

УДК 539.375

**І. П. Шацький, І. С. Курташ**

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

## ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ПЛАСТИНИ ІЗ ЗАПОВНЕНОЮ ЩІЛИНОЮ ПІД ДІЄЮ РОЗТЯГУ ТА ЗГИНУ

В рамках класичної двовимірної теорії пластин розглянуто задачу про розтяг та згин пружної пластини, послабленої вузькою прямолінійною щілиною, заповненою низькомодульним матеріалом. Для включення малої ширини прийнято гіпотезу пружного вінклерівського прошарку. Сформульовано крайову задачу для пари бігармонічних рівнянь з ускладненими крайовими умовами на розрізі. Побудовано аналітичний розв'язок сингулярних інтегродиференціальних рівнянь задачі для випадку еліптичної форми щілини та рівномірного комбінованого навантаження. Особлива увага приділяється питанню граничної рівноваги композиції. Розглянуто два механізми руйнування: розтріскування пластини біля вершин щілини та порушення цілісності заповнювача. Побудовано діаграми граничного стану пластини із заповненою щілиною за умов двопараметричного навантаження. Ключовими параметрами, які визначають успіх відновлення утримувальної здатності пластини з тріщиною для заданої траєкторії навантаження, є відносна жорсткість та відносна міцність включення.

*MSC: 74R10.*

*Ключові слова:* пластина, заповнена щілина, розтяг, згин, руйнування, гранична рівновага .

**Вступ.** Для сучасного матеріалознавства актуальною є проблема продовження терміну експлуатації відповідальних конструкцій. Продуктивним засобом відновлення пошкоджених виробів вважається ін'єкційна технологія заліковування тріщиноподібних дефектів [1]. Заповнення щілини іншим матеріалом може суттєво розвантажити області поблизу її вершин. Однак, заповнювач щілини, розвантажуючи її окіл, сам сприймає частину зовнішнього навантаження. Тому врахування концентрації напружень у підкріпленні є обов'язковим елементом прогнозування міцності відновлюваних композицій.

Рівновагу тіл із заповненими податливим матеріалом тріщинами часто розглядають в рамках моделі прошарку Вінклера і зводять задачу до розв'язання інтегродиференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень на розрізах. У такій постановці досліджено багато плоских та просторових задач [1]– [4]. Модель тріщини, частково залікованої неконтрастним матеріалом запропоновано в публікаціях [5, 6]. Стосовно задач деформування тонкостінних конструкцій відомі праці, зокрема [7]– [15], в яких розглядалися тонкостінні включення з довільною жорсткістю. У цій статті розглядаємо задачу про пружну та граничну рівновагу пластини, послабленої прямолінійною щілиною, заповненою низькомодульним матеріалом, за умов одночасної дії розтягуювального та згинального навантажень. Мета дослідження полягає у докладному аналізі граничної рівноваги композиції

з урахуванням міцності усіх компонент.

### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

**1. Постановка задачі.** Розглянемо безмежну пластину  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$ , яка послаблена наскрізною щілиною завдовжки  $2l$  та завширшки  $2b(x)$ . Щілина повністю заповнена ін'єкційним матеріалом, який за припущенням набагато податливіший від матеріалу пластини:  $E_0/E \ll 1$ . Дана композиція перебуває під дією мембранних сил розтягу  $n$  та згинальних моментів  $m$ , рівномірно розподілених на безмежності. Досліджуємо вплив низькомодульного заповнювача на пружну та граничну рівновагу пластини з тріщиною.

Аналіз проведемо в рамках класичних теорій плоского напруженого стану та згину тонких пластин. Для моделювання прошарку заповнювача використаємо модель Вінклера, за якою нормальні напруження у включенні пропорційні до стрибка нормальних переміщень на його берегах.

Крайова задача за умов симетрії об'єкта та навантаженнями відносно осі абсцис буде такою:

рівняння рівноваги:

$$\Delta\Delta\phi = 0, \quad \Delta\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \quad (1)$$

крайові умови на розрізі:

$$N_y = B_0 \frac{[u_y]}{2b(x)}, \quad M_y = -D_0 \frac{[\vartheta_y]}{2b(x)}, \quad y = 0, \quad x \in (-l, l); \quad (2)$$

умови на безмежності:

$$N_y = n, \quad N_x = N_{xy} = 0, \quad M_y = m, \quad M_x = M_{xy} = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут  $\phi, w$  – функція напружень і прогин пластини,  $\Delta$  – двовимірний оператор Лапласа,  $N_x, N_y, N_{xy}$  – мембранні сили,  $M_x, M_y, M_{xy}$  – згинальні та крутний моменти,  $[u_y]$  – розкриття тріщини в серединній поверхні пластини,  $[\vartheta_y]$  – розрив кута повороту нормалі на розрізі;  $B_0 = 2E_0h, D_0 = 2E_0h^3/3, E_0$  – модуль Юнга матеріалу заповнювача.

**2. Інтегродиференціальне рівняння задачі.** Для розв'язання задачі (1)–(3) використали метод сингулярних інтегральних рівнянь. Інтегральні вирази сил та моментів через похідні від стрибків переміщень та кута повороту нормалі мають вигляд [10, 11]:

$$N_y(x, 0) = n + \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{[u_y]'(\xi) d\xi}{\xi - x},$$

$$M_y(x, 0) = m - \frac{D(3 - 2\nu - \nu^2)}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{[\vartheta_y]'(\xi) d\xi}{\xi - x}, \quad (4)$$

де  $B = 2Eh, D = 2Eh^3/(3(1 - \nu^2)), E$  і  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Перші доданки у виразах (4) – відповідають напруженому станові бездефектної пластини, другі – показують вплив щілини.

Підставивши вираз (4) у відповідні умови (2), отримали сингулярні інтегро-диференціальні рівняння відносно розкриття тріщини та розриву кута повороту:

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{[u_y]'(\xi)d\xi}{\xi - x} - \frac{2E_0h}{2b(x)} [u_y](x) = -n,$$

$$\frac{D(3 - 2\nu - \nu^2)}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{[\vartheta_y]'(\xi)d\xi}{\xi - x} - \frac{2E_0h^3}{3 \cdot 2b(x)\vartheta_y}(x) = m, \quad x \in (-l, l). \quad (5)$$

Ці рівняння слід розв'язувати за додаткових умов на кінцях розрізу:

$$[u_y](\pm l) = 0, \quad [\vartheta_y](\pm l) = 0. \quad (6)$$

**3. Побудова розв'язку.** За довільної форми щілини  $b(x)$  розв'язок задачі (5)–(6) будується лише числовими методами. У цій статті скористаємось можливістю [17] знайти аналітичний розв'язок для випадку щілини спеціальної форми, а саме, еліптичної. Нехай

$$b(x) = \beta\sqrt{l^2 - x^2},$$

де  $\beta = b_0/l$ ,  $2b_0 = 2b(0)$  – максимальна ширина тріщини.

Тоді у разі рівномірних навантажень розв'язок задачі буде:

$$[u_y](x) = \frac{4}{B} \frac{n}{1 + \omega_1} \sqrt{l^2 - x^2},$$

$$[\vartheta_y](x) = -\frac{4}{D(3 - 2\nu - \nu^2)} \frac{m}{1 + \omega_3} \sqrt{l^2 - x^2}, \quad (7)$$

де  $\omega_1 = 2\varepsilon/\beta$ ,  $\omega_3 = 2\kappa\varepsilon/(3\beta)$  – ключові безрозмірні параметри задачі, а  $\varepsilon = E_0/E$ ,  $\kappa = 3(1 + \nu)/(3 + \nu)$ .

Коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів поблизу вершин щілини, нормовані як у праці [11], знайшли за формулами:

$$K_N = \frac{B}{4} \sqrt{l^2 - x^2} \lim_{x \rightarrow \pm l} \frac{[u_y](x)}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{n\sqrt{l}}{1 + \omega_1},$$

$$K_M = -\frac{D(3 - 2\nu - \nu^2)}{4} \sqrt{l^2 - x^2} \lim_{x \rightarrow \pm l} \frac{[\vartheta_y](x)}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{m\sqrt{l}}{1 + \omega_3}. \quad (8)$$

Підставляючи результат (7) в інтегральні подання (4), отримали також вирази для зусилля та моменту в заповнювачі:

$$N_y = \frac{n\omega_1}{1 + \omega_1}, \quad M_y = \frac{m\omega_3}{1 + \omega_3}. \quad (9)$$

Враховувши результати (8), (9), можна відновити розподіл характеристик напруженого стану по товщині пластини та включення відповідно:

$$k_1(z) = \frac{1}{2h} \left( K_N + \frac{3z}{h^2} K_M \right) = \frac{1}{2h} \left( \frac{n\sqrt{l}}{1 + \omega_1} + \frac{3z}{h^2} \frac{m\sqrt{l}}{1 + \omega_3} \right),$$

$$\sigma_y(z) = \frac{N_y}{2h} + \frac{3M_y}{2h^2}z = \frac{n\omega_1}{(1+\omega_1)}\frac{1}{2h} + \frac{m\omega_3}{(1+\omega_3)}\frac{3z}{2h^2}. \quad (10)$$

**4. Оцінка граничної рівноваги.** Розглядатимемо два механізми руйнування: розтріскування пластини у місцях високої концентрації напружень поблизу вершини тріщини та порушення цілісності ін'єкційного матеріалу, який бере на себе частину зовнішнього навантаження.

Для першого випадку скористаємось локальним силовим критерієм лінійної механіки руйнування [4]:

$$\max_z k_1(z) \leq \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi}}, \quad (11)$$

а для другого – застосуємо класичну теорію міцності заповнювача:

$$\max_z \sigma_y(z) \leq [\sigma_0]. \quad (12)$$

Тут  $K_{1c}$  – тріщиностійкість матеріалу пластини,  $[\sigma_0]$  – допустиме напруження для матеріалу заповнювача.

Знайдемо найбільші значення функцій у формулах (10):

$$\begin{aligned} \max_z k_1(z) &= k_1(h \operatorname{sgn} m) = \frac{1}{2h} \left( K_N + \frac{3|K_M|}{h} \right) = \left( \frac{n}{1+\omega_1} + \frac{3|m|}{h(1+\omega_3)} \right) \frac{\sqrt{l}}{2h}, \\ \max_z \sigma_y(z) &= \sigma_y(h \operatorname{sgn} m) = \frac{1}{2h} \left( \frac{n\omega_1}{1+\omega_1} + \frac{3|m|\omega_3}{h(1+\omega_3)} \right), \end{aligned}$$

і на підставі критеріїв (11), (12) дістанемо оцінки допустимих навантажень:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2h} \frac{1}{1+\omega_1} + \frac{3|m|}{2h^2} \frac{1}{1+\omega_3} &\leq \sigma^0, \\ \frac{n}{2h} \frac{\omega_1}{1+\omega_1} + \frac{3|m|}{2h^2} \frac{\omega_3}{1+\omega_3} &\leq [\sigma_0], \end{aligned} \quad (13)$$

за яких зберігається цілісність пластини та включення відповідно.

Тут  $\sigma^0 = K_{1c}/\sqrt{\pi l}$  – Гріффітсове напруження для розтягнутої пластини з наскрізною тріщиною завдовжки  $2l$ .

Запишемо нерівності (13) у безрозмірних змінних:

$$\frac{\sigma_t}{1+\omega_1} + \frac{|\sigma_b|}{1+\omega_3} \leq 1, \quad (14)$$

$$\frac{\sigma_t\omega_1}{1+\omega_1} + \frac{|\sigma_b|\omega_3}{1+\omega_3} \leq \eta, \quad (15)$$

де  $\sigma_t = n/(2h\sigma^0)$  – безрозмірне середнє напруження розтягу,  $\sigma_b = 3m/(2h^2\sigma^0)$  – безрозмірне напруження згину на лицьовій поверхні,  $\eta = [\sigma_0]/\sigma^0$  – відносний показник міцності заповнювача.

Таким чином, безпечна область обмежена прямими, що описуються рівняннями у канонічній формі:

$$\frac{\sigma_t}{1+\omega_1} + \frac{|\sigma_b|}{1+\omega_3} = 1, \quad (16)$$

$$\frac{\sigma_t}{\eta(1 + \omega_1^{-1})} + \frac{|\sigma_b|}{(1 + \omega_3^{-1})} = 1. \quad (17)$$

Для пластини з незаповненою тріщиною ( $\varepsilon = 0$ , а отже  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_3 = 0$ ) рівняння граничної прямої буде:

$$\sigma_t + |\sigma_b| = 1. \quad (18)$$

**5. Аналіз результатів.** Проаналізуємо взаємне розташування ліній (16), (17) та (18) залежно від значень параметрів  $\omega$  та  $\eta$ . Результати аналізу проілюстровані графіками (рис. 1), побудованими для  $\omega = 0,5$ ,  $\nu = 1/3$ ,  $\kappa = 1,2$ .

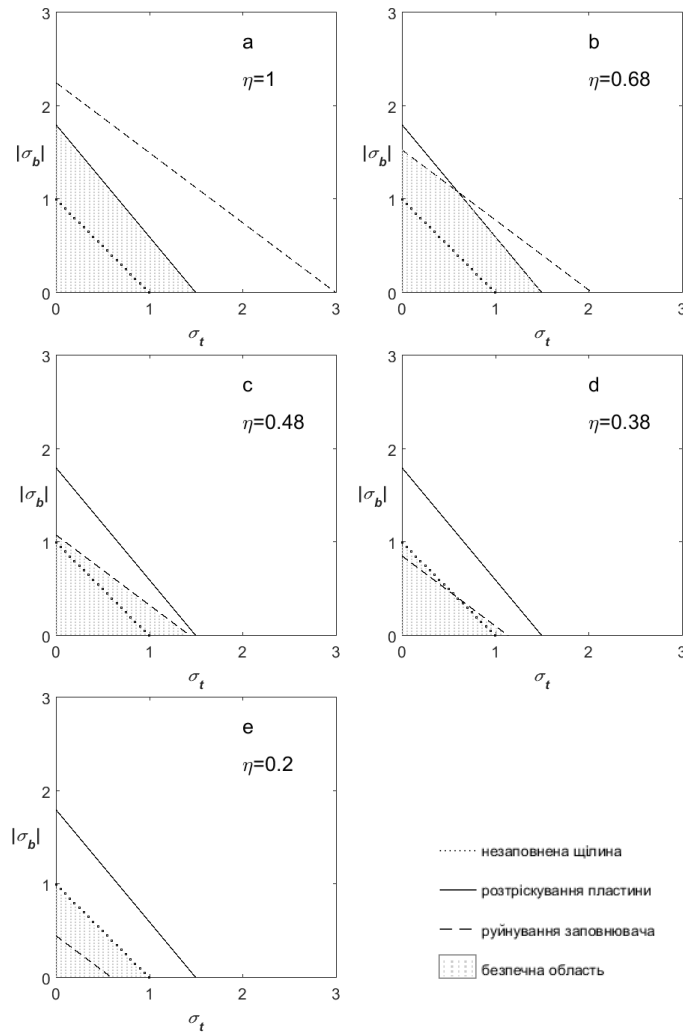


Рис. 1. Діаграми граничної рівноваги пластини із заповненою щілиною

При  $\eta > \omega_3$  лінія (17) розташована ззовні лінії (16) (рис. a), отже безпечна

область описується нерівністю (14). Це означає, що композиція руйнується шляхом розтріскування пластини.

При  $\eta < \omega_1$  пряма (17) лежить ближче до початку координат (рис. *c, d, e*) – спершу руйнується включення.

Проміжний варіант  $\omega_1 < \eta < \omega_3$  дає змішаний тип руйнування (рис. *b*), який залежить від параметра траєкторії простого навантаження  $\alpha = \sigma_b/\sigma_t$ .

Якщо переважає згин:

$$|\alpha| > \alpha_1 = \frac{1 + \omega_3 \eta - \omega_1}{1 + \omega_1 \omega_3 - \eta},$$

то спершу руйнується включення, якщо ж переважає розтяг:  $|\alpha| \leq \alpha_1$ , то розтріскується пластинка.

Розглянемо ще більш детально ситуацію  $\eta < \omega_1$  (рис. *c, d, e*). Якщо  $\omega_3/(1 + \omega_3) \leq \eta \leq \omega_1$ , то лінія (17) лежить ззовні лінії (18) (рис. *c*), і ефект підкріплення досягається для будь-яких  $\alpha$ .

У разі  $\omega_1/(1 + \omega_1) \leq \eta \leq \omega_3/(1 + \omega_3)$  (рис. *d*) для переважного згину, коли

$$|\alpha| \geq \alpha_2 = \frac{\eta - \omega_1/(1 + \omega_1)}{\omega_3/(1 + \omega_3) - \eta},$$

немає виграшу у підкріпленні (включення руйнується при менших навантаженнях, ніж пластинка з незаповненою тріщиною), а за переважного розтягу ( $|\alpha| \leq \alpha_2$ ) незначне підвищення несучої здатності присутнє.

Нарешті, для надто слабких заповнювачів, коли  $\eta < \omega_3/(1 + \omega_3)$ , лінія (17) лежить найближче до початку координат (рис. *e*), отже, ніякого позитивного ефекту від підкріплення не спостерігається за будь-якої траєкторії навантаження.

**Висновки.** Розглянута в статті модель заповненої щілини дозволяє аналітично оцінювати результати відновлення дефектних пластинчастих конструкцій за умов комбінованого розтягу та згину. Ключовими параметрами, які визначають ефективність підкріплення пластинки з тріщиною для заданої траєкторії навантаження, є показники відносної жорсткості  $\omega$  та відносної міцності  $\eta$  заповнювача.

1. **Marukha V. I.** Injection technologies for the repair of damaged concrete structures / V. I. Marukha, V. V. Panasyuk, V. P. Sylovanyuk. – New York: Springer, 2014. – 230 p.
2. **Куршин Л. М.** Напряжения в плоскости с заполненной щелью / Л. М. Куршин, И. Д. Суздальницкий // Прикл. механика. – 1973. – Т. 9, вып. 10. – С. 62–68.
3. **Соткилава О. В.** Некоторые задачи неоднородной теории упругости / О. В. Соткилава, Г. П. Черепанов // Прикл. математика и механика. – 1974. – Т. 38, вып. 3. – С. 537–550.
4. **Панасюк В. В.** Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями / В. В. Панасюк, М. М. Стадник, В. П. Силованюк – Киев: Наук. думка, 1986. – 215 с.

5. **Шацький І. П.** Задачі згину пластини з частково залікованою тріщиною / І. П. Шацький // Вісник Донец. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2014. – № 1. – С. 91–93.
6. **Шацький І. П.** Гранична рівновага пластини з частково залікованою тріщиною / І. П. Шацький // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 25–31.
7. **Хачикян А. С.** Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины / А. С. Хачикян // Изв. АН АрмССР. Механика. 1970. – Т. 23, № 3. – С. 14–21.
8. **Грилицкий Д. В.** Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением / Д. В. Грилицкий, Г. Т. Сулим // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 41–48.
9. **Драган М. С.** Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением / М. С. Драган, В. К. Опанасович // Прикл. математика и механика. – 1979. – Т. 43, № 2. – С. 342–348.
10. **Грилицкий Д. В.** Изгиб плиты с прямолинейным тонкостенным включением / Д. В. Грилицкий, М. С. Драган, В. К. Опанасович // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. – 1979. – № 3. – С. 83–88.
11. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
12. **Александров В. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян – М.: Наука, 1983. – 488 с.
13. **Грилицкий Д. В.** Напряженное состояние пологой оболочки с тонким упругим включением / Д. В. Грилицкий, В. К. Опанасович, И. П. Шацкий // В кн.: XIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Ч. II. – Таллин: Таллин. политехн. ин-т, 1983. – С. 23–28.
14. **Стаценко Л. И.** Напряженное состояние изотропной оболочки с упругим включением / Л. И. Стаценко, В. П. Шевченко // Теорет. и прикл. механика. – 1990. – Вып. 21. – С. 76–80.
15. **Сулим Г. Т.** Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів: Досл.-видавн. центр НТШ. – 2007. – 716 с.
16. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
17. **Векуа Н. П.** Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи / Н. П. Векуа. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 252 с.
18. **Осадчук В. А.** Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

*Шацкий И. П., Курташ И. С.*

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНЫ С ЗАПОЛНЕННОЙ ЩЕЛЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСТЯЖЕНИЯ И ИЗГИБА

*Резюме*

В рамках классической двухмерной теории пластин рассмотрена задача о растяжении и изгибе упругой пластины, ослабленной узкой прямолинейной щелью, заполненной низкокомодульным материалом. Для включения малой ширины принята гипотеза упругой винклеровской прослойки. Сформулирована краевая задача для пары бигармонических

уравнений с усложненными краевыми условиями на разрезе. Построено аналитическое решение сингулярных интегродифференциальных уравнений задачи для случая эллиптической формы щели и равномерной комбинированной нагрузки. Особенное внимание уделяется вопросу предельного равновесия композиции.. Рассмотрены два механизма разрушения: растрескивание пластины возле вершин щели и нарушение целостности заполнителя. Построены диаграммы предельного равновесия пластины с заполненной щелью в условиях двухпараметрического нагружения. Ключевыми параметрами, определяющими успех восстановления несущей способности пластины с трещиной для заданной траектории нагружения, являются относительная жесткость и относительная прочность включения.

*Ключевые слова:* пластина, заполненная щель, растяжение, изгиб, разрушение, предельное равновесие .

*Shatskyi I. P., Kurtash I. S.*

LIMITING EQUILIBRIUM OF PLATE WITH FILLED SLIT UNDER TENSION AND BENDING

*Summary*

The problem of tension and bending of an elastic plate weakened by narrow rectilinear slit filled with low-modulus material is considered within framework the classical two-dimensional plates theory. For the inclusion of narrow width the hypothesis of elastic Winkler's layer is accepted. The boundary problem for the pair of biharmonic equations with complicated boundary conditions on the cut is formulated. The analytical solution of singular integrodifferential equations of the problem is built for a case of elliptical form of slit and uniform combined load. Special attention is paid to the issue of limited equilibrium of composition. The two mechanisms of fracture are considered: cracking of the plate near the peak of a slit and breach of filler integrity. The diagrams of limiting equilibrium of plate with filled slit are built in conditions of two-parametric loading. The key parameters that determine the success of wearing the bearing capacity of the cracked plate for a given loading trajectory are the relative stiffness and relative strength of the filler.

*Key words:* plate, filled slit, tension, bending, fracture, limiting equilibrium.

## REFERENCES

1. Marukha, V. I., Panasyuk, V. V. and Sylovanyuk, V. P. (2014). *Injection technologies for the repair of damaged concrete structures*. Springer, New York, USA, 230 p.
2. Kurshin, L. M. and Suzdal'nitskii, I. D. (1973). Stresses in a plane with a filled crack. *Sov. Appl. Mech.*, Vol. 9, Issue 10, P. 1092–1097.
3. Sotkilava, O. V. and Cherepanov, G. P. (1974). Some problems of the nonhomogeneous elasticity theory. *J. Appl. Math. and Mech.*, Vol. 38, Issue 3, P. 499–511.
4. Panasyuk, V. V., Stadnik, M.M. and Silovanyuk V. P. (1986). *Kontsentratsiya napryazhenii v trekhmernykh telakh s tonkimi vklyuchenyami [Stress concentration in three-dimensional bodies with thin inclusion]*. Kiev: Nauk. dumka, 215 p.
5. Shatsky, I. P (2014). Zadachi zhynu plastyny z chastkovo zalikovanoyu trishchynoyu [Problems of bending of plate with partially healed crack]. *Visnyk Donez. naz. un-tu. Ser. A. Pryrodnychi nauky*, № 1, P. 91–93.
6. Shats'kyi, I. P (2015). Limiting equilibrium of a plate with partially healed crack. *Mater. Sci.*, vol. 51, № 3, P. 322–330.



7. Khachikyan, A. S. (1970). Ravnovesie ploskosti s tonkostennym uprugim vklucheniem konechnoi dlinny [Equilibrium of plane with finite length thin-walled elastic inclusion]. *Izv. AN ArmSSR. Mekhanika*, Vol. 23, № 3, P. 14–21.
8. Grilitskii, D. V. and Sulim, G. T. (1975). Uprugie napryazhenia v ploskosti s tonkostennym vklyucheniem [Elastic stresses in a surface with thin-walled inclusion]. *Mathem. Methody i Phis.-Mekh. Polia*, Vol. 1, P. 41–48.
9. Dragan, M. S. and Opanasovich, V. K. (1979). State of stress of a strip (beam) with a rectilinear thin-walled inclusion. *J. of Appl Mathem. and Mekh.*, Vol. 43, Issue 2, P. 367–373.
10. Grilitskii, D. V., Dragan, M. S. and Opanasovich, V. K. (1979). Bending of a plate with a rectilinear thin-walled inclusion. *Isv. AN SSSR. Mekhanica. Tverd. Tela*, № 3, P. 83–88.
11. Popov, G. V. (1982). *Kontsentratsia uprugikh napryazhenii vozle shtampov, razrezov, tokikh vklyuchenii i podkrepleniï [Concentration of elastic stresses near stamps, cuts, thin inclusions and reinforcements]*. Moscow: Nauka, 342 p.
12. Aleksandrov, V. M. and Mkhitarjan, S. M. (1983). *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiami i prosloikami [Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers]*. Moscow: Nauka, 488 p.
13. Grilitskii, D. V., Opanasovich, V. K. and Shatskii, I. P. (1983). Napryazhennoe sostoyanie pologoï obolochki s tonkim uprugim vklyucheniem [Stressed state of shallow shell with thin elastic inclusion]. *XIII Vses. conf. po teorii obolochek i plastin. Part II*. Tallin: Tallin TU, P. 23–28.
14. Statsenko, L. I. and Shevchenko, V. P. (1994). Stress state of an isotropic shell with an elastic inclusion. *J. Mathem. Sci.*, Vol. 68, Issue 5, P 690–692.
15. Sulym, H. T. (2007). *Osnovy matematychnoi teorii termopruznoi rivnovahy deformivnykh tverdykh til z tonkymy vkluchenniamy [Basis of mathematical theory of thermoelastic equilibrium of solids with thin inclusions]*. Lviv: Dosl.-vydavn. tsentr NTSh, 716 p.
16. Savruk, M. P. (1981). *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami [Two-dimensional problems of elasticity for cracked bodies]*. Kiev: Nauk. dumka, 324 p.
17. Vekua, N. P. (1950). *Sistemy singularnykh integralnykh uravnenii i nekotorye granichnye zadachi [Systems of singular integral equations and some boundary problems]*. Moscow: GITTL, 252 p.
18. Osadchuk, V. A. (1985). *Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie i predelnoe ravnovesie obolochek s rasresami [Stress-strain state and limit equilibrium of shells with the cuts]*. Kiev: Nauk. dumka, 224 p.