УДК 517.937

В. В. Джашитова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПОЛНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ СЧЁТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Для счётной линейной однородной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены условия существования линейного преобразования с коэффициентами аналогичной структуры, приводящего эту систему к диагональному виду в резонансном случае.
MSC: 34A30.
Ключевые слова: счётная система, разделение, ряды Фурье.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149701.

Введение. Счётные системы дифференциальных уравнений [1–3] вызывают постоянный интерес математиков. Из публикаций, вышедших в последнее время, отметим [4–6]. Как отмечается в монографии [2], счётные системы дифференциальных уравнений, несмотря на то, что они являются частным случаем дифференциальных уравнений в банаховых пространствах [7,8], имеют ряд специфических особенностей, что приводит к разработке соответствующей теории.

Одной из известных проблем теории дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах является проблема полного или блочного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \tag{1}$$

$x = \mathrm{colon}(x_1,...,x_n)$, $P(t) = (p_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$. То есть для системы (1) требуется построить ляпуновское преобразование

$$x = L(t)y, \tag{2}$$

приводящее систему (1) к виду

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda(t)y, \tag{3}$$

где матрица $\Lambda(t)$ диагональная или блочно-диагональная. При этом существенным является вопрос о принадлежности элементов преобразующей матрицы $L(t)$ тем же классам функций, что и элементы матрицы $P(t)$ системы (1). Этой задаче также посвящён ряд исследований [9–12]. В настоящей работе задача полного разделения рассматривается для счётной линейной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой.

Получена 10.10.2018

Предварительные результаты. Пусть

$$G(\varepsilon_0) = \{t,\varepsilon:\ t \in \mathbb{R},\, \varepsilon \in [0,\varepsilon_0],\, \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}.$$

Определение 1. *Скажем, что функция $p(t,\varepsilon)$ принадлежит классу $S(m;\varepsilon_0)$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), если выполнены следующие условия:*
1) $p : G(\varepsilon_0) \to \mathbb{C}$;
2) $p(t,\varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ по t;
3) $d^k p(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k^*(t,\varepsilon)$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$, причём

$$\|p\|_{S(m,\varepsilon_0)} \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G(\varepsilon_0)} |p_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Определение 2. *Скажем, что функция $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ принадлежит классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), если эта функция представима в виде:*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

причём
1) $f_n(t,\varepsilon) \in S(m,\varepsilon_0)$ ($n \in \mathbb{Z}$);
2) $\|f\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)} \overset{def}{=} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty$;
3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\varphi \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in S(m,\varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} \varphi(t,\varepsilon) = \varphi_0 > 0$.

Множество функций класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ образует линейное пространство, превращающееся в полное нормированное пространство введением нормы $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Имеет место цепочка включений: $F(0;\varepsilon_0;\theta) \supset F(1;\varepsilon_0;\theta) \supset \ldots \supset F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Пусть заданы две функции класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$:

$$u(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),\ v(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right).$$

Произведение этих функций определим формулой:

$$(uv)(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{n-s}(t,\varepsilon) v_s(t,\varepsilon) \right) \exp(in\theta(t,\varepsilon)).$$

Очевидно, что $uv \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Сформулируем некоторые свойства нормы $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Пусть $u,v \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $k = \mathrm{const}$. Тогда:
1) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = |k| \cdot \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;
2) $\|u+v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} + \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;
3) $\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \sum\limits_{k=0}^{m} \left\| \frac{1}{\varepsilon^k} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}$;
4) $\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant 2^m \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Определение 3. *Скажем, что бесконечномерный вектор* $x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon),\ldots)$ *принадлежит классу* $S_1(m;\varepsilon_0)$, *если* $x_j \in S(m;\varepsilon_0)$ $(j = 1,2,\ldots)$, *причём*

$$\|x\|_{S_1(m;\varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sup_j \|x_j\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty.$$

Определение 4. *Скажем, что бесконечная матрица* $A(t,\varepsilon) = (a_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}$ *принадлежит классу* $S_2(m;\varepsilon_0)$, *если* $a_{jk} \in S(m;\varepsilon_0)$, *причём*

$$\|A\|_{S_2(m;\varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{jk}\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty.$$

Определение 5. *Скажем, что бесконечномерный вектор* $x(t,\varepsilon,\theta) = \mathrm{col}(x_1(t,\varepsilon,\theta),x_2(t,\varepsilon,\theta),\ldots)$ *принадлежит классу* $F_1(m;\varepsilon_0,\theta)$, *если* $x_j \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(j = 1,2,\ldots)$, *причём*

$$\|x\|_{F_1(m;\varepsilon_0,\theta)} \stackrel{def}{=} \sup_j \|x_j\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)} < +\infty.$$

Определение 6. *Скажем, что бесконечная матрица* $A(t,\varepsilon,\theta) = (a_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=1,2,\ldots}$ *притнадлежит классу* $F_2(m;\varepsilon_0,\theta)$, *если* $a_{jk} \in F(m;\varepsilon_0,\theta)$, *причём*

$$\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0,\theta)} \stackrel{def}{=} \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{jk}\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)} < +\infty.$$

Очевидно, что если $A \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $x \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, то $Ax \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, при этом $\|Ax\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant 2^m \|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \|x\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Условие $\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} < 1$ обеспечивает существование матрицы

$$(E + A)^{-1} = E + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A^k,$$

где $E = \mathrm{diag}(1,1,...)$.

Для любого вектора $x(t,\varepsilon,\theta) \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$ обозначим:

$$\Gamma_n[x] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t,\varepsilon,\theta) \exp(-in\theta) d\theta,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Для бесконечномерных векторов $x = \mathrm{colon}(x_1,x_2,...)$, $y = \mathrm{colon}(y_1,y_2,...)$ обозначим: $[x,y] = \mathrm{colon}(x_1y_1,x_2y_2,...)$.

Основные результаты

1. Постановка задачи. Рассматривается счётная система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon)x + \mu B^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)x + \mu^2 B(t,\varepsilon,\theta)x, \tag{4}$$

где $t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$, $x = \mathrm{colon}(x_1,x_2,...)$, $\Lambda(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}[\lambda_1(t,\varepsilon),\lambda_2(t,\varepsilon),...] \in S_2(m;\varepsilon_0)$, $B^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) = \mathrm{diag}[b_1(t,\varepsilon,\theta),b_2(t,\varepsilon,\theta),....] \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $B(t,\varepsilon,\theta) = (b_{jk}(t,\varepsilon,\theta)_{j,k=1,2,\ldots} \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, причём $b_{jj}(t,\varepsilon,\theta) \equiv 0$ $(j = 1,2,...)$, $\mu \in (0,\mu_0) \subset \mathbb{R}^+$.

Предполагается выполнение соотношений:

$$\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon) = in_{jk}\varphi(t,\varepsilon), \tag{5}$$

$n_{jk} \in \mathbb{Z}$ $(j,k = 1,2,\ldots)$, $\varphi(t,\varepsilon)$ – функция, фигурирующая в определении класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. В этом смысле мы имеем дело с резонансным случаем.

Изучается вопрос о существовании преобразования вида

$$x = (E + Q(t,\varepsilon,\theta,\mu))y, \tag{6}$$

$y = \mathrm{colon}(y_1,y_2,\ldots)$, $Q(t,\varepsilon,\theta,\mu) = (q_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu))_{j,k=1,2,\ldots} \in F_2(m_1;\varepsilon_2;\theta)$ $(m_1 \leqslant m,\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0)$, $q_{jj}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \equiv 0$, приводящего систему (4) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = D(t,\varepsilon,\theta,\mu)y, \tag{7}$$

$D(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \mathrm{diag}[d_1(t,\varepsilon,\theta,\mu), d_2(t,\varepsilon,\theta,\mu),\ldots] \in F_2(m_1,\varepsilon_1;\theta)$.

Для конечномерного случая аналогичная задача рассматривалась в работах [13,14].

2. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим следующую счётную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dt} = i\varphi(t,\varepsilon)\Lambda_1 z + \mu U(t,\varepsilon,\theta)z + g(t,\varepsilon,\theta) + \mu^2 C(t,\varepsilon,\theta)z + \mu^4[z,R(t,\varepsilon,\theta)z], \tag{8}$$

$t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$, $z = \mathrm{colon}(z_1,z_2,\ldots)$, $\Lambda_1 = \mathrm{diag}[n_1,n_2,\ldots]$, $n_j \in \mathbb{Z}$ $(j = 1,2,\ldots)$, $U = \mathrm{diag}[u_1(t,\varepsilon,\theta),u_2(t,\varepsilon,\theta),,,.] \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $g = \mathrm{colon}(g_1(t,\varepsilon,\theta), g_2(t,\varepsilon,\theta),\ldots) \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, $C = (c_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=1,2,\ldots} \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $c_{jj} \equiv 0$ $(j = 1,2,\ldots)$, $R \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $\mu \in (0,\mu_0) \subset \mathbb{R}^+$.

Лемма 1. *Пусть система (8) удовлетворяет следующим условиям:*
1) $\forall\ t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$:

$$\int\limits_0^{2\pi} g_j(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in_j\theta)d\theta = 0,\ j = 1,2,\ldots\ ; \tag{9}$$

2)

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}\left|\int\limits_0^{2\pi} u_j(t,\varepsilon,\theta)d\theta\right| \geqslant \gamma > 0,\ j = 1,2,\ldots\ . \tag{10}$$

Тогда существует $\mu_1 \in (0,\mu_0)$ *такое, что* $\forall\ \mu \in (0,\mu_1)$ *и* $\forall q \in \mathbb{N}$ *существует преобразование вида*

$$z = \sum_{s=0}^{2q-1}\xi^{(s)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s + \Phi(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)}, \tag{11}$$

$\xi^{(s)} \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, $\Phi \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, *приводящее систему (8) к виду:*

$$\frac{dz^{(1)}}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l\right) z^{(1)} + \varepsilon h^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q}h^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\varepsilon V^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)} + \mu^{q+1}P^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)} + \mu[R^{11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)}, R^{12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)}], \tag{12}$$

где $K^{(l)} \in S_2(m;\varepsilon_0)$ и $\forall\ \mu \in (0,\mu_1)$; $h^{(11)}, h^{(12)} \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta), V^{(1)}, P^{(1)}, R^{(11)}$, $R^{(12)} \in F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

Доказательство. В системе (8) произведём подстановку:

$$z = \exp(i\Lambda\theta)\sigma^{(1)}, \tag{13}$$

где $\sigma^{(1)} = \mathrm{colon}(\sigma_1^{(1)},\sigma_2^{1)},\ldots)$, $\exp(i\Lambda\theta) = \mathrm{diag}[e^{in_1\theta},e^{in_2\theta},\cdots]$. Получим:

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{dt} = g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) + \mu U(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(1)} + \mu^2 C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(1)} + \mu^4[\sigma^{(1)},R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(1)}], \tag{14}$$

где $g^{(1)} = e^{-i\Lambda\theta}g$, $C^{(1)} = e^{-i\Lambda\theta}Ce^{i\Lambda\theta}$, $R^{(1)} = Re^{i\Lambda\theta}$.

Очевидно, что $g^{(1)} \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, $C^{(1)} \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, причём $c_{jj}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta \equiv 0$ ($j = 1,2,\ldots$), $R^{(1)} \in F_2(m\varepsilon;\theta)$. В силу условий леммы можем записать: $\forall\ t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$:

$$\int_0^{2\pi} g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)d\theta = 0. \tag{15}$$

Наряду с системой (14) рассмотрим вспомогательную систему:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi}{dt} = g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) + \mu U(t,\varepsilon,\theta)\xi + \mu^2 C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi + \mu^4[\xi,R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi], \tag{16}$$

в которой t,φ рассматриваются как постоянные. Вектор $g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$ и матрицы $U(t,\varepsilon,\theta)$, $C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$, $R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$ – 2π-периодические по θ. Построим, согласно методу малого параметра Пуанкаре [15], приближённое 2π-периодическое по θ решение системы (16) в виде частичной суммы ряда по степеням малого параметра μ:

$$\widetilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \sum_{s=0}^{2q-1} \xi^{(s)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s, \tag{17}$$

где вектор-функции $\xi^{(s)}(t,\varepsilon,\theta)$ определяются из следующей цепочки линейных неоднородных векторных дифференциальных уравнений:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(0)}}{dt} = g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta), \tag{18}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(1)}}{dt} = U(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(0)}, \tag{19}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(2)}}{dt} = U(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(1)} + C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(0)}, \tag{20}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(3)}}{dt} = U(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(2)} + C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(1)}, \tag{21}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(s)}}{dt} = U(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(s-1)} + C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(s-2)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{s-4}[\xi^{(k)},R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(s-4-k)}],\ s=\overline{4,2q-1}. \qquad (22)$$

Равенство (15) обеспечивает существование 2π-периодического по θ решения уравнения (18), которое имеет вид:

$$\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)=M^{(0)}(t,\varepsilon)+\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta), \qquad (23)$$

где

$$\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi}\ e^{in\theta}\in F_1(m;\varepsilon_0;\theta),$$

причём $\forall\ t,\varepsilon\in G(\varepsilon_0)$:

$$\int_0^{2\pi}\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)d\theta=0.$$

Вектор-функция $M^{(0)}(t,\varepsilon)$ определится из условия существования 2π-периодического по θ решения уравнения (19), а именно, из линейного уравнения:

$$\left(\int_0^{2\pi}U(t,\varepsilon,\theta)d\theta\right)M^{(0)}=-\int_0^{2\pi}U(t,\varepsilon,\theta)\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)d\theta. \qquad (24)$$

Учитывая диагональность матрицы $U(t,\varepsilon,\theta)$, легко видеть, что условие (10) обеспечивает существование единственного решения $M^{(0)}(t,\varepsilon)$ уравнения (24), и это решение принадлежит классу $S_1(m;\varepsilon_0)$. Следовательно, $\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)\in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$. Также условие (10) гарантирует существование 2π-периодических по θ решений уравнений (20), (21), (22), и все эти решения принадлежат классу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$. Следовательно, вектор-функция $\widetilde{\xi})t,\varepsilon,\theta,\mu)$ также принадлежит классу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Вернёмся теперь к системе (14) и произведём в ней подстановку:

$$\sigma^{(1)}=\widetilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\sigma^{(2)}, \qquad (25)$$

где $\sigma^{(2)}$ – новый неизвестный вектор. Получим:

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{dt}=\varepsilon h^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{2q}g^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu U(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(2)}+\mu^2C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(2)}+$$
$$+\mu^4[\widetilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta,\mu),R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(2)}]+\mu^4[\sigma^{(2)},R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(2)}], \qquad (26)$$

где $h^{(2)}\in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $g^{(2)}\in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Учитывая определение скобок $[\cdot,\cdot]$ и равенство (17), систему (26) можно переписать так:

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{dt}=\varepsilon h^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{2q}g^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\left(\sum_{k=1}^{q}U^{(k)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^k\right)\sigma^{(2)}+$$
$$+\mu^{q+1}W^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\sigma^{(2)}+\mu^4[\sigma^{(2)},R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(2)}], \qquad (27)$$

где $U^{(k)},W^{(2)}\in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Рассмотрим счётную линейную однородную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} U^{(l)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right) x, \tag{28}$$

$x = \mathrm{colon}(x_1,x_2,\cdot)$. В работе [16] было показано, что существует $\mu^* \in (0,\mu_0)$ такое, что $\forall\ \mu \in (0,\mu^*)$ существует преобразование вида

$$x = \Phi(t,\varepsilon,\theta,\mu)y, \tag{29}$$

где $\Phi \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, приводящее систему (28) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l + \varepsilon\sum_{l=1}^{q} V^{(l)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l + \mu^{q+1}W(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right) y, \tag{30}$$

где $K^{(l)} \in S_2(m;\varepsilon_0)$, $V^{(l)},W \in F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ $(l = \overline{1,q})$.

Произведём в системе (27) подстановку

$$\sigma^{(2)} = \Phi(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)}. \tag{31}$$

В результате придём к системе (12). Тем самым лемма 1 доказана.

Рассмотрим счётную линейную однородную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = A(t,\varepsilon)x^{(0)}, \tag{32}$$

где $A(t,\varepsilon) \in S_2(m;\varepsilon_0)$.

Определение 7. *Матрицей Грина системы (32) назовём матрицу* $G(t,\tau,\varepsilon) = (g_{jk}(t,\tau,\varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}$, *удовлетворяющую условиям:*
1) при $t \neq \tau$*:*

$$\frac{\partial G(t,\tau,\varepsilon)}{\partial t} = A(t,\varepsilon)G(t,\tau,\varepsilon), \quad \frac{\partial G(t,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = -G(t,\tau,\varepsilon)A(\tau,\varepsilon),$$

2) $G(\tau+0,\tau,\varepsilon) - G(\tau-0,\tau,\varepsilon) = E, \quad G(t,t+0,\varepsilon) - G(t,t-0,\varepsilon) = -E.$

При $t = \tau$ *матрица Грина не определена.*

Наряду с системой (32) рассмотрим счётную линейную неоднородную систему:

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon,\theta), \tag{33}$$

где $f \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, матрица $A(t,\varepsilon)$ та же, что и в системе (32).

Лемма 2. *Пусть система (32) имеет матрицу Грина* $G(t,\tau,\varepsilon) = (g_{jk}(t,\tau,\varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}$ *такую, что*

$$|g_{jk}(t,\tau,\varepsilon)| \leqslant M_0 \exp(-\gamma_0|t-\tau|),$$

где $M_0,\gamma_0 \in (0,+\infty)$, *причём* M_0,γ_0 *не зависят от* t,τ,ε. *Тогда система (33) имеет единственное частное решение* $x(t,\varepsilon,\theta) \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, *причём существует* $K_0 \in (0,+\infty)$ *такое, что:*

$$\|x(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_0}{\gamma_0}\ \|f(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)}. \tag{34}$$

Утверждение леммы 2 непосредственно вытекает из результата работы [17].

Лемма 3. *Пусть система (8) такова, что*

1) выполнены условия леммы 1;

2) для линейной однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l\right) x, \tag{35}$$

где матрицы $K^{(l)}(t,\varepsilon)$ определены в лемме 1, существует матрица Грина $G(t,\tau,\varepsilon,\mu) = (g_{jk}(t,\tau,\varepsilon,\mu))_{j,k=1,2,\ldots}$ такая, что

$$|g_{jk}(t,\tau,\varepsilon,\mu)| \leqslant M_1 \exp\left(-\gamma_1\mu^{q_0}|t-\tau|\right),$$

$q_0 \in [1,q]$, $M_1,\gamma_1 \in (0,+\infty)$ *и не зависят от* t,τ,ε,μ.

Тогда существуют $\mu_2 \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_2(\mu) \in (0,\varepsilon_0)$ такие, что $\forall\ \mu \in (0,\mu_2)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2(\mu))$ система (8) имеет частное решение, принадлежащее классу $F_1(m-1;\varepsilon_2(\mu);\theta)$.

Доказательство. На основании леммы 1 приведём систему (8) к системе (12). В этой системе совершим подстановку:

$$z^{(1)} = \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0}}\ z^{(2)}, \tag{36}$$

где $z^{(2)}$ – новый неизвестный вектор. Получим:

$$\frac{dz^{(2)}}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l\right) z^{(2)} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ h^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ h^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+$$

$$+\varepsilon V^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2)} + \mu^{q+1}P^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2)}+$$

$$+\frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}[R^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2)},R^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2)}]. \tag{37}$$

Рассмотрим линейную неоднородную систему:

$$\frac{dz^{(20)}}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l\right) z^{(20)} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ h^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ h^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu). \tag{38}$$

Принимая во внимание условие 2 леммы, и на основании леммы 2 можем утверждать, что система (38) имеет единственное частное решение $z^{(20)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, причём существует $K \in (0,+\infty)$ такое, что

$$\|z^{(20)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{\gamma_1\mu^{q_0}}\left(\frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \|h^{(11)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \|h^{(12)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right) <$$

$$< \frac{K}{\gamma_1}\left(\|h^{(11)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + h^{(12)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right).$$

Решение класса $F_1(m-1;\varepsilon_2(\mu);\theta)$ системы (37) будем искать методом последовательных приближений, выбирая в качестве начального приближения $z^{(20)}$, а дальнейшие приближения определив как решения класса $F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ счётных линейных неоднородных систем:

$$\frac{dz^{(2,s+1)}}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l\right) z^{(2,s+1)} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, h^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, h^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$
$$+\varepsilon V^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2s)} + \mu^{q+1}P^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2s)} +$$
$$+\frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}[R^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2s)}, R^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2s)}],\ s=0,1,2,\dots\ . \tag{39}$$

Пусть

$$\Omega = \left\{\ z^{(2)} \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta):\ \|z^{(2)} - z^{(20)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant d\ \right\}.$$

Несложно установить, что существует $L(d) \in (0,+\infty)$ такое, что $\forall\ z,y \in \Omega$ выполнено:

$$\big\|[R^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z, R^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z] - [R^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y, R^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y]\big\|_{F_1(m-1,\varepsilon_0;\theta)} \leqslant$$
$$\leqslant L(d)\|x-y\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Используя известную матодику принципа сжимающих отображений [18], несложно показать, что существуют $\mu_2 \in (0,\mu_0)$, $K_1 \in (0,+\infty)$ такие, что $\forall\ \mu \in (0,\mu_2)$, $\forall\ \varepsilon \in (0,K_1\mu^{2q_0-1})$ процесс (39) сходится к решению $z^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_1(m-1;K_1\mu^{2q_0-1};\theta)$ системы (37). Учитывая равенство (36), отсюда получаем утверждение леммы.

Приведём пример системы вида (8), удовлетворяющей всем условиям леммы 3. Рассмотрим счётную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dt} = g(t,\varepsilon,\theta) + \mu U(t,\varepsilon,\theta)z + \mu^2 C(t,\varepsilon,\theta)z + \mu^4[z,R(t,\varepsilon,\theta)z], \tag{40}$$

матрицы U,C,R – те же, что и в системе (8), а вектор-функция g такова, что $\forall\ t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$:

$$\int_0^{2\pi} g(t,\varepsilon,\theta)d\theta = 0.$$

Положим $q = q_0 = 1$. Тогда, как следует из работы [16], преобразование (11) принимает вид:

$$z = \xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) + \xi^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\mu + (E + \mu\Phi^{(1)}(t,\varepsilon,\theta))z^{(1)}, \tag{41}$$

где

$$\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) = M^{(0)}(t,\varepsilon) + \eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta),$$
$$\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[g(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi}\, e^{in\theta},$$

$$M^{(0)}(t,\varepsilon) = -\left(\int\limits_0^{2\pi} U(t,\varepsilon,\theta)d\theta\right)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} U(t,\varepsilon,\theta)\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)d\theta,$$

$$\xi^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[U(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi}\, e^{in\theta},$$

$$\Phi^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[U(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi}\, e^{in\theta}.$$

В результате преобразования (41) система (40) приведётся к виду:

$$\frac{dz^{(1)}}{dt} = \mu K^{(1)}(t,\varepsilon)z^{(1)} + \varepsilon h^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^2 h^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\varepsilon V^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)} + \mu^2 P^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)} + \mu[R^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)},R^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)}],$$

где

$$K^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U(t,\varepsilon,\theta)d\theta.$$

Нетрудно видеть, что если матрица $U(t,\varepsilon,\theta)$ удовлетворяет условию (10), то счётная линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mu K^{(1)}(t,\varepsilon)x$$

имеет матрицу Грина $G(t,\tau,\varepsilon,\mu) = \mathrm{diag}[g_1(t,\tau,\varepsilon,\mu),g_2(t,\tau,\varepsilon,\mu),\ldots]$, где $g_j(t,\tau,\varepsilon,\mu)$ $(j = 1,2,\ldots)$ определяются формулами:
в случае

$$k_j^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_j(t,\varepsilon,\theta)d\theta \leqslant -\gamma < 0:$$

$$g_j(t,\tau,\varepsilon,\mu) = \begin{cases} \exp\left(\mu\int\limits_\tau^t k_j^{(1)}(s,\varepsilon)ds\right),\ t > \tau, \\ 0,\ t < \tau; \end{cases}$$

в случае:

$$k_j^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_j(t,\varepsilon,\theta)d\theta \geqslant \gamma > 0:$$

$$g_j(t,\tau,\varepsilon,\mu) = \begin{cases} 0,\ t > \tau, \\ -\exp\left(\mu\int\limits_\tau^t k_j^{(1)}(s,\varepsilon)ds\right),\ t < \tau. \end{cases}$$

Константа γ определяется условием (10).

Очевидно выполнение неравенства:

$$|g_j(t,\tau,\varepsilon,\mu)| \leqslant \exp(-\mu\gamma|t-\tau|),\ j = 1,2,\ldots .$$

Таким образом, все условия леммы 3 выполнены. Поэтому на её основании можем утверждать, что существуют $\mu_{20} \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_{20}(\mu) \in (0,\varepsilon_0)$ такие, что $\forall\ \mu \in (0,\mu_{20})$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_{20}(\mu))$ система (40) имеет частное решение, принадлежащее классу $F_1(m-1;\varepsilon_{20}(\mu);\theta)$.

3. Основной результат. Вернёмся теперь к системе (4) и совершим в ней подстановку (6). Исходя из условия диагональности преобразованной системы (7) и учитывая условие (5), получим следующую счётную систему дифференциальных уравнений для определения элементов q_{jk} $(j \neq k)$ матрицы Q:

$$\frac{dq_{jk}}{dt} = in_{jk}\varphi(t,\varepsilon)q_{jk} + \mu(b_j(t,\varepsilon,\theta) - b_k(t,\varepsilon,\theta))q_{jk} + \mu^2 b_{jk}(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+\mu^2 \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j, s\neq k)}}^{\infty} b_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{sk} - \mu^2 q_{jk} \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq k)}}^{\infty} b_{ks}(t,\varepsilon,\theta)q_{sk},\ j,k = 1,2,\ldots\ ;\ j \neq k. \tag{42}$$

Элементы диагональной матрицы D в системе (7) определятся формулами:

$$d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \lambda_j(t,\varepsilon) + \mu b_j(t,\varepsilon,\theta) + \mu \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j)}}^{\infty} b_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{sj}(t,\varepsilon,\theta,\mu). \tag{43}$$

Подстановка

$$q_{jk} = \mu^2 \widetilde{q}_{jk},\ j,k = 1,2,\ldots\ ;\ j \neq k \tag{44}$$

приводит систему (42) к виду:

$$\frac{d\widetilde{q}_{jk}}{dt} = in_{jk}\varphi(t,\varepsilon)\widetilde{q}_{jk} + \mu(b_j(t,\varepsilon,\theta) - b_k(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{q}_{jk} + b_{jk}(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+\mu^2 \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j, s\neq k)}}^{\infty} b_{js}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{q}_{sk} - \mu^4 \widetilde{q}_{jk} \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq k)}}^{\infty} b_{ks}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{q}_{sk},\ j,k = 1,2,\ldots\ ;\ j \neq k. \tag{45}$$

В системе (45) индекс k фиксированный, поэтому при каждом $k = 1,2,\ldots$ система (45) представляет собой отдельную счётную систему дифференциальных уравнений относительно $\widetilde{q}_{1k}$, $\widetilde{q}_{2k},\ldots,\widetilde{q}_{k-1,k}$, $\widetilde{q}_{k+1,k}$, $\ldots$. Нетрудно видеть, что векторная запись такой системы имеет вид (8). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть для системы (4) выполнены соотношения (5) и при каждом $k = 1,2,\ldots$ система (45) удовлетворяет всем условиям леммы 3. Тогда существуют $\mu_3 \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_3(\mu) \in (0,\varepsilon_0)$ такие, что $\forall\ \mu \in (0,\mu_3)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3(\mu))$ существует преобразование вида (6), где $Q(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_2(m-1;\varepsilon_3(\mu);\theta)$, приводящее систему (4) к виду (7), где элементы диагональной матрицы $D(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_2(m-1;\varepsilon_3(\mu);\theta)$ определяются формулами (43).*

Заключение. Таким образом, для счётной линейной системы дифференциальных уравнений с коэффициентами, представимыми абсолютно и равномерно сходящимися рядами Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, установлены условия линейного преобразования с коэффициентами аналогичной структуры, приводящего эту систему к диагональному виду.

1. **Валеев К. Г., Жаутыков О. А.** Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 415 с.
2. **Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.** Счётные системы дифференциальных уравнений. – К.: ИМ НАН Украины, 1993. – 308 с.
3. **Miller R., Michel A.** Stability theory for countable infinite systems of differential equations // Tohoku Math. Journ. 32 (1980). – P. 155–168.
4. **Mursaleen M., Alotaibi A.** Infinite system of differential equations in some BK spaces // Hindawi Publishiny Corporation Abstract and Applied Analysis, Volume 2012, Article ID 863483, 20 p. doi: 10.1155/2012/863483
5. **Almanassra M.** The explicit solution to the countable systems of linear ordinary differential equations with constant coefficients // Mathematica Aeterna, Vol. 4, 2014, no.8, 827 – 837.
6. **Pylypenko A. Yu., Tantsyura M. V.** Limit theorem for countable systems of stochastic differential equations // Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 68, No. 10, March, 2017. – Pp. 1591 – 1619. doi: 10.1007/s11253-017-1314-x.
7. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
8. **Массера Х. Шеффер Х.** Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
9. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений и некоторых свойствах матрицы разделения // Укр. матем. журн. – 1955. – Т. 7, № 4. – С. 403–418.
10. **Костін В. В.** Деякі питання повного розподілу та асимптотичної поведінки розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь // Доповіді АН УРСР, сер. Ф. – 1967, № 7. – С. 593–595.
11. **Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.** Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – К.: Наук. думка, 1990. – 272 с.
12. **Амелькин К. В., Костин А. В.** О расщеплении линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2001. – Т. 6, вип. Фіз.-мат. науки. – С. 1–7.
13. **Щёголев С. А.** Резонансный случай полного разделения линейной дифференциальной системы с медленно меняющимися параметрами // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – К.: ІМ НАНУ, 1998. – Вип. 3. – С. 165–175.
14. **Щёголев С. А.** Полное разделение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами в особом случае // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і механ. – 2012. – Т. 17, вип. 1–2(13–14). – С. 151–167.
15. **Малкин И. Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
16. **Щёголев С. А., Джашитова В. В.** О сведении счётной линейной системы с коэффициентами осциллирующего типа к одному специальному виду в резонансном случае //Дослідження в математиці і механіці. – 2016. – Т. 21, вип. 1(27). – С. 85–91.
17. **Щёголев С. А., Ситник В. А.** О существовании и устойчивости решений специального вида квазилинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і механ. – 2010. – Т. 15, вип. 18. – С. 102–111.

18. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

Джашитова В. В.

Повне розщеплення зліченної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь у резонансному випадку

Резюме

Для зліченної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої зображувані у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою, отримано умови існування лінійного перетворення з коефіцієнтами аналогічної структури, що приводить цю систему до діагонального вигляду в резонансному випадку.
Ключові слова: зліченна система, розщеплення, ряди Фур'є .

Dzhashitova V.

The full separation of the countable linear homogeneous system of the differential equations at the resonance case

Summary

For the countable linear homogeneous system of the differential equations, the coefficients of whose are represented by a absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, the conditions of the existence of the linear transformation with the coefficients of the similar structure, which leads this system to a diagonal kind in resonance case, are obtained.
Key words: countable system, separation, Fourier-series.

References

1. Valeev, K. G., Zhautyikov, O. A. (1974) Beskonechnye sistemy differencial'nyh uravneniy [Infinite Systems of Differential Equations]. Moskow: Foreign literature.
2. Samoilenko, A., Teplinskyi, Yu. (1993). Schetnye sistemy differencial'nyh uravneniy [Countable Systems of Differential Equations]. Kiev: IM NAN Ukrainy.
3. Miller, R., Michel, A. (1980) Stability theory for countable infinite systems of differential equations. *Tohoku Math. Journ.*, P. 155–168.
4. Mursaleen, M., Alotaibi, A. (2012) Infinite system of differential equations in some BK spaces. *Hindawi Publishiny Corporation Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012, Article ID 863483, 20 p. doi: 10.1155/2012/863483
5. Almanassra, M. (2014) The explicit solution to the countable systems of linear ordinary differential equations with constant coefficients. *Mathematica Aeterna*, Vol. 4, no.8, 827 – 837.
6. Pylypenko, A. Yu., Tantsyura, M. V. (2017) Limit theorem for countable systems of stochastic differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 68, No. 10, March, pp. 1591–1619. doi: 10.1007/s11253-017-1314-x.
7. Daletskiy, Yu. Krein, M. (1970). Ustoichivost resheniy differencial'nyh uravneniy v banakhovom prostranstve [Stability of the Solutions of Differential Equations in the Banakh space]. Moskow: Nauka.

8. Massera, J, Schaffer, J. (1970). Lineinye differencial'nye uravnenia i funcional'nye prostranstva [Linear Differential Equations and Function Spaces]. Moskow: Mir.
9. Lyashchenko, N. Ya. (1955). Ob odnoy teoreme polnogo razdelenya lineynoj odnorodnoy sistemy diifferencial'nyh uravneniy i nekotoryh svoistvah matricy razdeleniya [On one theorem of full separation of the linear homogeneous system of differential equations oad some properties of matrix of separation]. *Ukr. Mat. Journ.* V. 7, No 4. pp. 403–418.
10. Kostin, V. V. (1967). Deyaki pytannya povnogo rozpodilu ta asymptotychnoyi povedinky rozv'yazkiv system zvychaynyh diferencial'nyh rivnyan' [Some problems of full separation and asymptotic behavior of solutions of systems of ordinary differential equations]. *Dopovidi AN URSR.* Ser. F, No 7. pp. 593–595.
11. Mitropol'skyi, Yu. A., Samoylenko, A. M., Kulik, V. L. (1990). Issledovanye dihotomyi lineynyh system differencial'nyh uravneniy s pomoshchyiu funkcyj Lyapunova [Researches of dichotomy of linear systems of differential equations by Lyapunov's-functions]. Kyiv: Nauk. dumka.
12. Amel'kin, K. V., Kostin, A. V. (2001). O rasshcheplenyi lineynyh odnorodnyh system obyiknovennyh differencial'nyh uravneniy [On separation of linear homogeneous systems of ordinary differential equations]. *Visnyk Odes'k. derzh. universytetu.* V. 6, Is. Phys.-math. pp. 1–7.
13. Shchogolev, S. A. (1998) Rezonansnyi sluchay polnogo razdeleniya lineynoy differencial'noy sistemy s medlenno menyajushchimisya parametramy [Resonance case of full separation of linear differential system with slowly varying parameters]. *Krajovi zadachi dlya differencial'nyh rivnyanj.* K.; IM NANU. Is. 3. pp. 165–175.
14. Shchogolev, S. A. (2012) Polnoye razdelenye lineynoy odnorodnoy systemy differencial'nyh uravneniy s oscillirujushchimi koefficientamy v osobom sluchaye [Full separation of the linear homogeneous system with oscillating coefficients in some spesial case]. *Visnyk Odes'k. Nats. Universytetu.* Matematyka i Mekhanika (Math. and Mech.) V. 17, Is. 1-2 (13-14). pp. 151–167.
15. Malkin, I. G. (1956). Nekotorye zadachi teoriy nelyneynyh kolebaniy [Some problems of theory of nonlinear oscillations]. Moskow: Gostehizdat.
16. Shchogolev, S. A., Dzhashitova, V. V. (2016). O svedenii schetnoy lineynoy sistemy s koefficientami oscillirujushchego typa k odnomu special'nomu vidu v rezonansnom sluchaye [On the reduction of the countable linear system with coefficients of the oscillating type to the some special kind at the resonance case]. *Researches in Mathematics and Mechanics.* V. 21, Is. 1(27). pp. 85–91.
17. Shchogolev, S. A. Sitnik, V. A. (2010). O sushchestvovanyi i ustojchivosti resheniy special'nogo vida kvazilineynogo differencial'nogo uravnenya v banahovom prostranstve [On existence and stability of solutions of special type of quasilinear differential equation in Banach space]. *Visnyk Odes'k. Nats. Universitetu.* Matematyka i Mekhanika (Math. and Mech.). V. 15, Is. 18. pp. 102–111.
18. Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. (1972). Elementy teoryi functsiy i functsional'nogo ahalyza [Elements of theory of functions and functional analysis]. Moskow.: Nauka.