв'язку (11), будемо аналізувати функцію

$$\begin{gathered} g_\varepsilon(t) = \alpha(u(t),\psi) + \beta(v(t),\psi) = \alpha(u(0),\psi)e^{-a\lambda t} + \\ \beta\left((v(0),\psi) - 2b\lambda(u(0),\psi)t\right)e^{-a\lambda t} + \beta\varepsilon\int_0^t e^{-a\lambda(t-s)}(f_2(u(s),v(s)),\psi)ds = \\ e^{-a\lambda t}(\alpha(u(0),\psi) + \beta(v(0),\psi) - 2b\beta\lambda(u(0),\psi)t) + \varepsilon F_\varepsilon(t), \end{gathered} \tag{18}$$

де

$$F_\varepsilon(t) := \beta \int_0^t e^{-a\lambda(t-s)}(f_2(u(s),v(s)),\psi)ds,$$
$$F_\varepsilon \in C^1([0,\infty)), F_\varepsilon(0) = 0, \tag{19}$$

$$\exists\ C_1 > 0\ \ \forall\ \varepsilon \in (0,1)\ \ \sup_{t\geqslant 0}\left(|F_\varepsilon(t)| + |F'_\varepsilon(t)|\right) \leqslant C_1. \tag{20}$$

З результатів роботи [18] випливає, що імпульсна ДС G_ε дисипативна в сенсі (3),

$$\Theta_\varepsilon \subset B_0, \tag{21}$$

причому множина $B_0 = \{z \in X \mid \|z\|_X \leqslant R_0\}$ не залежить від $\varepsilon > 0$. З формули (4) для $z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \Theta$ маємо, що $z = \lim G_\varepsilon(t_n,z_n^0)$, $t_n \to \infty$, $z_n^0 \in B_0$. Тоді з умови $f_1 \equiv 0$ і вигляду M, M' випливає, що

$$\forall\ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \Theta\ \ |(u,\psi)| \leqslant \gamma. \tag{22}$$

Розглянемо умову (6). Нехай $z_0^n \to z_0 \in \Theta\backslash M$, $s(z_0^n) = \infty$ і, від супротивного, $s_0 := s(z_0) \in (0,\infty)$. Нехай $z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ – розв'язок (11) з $z(0) = z_0$, $z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$– розв'язок (11) з $z_n(0) = z_0^n$. Тоді з (18) одержуємо

$$e^{-a\lambda s_0}(\alpha(u_0,\psi) + \beta(v_0,\psi) - 2b\beta\lambda s_0(u_0,\psi)) + \varepsilon F_\varepsilon(s_0) = 1. \tag{23}$$

Розглянемо функцію $W : X \times R \to R$

$$W(z,t) = e^{-a\lambda t}(\alpha(u,\psi) + \beta(v,\psi) - 2b\beta\lambda s(u,\psi)t) + \varepsilon F_\varepsilon(t) - 1, \tag{24}$$

де F_ε визначається з (19) за допомогою розв'язку (11), що стартує з точки z. Оскільки

$$W(z_0, s_0) = 0,$$

$$W_t^{'}|_{(z_0,s_0)} = -a\lambda(1 - \varepsilon F_\varepsilon(s_0)) + \varepsilon F'_\varepsilon(s_0) - e^{-a\lambda s_0}2b\beta\lambda s_0(u_0,\psi),$$

то з нерівностей (12), (16), (22) існує $\gamma_1 > 0$ таке, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$

$$W_t^{'}|_{(z_0,s_0)} = -\gamma_1 < 0.$$

Тоді за теоремою про неявну функцію $\forall\ n \geqslant 1\ \exists\ s_n \to s_0$ такі, що

$$W(z_0^n, s_n) = 0.$$

При цьому оскільки $|(u(s_0),\psi)| \leqslant \gamma e^{-a\lambda s_0}$, то з (17) для достатньо великих n одержуємо

$$|(u_n(s_n),\psi)| \leqslant \gamma.$$

Це означає включення $z_n(s_n) \in M$ і суперечить припущенню $s(z_0^n) = \infty$. Отже, перша частина умови (6) виконується.

Тепер нехай $z_0^n \to z_0 \in \Theta \backslash M$, $s_n := s(z_0^n) \in (0,\infty)$.
В силу (21) $\|z_0^n\|_X \leqslant R_0 + 1$. Тоді з (18)

$$\begin{gathered} e^{-a\lambda s_n}(\alpha(u_0^n,\psi) + \beta(v_0^n,\psi) - 2b\beta\lambda s_n(u_0^n,\psi)) + \\ \beta\varepsilon \int_0^{s_n} e^{-a\lambda(s_n - s)}(f_2(u_n(s),v_n(s)),\psi)ds = 1. \end{gathered} \tag{25}$$

Звідси

$$e^{-a\lambda s_n}(\alpha(u_0^n,\psi) + \beta(v_0^n,\psi) - 2b\beta\lambda s_n(u_0^n,\psi)) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Отже, $s_n \leqslant \bar{s}$, де $\bar{s}$ – розв'язок рівняння

$$\frac{1}{2(R_0+1)}e^{a\lambda\bar{s}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + 2\beta|b|\lambda\bar{s}.$$

Таким чином, по підпослідовності $s_n \to s_0 \geqslant 0$. Переходячи до границі в (25), одержуємо

$$e^{-a\lambda s_0}(\alpha(u_0,\psi) + \beta(v_0,\psi) - 2b\beta\lambda s_0(u_0,\psi)) + \varepsilon F_\varepsilon(s_0) = 1. \tag{26}$$

Звідси, зокрема, виводимо, що $s_0 > 0$, оскільки $\alpha(u_0,\psi) + \beta(v_0,\psi) \neq 1$. Переходячи до границі в нерівності $|(u_n(s_n),\psi)| \leqslant \gamma$, одержуємо $|(u(s_0),\psi)| \leqslant \gamma$. Отже, $z(s_0) \in M$. Покажемо, що $s_0 = s(z_0)$, тобто точка s_0 – момент першого попадання z на M. Інакше, існує $s_1 \in (0,s_0)$ така, що

$$g_\varepsilon(s_1) = g_\varepsilon(s_0) = 1,\ g'_\varepsilon(t) \leqslant -\gamma_1 < 0\ \forall\ t \in (s_1,s_0),$$

що приводить до протиріччя. Властивість (6) доведена.

Доведемо властивість (7). Нехай $z_0^n \to z_0 \in \Theta \cap M$, $s_n := s(z_0^n) \in (0,\infty)$. Доведемо, що $s_n \to 0$. До послідовності $\{s_n\}$ застосовні міркування після формули (25), з яких випливає, що по підпослідовності $s_n \to s_0 \geqslant 0$.

Переходячи до границі в (25), одержуємо

$$e^{-a\lambda s_0}(1 - 2b\beta\lambda s_0(u_0,\psi)) + \varepsilon F_\varepsilon(s_0) = 1. \tag{27}$$

Якщо припустити, що $s_0 > 0$, то

$$g_\varepsilon(0) = g_\varepsilon(s_0) = 1,\ g'_\varepsilon(t) \leqslant -\gamma_1 < 0\ \forall\ t \in (0,s_0),$$

що приводить до протиріччя. Теорема доведена.

Висновки. В роботі досліджено властивості рівномірного атрактора слабо нелінійної двовимірної параболічної системи, розв'язки якої зазнають імпульсного збурення при досягненні фіксованої імпульсної підмножини у фазовому просторі. Розглянуто випадок, коли траєкторії системи можуть нескінченну кількість разів зустрічатись з імпульсною множиною. Доведено, що в цьому випадку властивостю інваріантності та стійкості володіє неімпульсна частина рівномірного атрактора.

1. **Самойленко А. М.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – К.: Вища школа, 1987. – 287 с.
2. **Lakshmikantham V.** Theory of impulsive differential equitations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov. – Singapore : World Scientific, 1989. – 288 p.
3. **Samoilenko A. M.** Impulsive differential equitations / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. – Singapore : World Scientific, 1995. – 462 p.
4. **Перестюк Н. А.** Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник. – Киев: Ин-т математики, 2007. – 425 с.
5. **Akhmet M.** Principles of Discontinuous Dynamical Systems / M Akhmet. – New York: Springer, 2010. – 176 p.
6. **Перестюк Н. А.** Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем / Н. А Перестюк // Украинский математический журнал. – 1984. – №1. – С. 63–38.
7. **Kaul S. K.** Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems / S. K. Kaul // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 1994. – Vol. 7. – №4. – P. 509–523.
8. **Pavlidis T.** Stability of a class of discontinuous dynamical systems / T. Pavlidis // Information and control. – 1996. – Vol. 9. – P. 298–322.
9. **Ciesielski K.** On stability in impulsive dynamical systems / K. Ciesielski //Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics – 2004. – Vol. 52. – P. 81–91.
10. **Bonotto E. M.** Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems / E. M. Bonotto // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – Vol. 332. – P. 81–96.
11. **Перестюк Ю. М.** Розривні коливання в одній імпульсній системі / Ю. М. Перестюк // Нелінійні коливання. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 494–503.
12. **Temam R.** Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics / R. Temam. – New York: Springer, 1988. – 500 p.
13. **Chepyzhov V. V.** Attractors for Equations of Mathematical Physics / V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik – Rhode Island: American Mathematical Society, 2002. – 324 p.
14. **Kapustyan O. V.** Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness / O. V. Kapustyan, V. S. Melnik, J. Valero, V. V. Yasinsky. – Kyiv: Naukova Dumka, 2008. – 215 p.
15. **Perestyuk M. O.** Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects / M. O. Perestyuk, O. V. Kapustyan // Memoirs of Differential equations and Mathematical physics. – 2012. – Vol. 56. – P. 89–113.
16. **Perestyuk M. O.** Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems / M. O. Perestyuk, O. V Kapustyan // Ukrainian Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 68. – №4. – P. 517–528.
17. **Dashkovskiy S.** Global atractors of impulsive parabolic inclusions / S. Dashkovskiy, O. V. Kapustyan, I. V. Romaniuk // Descrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. B. – 2017. – Vol. 22. – №5. – P. 1875–1886.

18. **Kapustyan O.** Global attractor of weakly nonlinear parabolic system with discontinuous trajectories / O. Kapustyan, M. Perestyuk, I. Romaniuk // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 72. – P. 59–70.
19. **Dashkovskiy S.** Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems / S. Dashkovskiy, P. Feketa, O. Kapustyan and I. Romaniuk // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – Vol. 458. – P. 193–218.
20. **Bonotto E. M.** Global attractors for impulsive dynamical systems – a precompact approach / E. M. Bonotto, M. C. Bortolan, A. N. Carvalho and R. Czaja // Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 259. – P. 2602–2625.
21. **Bonotto E. M.** Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems / E. M.Bonotto, M. C. Bortolan, R. Collegari and R. Czaja // Journal of Differential Equations. – 2016. – Vol. 261. – P. 4338–4367.
22. **Kapustyan O. V.** Stability of global attractors of impulsive infinite-dimensional systems / O. V. Kapustyan, M. O. Perestyuk, I. V. Romaniuk // Ukrainian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 70. – №1. – P. 30–41.
23. **Bhatia N.P.** Stability theory of dynamical systems. / N. P. Bhatia , G. P. Szegö. – New York: Springer, 2002. – 255 p.

Капустян А. В., Перегуда О. В., Романюк И. В.
Устойчивость равномерных аттракторов для одного класса импульсных параболических систем

Резюме

В работе рассматривается слабо нелинейная двумерная параболическая система, решения которой испытывают импульсное возмущение при достижении фиксированного (импульсного) подмножества фазового пространства. Она порождает импульсную динамическую систему, которая имеет в фазовом пространстве минимальное компактное равномерно притягивающее множество — равномерный аттрактор. При этом траектории системы могут бесконечное количество раз встречаться с импульсным множеством. Тогда, в общем случае, равномерный аттрактор имеет непустое пересечение с импульсным множеством и не является ни инвариантным, ни устойчивым множеством относительно импульсного полупотока. В работе доказано, что при определенных дополнительных условиях на параметры задачи инвариантной и устойчивой является неимпульсная часть равномерного аттрактора.
Ключевые слова: импульсная система, параболическая система, аттрактор, устойчивость .

Kapustyan O. V., Pereguda O. V., Romaniuk I. V.
Stability of uniform attractors for one class of impulsive parabolic systems

Summary

In this paper we consider weakly non-linear two-dimensional parabolic systems, whose solutions have jumps at moments of intersection with fixed (impulsive) subset of the phase space. It generates impulsive dynamical system which has minimal compact uniformly attracting set — uniform attractor. Trajectories of the system can reach the impulsive set infinitely many times. In this case the uniform attractor has non-empty intersection with impulsive set. It is neither invariant nor stable with respect to the impulsive semi-flow. In the paper under some additional restrictions on the parameters invariance and stability of non-impulsive part of the attractor is proved.
Key words: impulsive system, parabolic system, attractor, stability.

References

1. Samoilenko A. M., Perestyuk M. O. (1987). *Dyfferentsyalnye uravnenyia s ympulsnым vozdeistvyem [Differential equations with impulsive action].* Kyiv : Vyshcha shkola, 287 p.
2. Lakshmikantham V. , Bainov D. D., Simeonov P. S. (1989). *Theory of impulsive differential equitations.* Singapore : World Scientific, 288 p.
3. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. (1995). *Impulsive differential equitations* . Singapore : World Scientific, 462 p.
4. Perestyuk N. A., Plotnykov V. A., Samoilenko A. M., Skrypnyk N. V. (2007). *Impulsnyye differentsialnyye uravneniya s mnogoznachnoy i razryvnoy pravoy chastyu [Impulsive differential equations with a multi-valued and discontinuous right-hand side].* Kiyv: Institut matematiki, 425 p.
5. Akhmet M. (2010). *Principles of Discontinuous Dynamical Systems.* New York: Springer, 176 p.
6. Perestyuk N. A. (1984). *Invariantnyye mnozhestva odnogo klassa razryvnykh dinamicheskikh sistem [Invariant sets of one class of discontinuous dynamical systems]. Ukr. matematych. zhurnal*, №1, P. 63–38.
7. Kaul S. K. (1994). *Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems. J Appl Math Stoch Anal*, Vol. 7, №4, P. 509–523.
8. Pavlidis T. (1996). *Stability of a class of discontinuous dynamical systems. Information and control*, Vol. 9, P. 298–322.
9. Ciesielski K. (2004). *On stability in impulsive dynamical systems. Bulletin Polish Acad. Sci. Math.*, Vol. 52, P. 81–91.
10. Bonotto E. M. (2007). *Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems. J Math Anal Appl*, Vol. 332, , P. 81–96.
11. Perestiuk Y. M. (2012). *Rozryvni kolyvannia v odnii impulsnii systemi [Discontinuous oscillations in one impulsive system].* , Vol. 15, №4, P. 494–503.
12. Temam R. (1988). *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* New York: Springer, 500 p.
13. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. (2002). *Attractors for Equations of Mathematical Physics.* Rhode Island: American Mathematical Society, 324 p.
14. Kapustyan O. V., Melnik V. S., Valero J., Yasinsky V. V. (2008). *Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness.* Kyiv: Naukova Dumka, 215 p.
15. Perestyuk M. O., (2012). *Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects. Memoirs Diff eq and Math phys*, Vol. 56, P. 89–113.
16. Perestyuk M. O., Kapustyan O. V. (2016). *Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems. UMJ*, Vol. 68, №4, P. 517–528.
17. Dashkovskiy S., Kapustyan O. V.,Romaniuk I. V. (2017). *Global atractors of impulsive parabolic inclusions. DCDS*, Vol. 22, №5, P. 1875–1886.
18. Kapustyan O., Perestyuk M., Romaniuk I. (2017). *Global attractor of weakly nonlinear parabolic system with discontinuous trajectories. Memoirs Diff eq and Math phys*, Vol. 72, №1, P. 59–70.
19. Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O. V., Romaniuk I. V. (2018). *Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems.* , Vol. 458, P. 193–218.

20. Bonotto E. M, Bortolan M. C., Carvalho A. N., Czaja R. (2015). *Global attractors for impulsive dynamical systems – a precompact approach. J Diff Eq*, Vol. 259, P. 2602–2625.
21. Bonotto E. M, Bortolan M. C., Collegari R. , Czaja R. (2016). *Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems. J Diff Eq*, Vol. 261, №1, P. 4338–436.
22. Kapustyan O. V., Perestyuk M. O., Romaniuk I. V. (2018). *Stability of global attractors of impulsive infinite-dimensional systems. UMJ*, Vol. 70, №1, P. 30–41.
23. Bhatia N. P., Szegö G. P. (2002). *Stability theory of dynamical systems.* New York: Springer, 255 p.