УДК 517.925

А. Г. Черникова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БЫСТРО МЕНЯЮЩЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В работе для двучленного неавтономного дифференциального уравнения второго порядка с быстро меняющейся при $y \to Y_0$ нелинейностью, где Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$ исследуется вопрос о существовании и асимптотическом поведении при $t \uparrow \omega$ $(\omega \leqslant +\infty)$ $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$- решений в случае, когда $\lambda_0 = 1$. В этом случае каждое такое решение и его производная первого порядка являются быстро меняющимися функциями при $t \uparrow \omega$. Получены новые результаты о необходимых и достаточных условиях существования $P_\omega(Y_0,1)$– решений у рассматриваемого класса существенно нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а также об асимптотическом поведении при $t \uparrow \omega$ таких решений и их производных первого порядка. Эти результаты существенно дополняют исследования, проводимые в данном направлении.
MSC: 34E05, 34E10, 26A12.
Ключевые слова: правильно меняющиеся функции, быстро меняющиеся функции, функции из класса Г*, существенно нелинейные дифференциальные уравнения,* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-решения, условия существования, асимптотическое поведение .*

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\longrightarrow]0, +\infty[$- непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$\varphi'(y) \neq 0 \text{ при } y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & +\infty, \end{cases} \quad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1, \tag{2}$$

Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0}- некоторая односторонняя окрестность Y_0.

Из условий (2) непосредственно вытекает, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \pm\infty, \tag{3}$$

В силу (2) и (3) функция φ и ее производная первого порядка являются (см. монографию М.Марича [1], Гл.3, §3.4, Леммы 3.2, 3.3, С. 91-92) быстро меняющимися при $y \to Y_0$.

Получена 10.09.2017

Определение 1. *Решение y дифференциального уравнения* (1) *называется $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$– решением, где $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ и удовлетворяет следующим условиям*

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0,\omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \textit{либо} & 0, \\ \textit{либо} & \pm\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

В работе [2] были установлены две теоремы о существовании и асимптотике $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$- решений уравнения (1) в особом случае, когда $\lambda_0 = 1$. В этом случае такие решения и их производные первого порядка являются быстроменяющимися функциями при $t \uparrow \omega$.

В настоящей работе при некоторых вполне естественных ограничениях на коэффициент p эти две теоремы будут дополнены новыми утверждениями, позволяющими снять некоторые из жестких условий, которые использовались в [2] при доказательстве фактического существования $P_\omega(Y_0,1)$- решений с найденными асимптотическими представлениями.

Основные результаты. Введем необходимые для дальнейшего вспомогательные обозначения. Неограничивая общности будем считать, что

$$\Delta_{Y_0} = \begin{cases} [y_0,Y_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \quad \text{левая окрестность} \quad Y_0, \\ ]Y_0,y_0], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \quad \text{правая окрестность} \quad Y_0, \end{cases}$$

где $y_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $|y_0| < 1$ при $Y_0 = 0$ и $y_0 > 1$ $(y_0 < -1)$ при $Y_0 = +\infty$ (при $Y_0 = -\infty$).

Далее, положим

$$\mu_0 = \operatorname{sign} \varphi'(y), \quad \nu_0 = \operatorname{sign} y_0, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0,Y_0[, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0,y_0], \end{cases}$$

и введем следующие функции

$$J_{10}(t) = \int_{A_{10}}^{t} p_0^{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau, \quad \Phi_1(y) = \int_{B_1}^{y} \frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{2}}(s)},$$

где $p_0(t) \sim p(t)$ при $t \uparrow \omega$,

$$A_{10} = \begin{cases} \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega p_0^{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau < +\infty, \\ a, & \text{если} \quad \int_a^\omega p_0^{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau = +\infty, \end{cases} \qquad B_1 = \begin{cases} Y_0, & \text{если} \quad \int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{2}}(s)} = \text{const}, \\ y_0, & \text{если} \quad \int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{2}}(s)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Учитывая определение $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$–решения дифференциального уравнения (1), заметим, что числа ν_0, ν_1 и α_0 определяют знаки любого $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$–решения, его первой и второй производных (соответственно) в некоторой левой окрестности ω. При этом ясно, что условия

$$\nu_0\nu_1 < 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0, \quad \nu_0\nu_1 > 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty,$$

и

$$\nu_1\alpha_0 < 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = 0, \quad \nu_1\alpha_0 > 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \pm\infty,$$

являются необходимыми для существования таких решений.

Теперь укажем на некоторые свойства функции Φ_1. Она сохраняет знак на промежутке Δ_{y_0}, стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $y \to Y_0$ и является возрастающей на Δ_{Y_0}, поскольку на этом промежутке $\Phi_1'(y) = |y|^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{1}{2}}(y) > 0$. Поэтому для нее существует обратная функция $\Phi_1^{-1} : \Delta_{Z_0} \longrightarrow \Delta_{Y_0}$, где в силу второго из условий (2) и монотонного возрастания Φ_1^{-1}

$$\Delta_{Z_0} = \begin{cases} [z_0, Z_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ ]Z_0, z_0], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0], \end{cases} \tag{4}$$

$$Z_0 = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi_1(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & +\infty, \end{cases} \qquad z_0 = \Phi_1(y_0). \tag{5}$$

Заметим, что

$$\left(\frac{\varphi^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi'(y)} \right)' = \frac{1}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(y)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(y)} - \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{\varphi'^2(y)} \right].$$

Отсюда с учетом условий (2) и (3) получим соотношение

$$\left(\frac{\varphi^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi'(y)} \right)' = \frac{1}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(y)} \left[-\frac{1}{2} + o(1) \right] \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от y_0 до y и учитывая правило выбора предела интегрирования B_1 в функции Φ_1, приходим к выводу, что

$$\Phi_1(y) = -\frac{2\varphi^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi'(y)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \tag{6}$$

Отсюда с учетом знака φ' также следует, что

$$\operatorname{sign}\Phi_1(y) = -\mu_0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}. \tag{7}$$

В силу (6) и (3) также имеем

$$\frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)} = \frac{|y|^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{1}{2}}(y)}{\Phi_1(y)} \sim -\frac{\varphi'(y)}{2\varphi(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0, \tag{8}$$

$$\frac{\Phi_1''(y)\Phi_1(y)}{\Phi_1'^2(y)} = -\frac{1}{2}\frac{|y|^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{3}{2}}\varphi'(y)\left[\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(y)} + 1\right]\Phi_1(y)}{|y|^{-1}\varphi^{-1}(y)} \sim 1 \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{9}$$

Так как

$$\lim_{z\to Z_0}\frac{z\left(\varphi(\Phi_1^{-1}(z))\right)'}{\varphi(\Phi_1(z))}=\lim_{z\to Z_0}\frac{z\varphi'(\Phi_1^{-1}(z)))|\Phi_1(z)|^{\frac12}\varphi^{\frac12}(\Phi_1^{-1}(z))}{\varphi(\Phi_1^{-1}(z))}=$$

$$=\lim_{y\to Y_0}\frac{\Phi_1(y)\varphi'(y)|y|^{\frac12}}{\varphi^{\frac12}(y)}=-2.$$

то функция $\varphi(\Phi_1^{-1}(z))$ является правильно меняющейся функцией порядка -2 при $z\to Z_0$.

Кроме указанных выше обозначений введем также вспомогательные функции:

$$H_{10}(t)=\frac{\Phi_1^{-1}(\nu_1J_{10}(t))\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1J_{10}(t))\right)}{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1J_{10}(t))\right)},$$

$$q_{10}(t)=\frac{\alpha_0\nu_1J_{20}(t)}{p_0^{\frac12}(t)|\Phi_1^{-1}(\nu_1J_{10}(t))|^{\frac12}\varphi^{\frac12}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1J_{10}(t))\right)},$$

$$q_{20}(t)=\frac{\pi_\omega(t)p_0^{\frac12}(t)\varphi^{\frac12}\left(\nu_1J_{10}(t)\right)}{\left|\Phi^{-1}\left(\nu_1J_{10}(t)\right)\right|^{\frac12}},\quad \pi_\omega(t)=\begin{cases} t, & \text{если}\quad \omega=+\infty,\\ t-\omega, & \text{если}\quad \omega<+\infty,\end{cases}$$

$$J_{20}(t)=\int\limits_{A_{20}}^{t}p_0(\tau)\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1J_{10}(\tau))\right)\,d\tau,$$

где

$$A_{20}=\begin{cases} t_0, & \text{если}\quad \int\limits_{t_0}^{\omega}p_0(\tau)\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1J_{10}(\tau))\right)\,d\tau=+\infty,\\ \omega, & \text{если}\quad \int\limits_{t_0}^{\omega}p_0(\tau)\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1J_{10}(\tau))\right)\,d\tau<+\infty,\end{cases}\qquad t_0\in[a,\omega].$$

Здесь функции H_{10}, q_{10}, J_{10} и J_{20} получены из функций H_1, q_1, J_1 и J_2 из работы [2] заменой в них функции p на p_0.

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2.1 из работы [2] и учитывая, что для $P_\omega(Y_0,1)$- решения уравнения (1) $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}=\pm\infty$, легко сначала убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть $p(t)\sim p_0(t)$ при $t\uparrow\omega$, где $p_0:[a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ – непрерывная функция. Тогда для существования у дифференциального уравнения* (1) *$P_\omega(Y_0,1)$– решений, необходимо чтобы соблюдались условия*

$$\alpha_0\nu_0>0,\quad \mu_0\nu_1J_{10}(t)<0\quad \textit{при}\quad t\in]a,\omega[,\tag{10}$$

$$\nu_1\lim_{t\uparrow\omega}J_{10}(t)=Z_0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_{10}'(t)}{J_{10}(t)}=\pm\infty,\tag{11}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}q_{10}(t)=1,\quad \lim_{t\uparrow\omega}q_{20}(t)=\pm\infty.\tag{12}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t)=\Phi_1^{-1}\left(\nu_1 J_{10}(t)\right)\left[1+\frac{o(1)}{H_{10}(t)}\right] \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{13}$$

$$y'(t)=\nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t)\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}}[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{14}$$

Теперь установим наиболее существенные дополнения к теореме 2.2 из работы [2].

Теорема 2. *Пусть*

$$p(t)=p_0(t)[1+r(t)], \quad \lim_{t\uparrow\omega} r(t)=0, \tag{15}$$

где $p_0:[a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ *– непрерывно дифференцируемая функция и* $r:[a,\omega[\longrightarrow]-1,+\infty[$ *– непрерывная функция. Пусть, кроме того, выполняются условия* (10), (11), *первое из условий* (12) *и существуют конечные или равные* $\pm\infty$ *пределы*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{q_{10}(t)J_{20}(t)}{J'_{20}(t)}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|}. \tag{16}$$

Тогда: 1) если $\alpha_0\mu_0>0$, *то у дифференциального уравнения* (1) *существует однопараметрическое семейство* $P_\omega(Y_0,1)$*– решений с представлениями* (13), (14), *причем таких, производная которых удовлетворяет асимптотическому соотношению*

$$y'(t)=J_{20}(t)\left[\frac{1}{q_{10}(t)}+o\left(|H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega; \tag{17}$$

2) если $\alpha_0\mu_0<0$ *и соблюдаются условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left[r(t)+\frac{q'_{10}(t)J_{20}(t)}{q_{10}(t)J'_{20}(t)}\right]\left(\int_{t_0}^{t}\frac{J'_{20}(\tau)|H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_{20}(\tau)}\right)^2=0, \tag{18}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} r(t)\int_{t_0}^{t}\frac{J'_{20}(\tau)|H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_{20}(\tau)}=0, \tag{19}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}[1-q_{10}(t)]\int_{t_0}^{t}\frac{J'_{20}(\tau)|H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_{20}(\tau)}=0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\int_{t_0}^{t}\frac{J'_{20}(\tau)|H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_{20}(\tau)}}{|H_1(t)|^{\frac{1}{2}}}=0, \tag{20}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega}|H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{J'_{20}(\tau)|H_{10}(t)(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_{20}(\tau)}\right)\frac{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left|\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^2}\Bigg|_{y=\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))}=0, \tag{21}$$

где t_0 некоторое число из промежутка $[a,\omega[$, то уравнение (1) имеет по крайней мере одно $P_\omega(Y_0,1)$– решение, допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$y(t)=\Phi_1^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\left[1+\left(H(t)\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J_2'(\tau)|H(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_2(\tau)}\right)^{-1}o(1)\right], \tag{22}$$

$$y'(t)=J_{20}(t)\left[\frac{1}{q_{10}(t)}+|H_1(t)|^{-\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J_2'(\tau)|H_1(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_2(\tau)}\right)^{-1}o(1)\right]. \tag{23}$$

Доказательство. . В [2] при доказательстве теоремы 2.2 было установлено, что в случае существования конечного или равного $\pm\infty$ второго из пределов (16) этим пределом может быть только ноль. Покажем, что первый из этих пределов также равен нулю. Действительно, если бы этот предел был отличен от нуля, то имели бы равенство

$$q_{10}'(t)=\frac{\gamma(t)J_{20}'(t)}{J_{20}(t)},$$

где функция γ непрерывна на некотором промежутке $[t_0,\omega[\subset]a,\omega[$ и такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\gamma(t)=\begin{cases}\text{либо} & const\neq 0,\\ \text{либо} & \pm\infty.\end{cases}$$

Интегрируя это равенство на промежутке от t_0 до t и учитывая, что $\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J_{20}'(\tau)d\tau}{J_{02}(\tau)}=\ln\left|\frac{J_{20}(t)}{J_{02}(t_0)}\right|\longrightarrow\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$, пришли бы к заключению, что

$$q_{10}(t)\longrightarrow\pm\infty \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Однако, этого быть не может, так как выполняется первое из условий (12).

Значит,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{q_{10}(t)J_{02}(t)}{J_{02}'(t)}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|}=0. \tag{24}$$

Кроме того, в силу второго из неравенств (10), первого из условий (11) и (4), (5), (7) и (3) существует число $t_0\in[a,\omega[$ такое, что $\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\in\Delta_{Y_0}$ при $t\in[t_0,\omega[$, и

$$\lim_{t\uparrow\omega}\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))=Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}H_{10}(t)=\pm\infty.$$

Теперь с использованием функций H_{10}, q_{10}, J_{10} и J_{20} скорректируем схему доказательства теоремы 2.2 из работы [2] таким образом, чтобы снять наиболее жесткие из ее условий.

Сначала диференциальное уравнение (1) с помощью преобразования

$$y(t)=\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))+\frac{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}y_1(t),\quad y'(t)=\alpha_0 J_{20}(t)[1+y_2(t)],\quad (25)$$

точно также, как при доказательстве теоремы 2.2 из [2], сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'=\frac{\nu_1 p_0^{\frac12}(t)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac12}\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}{\varphi^{\frac12}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}\left[-1+q_{10}(t)+h_{10}(t)y_1+q_{10}(t)y_2\right], \\ \\ y_2'=\frac{J_{20}'(t)}{J_{20}(t)}\left[r(t)+(1+r(t))y_1-y_2+R(t,y_1)\right], \end{cases}\quad (26)$$

где

$$h_{10}(t)=q_{10}(t)\left.\frac{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\right|_{y=\Phi^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))}$$

и функция $R(t,y_1)$ такова, что для что для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta\in]0,1[$ и $t_1\in[t_0,\omega[$ такие, что

$$|R(t,y_1)|\leqslant(1+\varepsilon)|y_1|^2\quad \text{при}\quad t\in[t_1,\omega[\quad \text{и}\quad y_1\in D_{1\delta}=\{y_1: |y_1|\leqslant\delta\}.\quad (27)$$

Выбрав произвольным образом число $\varepsilon>0$, далее систему уравнений (26) рассмотрим на множестве

$$\Omega=[t_1,\omega[\times D_{1\delta}\times D_{2\delta},\quad \text{где}\quad D_{i\delta}=\{y_i: |y_i|\leqslant\delta\}\quad (i=1,2).$$

Чтобы доказать существование у дифференциального уравнения (1) решений, допускающих при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (13), (14), достаточно в силу замен (25) и первого из условий (12) установить, что у системы дифференциальных уравнений (26) существуют решения, стремящиеся к нулю при $t\uparrow\omega$. Это можно осуществить, в частности, с использованием известных результатов, полученных в работах [3], [4]. Чтобы воспользоваться этими результатами требуется довести систему (26) с помощью дополнительных преобразований до вида, допускающего их применения. При этом следует позаботиться о возможности снятия указанных ранее жестких ограничений в теореме 2.2, установленной ранее в [2].

Сначала применим к системе (26), преобразование

$$y_1(t)=x_1(t),\quad y_2(t)=-1+\frac{1}{q_{10}(t)}+x_2(t),\quad (28)$$

суть которого состоит в том, чтобы убрать в первом уравнении системы неоднородное слагаемое. В результате этого преобразования получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1'=\frac{\nu_1 p_0^{\frac12}(t)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac12}\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}{\varphi^{\frac12}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}\left[h_{10}(t)x_1+q_{10}(t)x_2\right], \\ \\ x_2'=\frac{J_{20}'(t)}{J_{20}(t)}\left[r(t)+\frac{q_{10}'(t)J_{20}(t)}{q_{10}^2(t)J_{10}'(t)}+(1+r(t))y_1-y_2+R(t,y_1)\right], \end{cases}$$

Далее, применяя дополнительное преобразование

$$x_1(t) = v_1(t), \quad x_2(t) = |H_0(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t), \tag{29}$$

приведем эту систему к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_1' = \frac{\nu_1 J_{10}'(t)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}{\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)} |H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}} \left[h_{10}(t)|H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}} v_1 + q_{10}(t) v_2\right], \\ v_2'(t) = \frac{J_{20}'(t)}{J_{20}(t)} |H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}} \left[r(t) + \frac{q_{10}'(t) J_{20}(t)}{q_{10}^2(t) J_{20}'(t)} + (1 + r(t)) v_1 + \right. \\ \qquad \left. + \left(\frac{1}{2} \frac{\nu_0 \mu_0 H_{10}'(t) J_{20}(t)}{J_{20}'(t)|H_{10}(t)|^{\frac{3}{2}}} - |H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}}\right) v_2 + R(t, v_1)\right]. \end{cases}$$

Обозначив через $\beta_0(t)$ отношение множителей, которые стоят перед квадратными скобнами в уравнениях этой системы и учитывая, что

$$\frac{\nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right) J_{20}(t)}{\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)) J_{20}'(t)\right)} =$$

$$= \frac{\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)) \varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)} \cdot \frac{\alpha_0 \nu_1 J_{20}(t)}{p_0^{\frac{1}{2}}(t) \nu_1 |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)} =$$

$$= H_{10}(t) q_{10}(t) \sim H_{10}(t) \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

находим

$$\beta_0(t) = \frac{\nu_1 J_{10}'(t)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right) J_{20}(t)}{\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right) J_{20}'(t)} |H_{10}(t)|^{-1} \sim$$

$$\sim \operatorname{sign} H_{10}(t) = \nu_0 \mu_0 \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{30}$$

Кроме того, нетрудно проверить, что здесь

$$\frac{H_{10}'(t) J_{20}(t)}{J_{20}'(t)|H_{10}(t)|^{\frac{3}{2}}} = q_{10}(t)\left[\mu_0 |H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}} + h_{10}(t) H_{10}^{\frac{1}{2}}(t)\right]. \tag{31}$$

Наконец, сделав в последней системе дифференциальных уравнений замену независимой переменной, полагая

$$x = \int_{t_1}^{t} \frac{J_{20}'(\tau)|H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{J_{20}(\tau)}, \quad v_1(t) = z_1(\tau), \quad v_2(t) = z_2(\tau), \tag{32}$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = c_{11}(x) z_1 + c_{12}(x) z_2, \\ z_2' = f(x) + c_{21}(x) z_1 + c_{22}(x) z_2 + Z(x, z_1), \end{cases} \tag{33}$$

в которой

$$f(x(t)) = \alpha_0 \nu_1 \left[r(t) + \frac{q_{10}'(t) J_{20}(t)}{q_{10}^2(t) J_{20}'(t)}\right], \quad c_{11}(x(t)) = \alpha_0 \nu_1 \beta_0(t) h_{10}(t) |H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}},$$

$$c_{12}(x(t)) = \alpha_0\nu_1\beta_0(t)q_{10}(t), \quad c_{21}(x) = \alpha_0\nu_1[1 + r(t)],$$

$$c_{22}(x(t)) = \alpha_0\nu_1\left(\frac{1}{2}\frac{\nu_0\mu_0 H'_{10}(t)J_{20}(t)}{J'_{20}(t)|H_{10}(t)|^{\frac{3}{2}}} - |H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}}\right), \quad Z(x(t),z_1) = \alpha_0\nu_1 R(t,v_1).$$

Так как $x'(t) > 0$ при $t \in [t_1,\omega[$ и $x(t) \longrightarrow +\infty$ при $t \uparrow \omega$, то данная система заданна на множестве $[0, +\infty[\times D_{1\delta} \times D_{2\delta}$, причем в ней в силу (3), (15), (24), (30), (31) и первых из условий (10), (12), а также (27)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = \alpha_0\nu_0\nu_1\mu_0 = \nu_1\mu_0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = \alpha_0\nu_1, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = 0,$$

$$|Z(x,z_1)| \leqslant (1+\varepsilon)|z_1|^2 \quad \text{при} \quad x \in [0, +\infty[\quad \text{и} \quad |z_1| \leqslant \delta.$$

Поэтому данная система уравнений допускает применения к ней результатов из работ [3], [4].

Характеристическое уравнение предельной матрицы коэффициентов

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1\mu_0 \\ \alpha_0\nu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

линейной части системы (33) имеет вид

$$\rho^2 - \alpha_0\mu_0 = 0. \tag{34}$$

Если $\alpha_0\mu_0 > 0$, то корнями алгебраического уравнение (34) являются вещественные числа разных знаков. В этом случае согласно 2.2 из работы [3] система дифференциальных уравнений (33) имеет однопараметрическое семейство решений $(z_1,z_2) : [x_*, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x_* \geqslant 0)$, стремящихся к нулю при $x \to +\infty$. Каждому из них в силу замен (25), (28), (29) и (32) соответствует решение $y : [t_*,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(t_* \in [a,\omega[)$ дифференциального уравнения (1), допускающее асимптотические представления (13), (17). Следовательно, справедливо первое утверждение теоремы.

Если же $\alpha_0\mu_0 < 0$, то алгебраическое уравнение (34) имеет чисто мнимые корни $\rho_{1,2} = \pm i$. В этом случае при выполнении условий (18) - (21) система дифференциальных уравнений (33) имеет на основании теоремы 2.2 из работы [4] хотя бы одно $(z_1,z_2) : [x_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x_* \geqslant 0)$, удовлетворяющее асимптотическим соотношениям

$$z_i(x) = o\left(\frac{1}{x}\right) \ (i = 1,2) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Этому решению в силу замен (25), (28), (29) и (32) соответствует решение $y : [t_*,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(t_* \in [a,\omega[)$ дифференциального уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (22), (23).

Теорема полностью доказана.

Теорема 3. *Пусть функция p представима в виде* (15), *выполняются условия* (10), (11), *второе из условий* (12) *и существуют конечные или равные* $\pm\infty$ *пределы*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))}{p_0(t)\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}\left(\frac{p_0^{\frac{1}{2}}(t)\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}{\left|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right|^{\frac{1}{2}}}\right)', \tag{35}$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|}. \tag{36}$$

Тогда: 1) если $\lambda_0\mu_0>0$, то дифференциальное уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство $P_\omega(Y_0,1)$ – решений, допускающих асимптотические представления (13), (14), причем таких, производная которых удовлетворяет при $t\uparrow\omega$ асимптотическому соотношению

$$y'(t)=\nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t)\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}}[1+|H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}}o(1)]; \tag{37}$$

2) если $\lambda_0\mu_0<0$ и выполняются условия

$$\lim_{t\uparrow\omega}|H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}}h_{20}(t)\int_{t_1}^{t}p_0^{\frac{1}{2}}(\tau)|\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau))\right)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau=0, \tag{38}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}r(t)\int_{t_1}^{t}p_0^{\frac{1}{2}}(\tau)|\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau))\right)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau=0, \tag{39}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\int_{t_1}^{t}p_0^{\frac{1}{2}}(\tau)|\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau))\right)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{|H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}}}=0, \tag{40}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}[r(t)-h_{30}(t)]\left(\int_{t_1}^{t}p_0^{\frac{1}{2}}(\tau)|\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau))\right)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau\right)^2=0, \tag{41}$$

где $t_1\in[a,\omega[$,

$$h_{20}(t)=\left.\frac{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\right|_{y=\Phi^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))},$$

$$h_{30}(t)=\frac{\nu_1\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))}{p_0(t)\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}\left(\frac{p_0^{\frac{1}{2}}(t)\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}{|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}}}\right)',$$

то дифференциальное уравнение (1) имеет по крайней мере одно $P_\omega(Y_0,1)$ – решение допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$y(t)=\Phi_1^{-1}\left(\nu_1 J_{10}(t)\right)\left[1+\left(\int_{t_1}^{t}p_0^{\frac{1}{2}}(\tau)|\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau))\right)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau\right)^{-1}\frac{o(1)}{H_{10}(t)}\right], \tag{42}$$

$$y'(t)=\nu_1 p_0^{\frac12}(t)\varphi^{\frac12}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac12}\times$$
$$\times\left[1+\left(\int_{t_1}^{t} p_0^{\frac12}(\tau)|\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau))\right)|^{\frac12}\,d\tau\right)^{-1}|H_{10}(t)|^{-\frac12}o(1)\right]. \tag{43}$$

Доказательство. В случае существования конечного или равного $\pm\infty$ предела (36), как было уже ранее установлено, он может быть равен только нулю. С использованием второго из условий (12) нетрудно также показать, что предел (35) также равен нулю. Таким образом имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))}{p_0(t)\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}\left(\frac{p_0^{\frac12}(t)\varphi^{\frac12}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}{\left|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right|^{\frac12}}\right)'=0, \tag{44}$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|}=0. \tag{45}$$

Теперь уравнение (1) с помощью преобразования

$$\begin{gathered}y(t)=\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))+\frac{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}y_1(t),\\ y'(t)=\nu_1 p_0^{\frac12}(t)\varphi^{\frac12}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac12}[1+y_2(t)]\end{gathered} \tag{46}$$

сведем с учетом условий (2.9) к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'=\frac{\nu_1 p_0^{\frac12}(t)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac12}\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}{\varphi^{\frac12}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}\left[h_{20}(t)y_1+y_2\right],\\[2ex] y_2'=\frac{\alpha_0\nu_1 p_0^{\frac12}(t)\varphi^{\frac12}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))\right)}{|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac12}}\left[r(t)-h_{30}(t)+(1+r(t))y_1-\right.\\ \qquad\left.-(1+h_{30}(t))y_2+R(t,y_1)\right], \end{cases} \tag{47}$$

где функции h_{20}, h_{30} определены в формулировке теоремы и функция $R(t,y_1)$ такова, что для что для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta\in]0,1[$ и $t_1\in[t_0,\omega[$ такие, что выполняется неравенство (27).

Выбрав произвольным образом число $\varepsilon>0$ далее систему (47) рассмотрим на множестве $[t_1,\omega[\times D_{1\delta}\times D_{2\delta}$, где $D_{i\delta}=\{y_i\in\mathbb{R}:\ |y_i|\leqslant\delta\}$ $(i=1,2)$.

Применяя к системе (47) последовательно два преобразованиянч

$$y_1(t)=v_1(t),\quad y_2(t)=|H_{10}(t)|^{\frac12}v_2(t) \tag{48}$$

$$x=\int_{t_1}^{t}p_0^{\frac12}(\tau)|\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau))\right)|^{\frac12}\,d\tau,\quad v_1(t)=z_1(x),\quad v_2(t)=z_2(x), \tag{49}$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = c_{11}(x)z_1 + c_{12}(x)z_2, \\ z_2' = f(x) + c_{21}(x)z_1 + c_{22}(x)z_2 + Z(x,z_1), \end{cases} \tag{50}$$

в которой

$$f(x(t)) = \alpha_0\nu_1[r(t) - h_{30}(t)], \quad Z(x(t),z_1) = \alpha_0\nu_1 R(t,z_1),$$

$$c_{11}(x(t)) = \nu_1\mu_0|H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}}h_{20}(t), \quad c_{12}(x(t)) = \nu_1\mu_0,$$

$$c_{21}(x(t)) = \alpha_0\nu_1[1+r(t)], \quad c_{22}(x(t)) = \alpha_0\nu_1|H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2} - h_{30}(t) + \frac{1}{2}h_{20}(t)H_{10}(t)\right].$$

Кроме того, с учетом второго из условий (12) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\int\limits_{t_1}^{t} p_0^{\frac{1}{2}}(\tau)|\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau))\right)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau \geqslant \lim_{t\uparrow\omega}\int\limits_{t_1}^{t}\frac{|H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{t\uparrow\omega}\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} = \lim_{t\uparrow\omega}\left|\ln\frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_1)}\right| = +\infty.$$

Поэтому $x(t) \longrightarrow +\infty$ при $t \uparrow \omega$, $x'(t) > 0$ при $t \in]t_1,\omega[$ и в силу условий (15), (44), (45), (27)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = \nu_1\mu_0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = \alpha_0\nu_1, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = 0,$$

$$|Z(x,z_1)| \leqslant \alpha_0\nu_1(1+\varepsilon)|z_1|^2 \quad \text{при} \quad x \in [0,+\infty[\quad \text{и} \quad |z_1| \leqslant \delta.$$

При этом характеристическое уравнение предельной матрицы икоэффициентов линейной части системы (50) имеет вид (34).

Значит, система дифференциальных уравнений (50) является системой такого же типа, как и система (33), полученная при доказательстве предыдущей теоремы 2. Поэтому точно таким же образом, как при доказательстве теоремы 2, с использованием теорем из работ [3], [4] и преобразований (46), (48), (49) убеждаемся в справедливости всех утверждений теоремы 3.

Замечание 1. *Если записать явный вид функции $R(t,y_1)$ из доказательства теорем 2 и 3, то с использованием свойств быстроменяющихся функций нетрудно установить, что она удовлетворяет условию Липшица по переменной y_1 на множестве $[t_1,\omega[\times D_{1\delta}$. Ввиду этого факта решение уравнения (1) с асимптотиками (22) и (23) ((42) и (43)) из второго утверждения теоремы 2 (соответственно, теоремы 3) является единственным.*

Заключение. В настоящей работе при вполне ественных ограничениях на коэффициент p дифференциального уравнения (1) получены существенные дополнения к результатам работы [2] о существовании и асимптотическом поведении $P_\omega(Y_0,1)$– решений этого уравнения. Установленные в данной работе теоремы являются новыми для изучаемого здесь класса дифференциальных уравнений с быстро меняющейся нелинейностью.

1. **Maric V.** Regular Variation and Differential Equations / V. Maric. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000. – 127 p.
2. **Черникова А. Г.** Асимптотика быстро изменяющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстроменяющейся нелинейностью / А. Г. Черникова // Дослідження в математиці і механіці. – 2015. – Т. 20, вип 2(26). – С. 52–68.
3. **Евтухов В.М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений/В.М. Евтухов, А.М. Самойленко// Укр. Мат. Ж. - 2010. - Т.62, №1. - С. 52 - 80.
4. **Евтухов В.М.** Об исчезающих на бесконечности решениях неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений/ В.М. Евтухов// Дифференц. уравнения. – 2003. – т.39, № 4. – С. 441-452.

Чернікова А. Г.
Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з швидко змінною нелінійністю

Резюме

В роботі для двочленого неавтономного диференціального рівняння другого порядка з швидко змінною при $y \to Y_0$ нелінійністю, де Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, досліджується питання про існування та асимптотичну поведінку при $t \uparrow \omega$ ($\omega \leqslant +\infty$) $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків у випадку, коли $\lambda_0 = 1$. У цьому випадку кожний такий розв'язок і його похідна першого порядку є швидко змінними функціями при $t \uparrow \omega$. Одержані нові результати про необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0,1)$-розв'язків у розглядаємого классу істотно нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а також про асимптотичну поведінку при $t \uparrow \omega$ таких розв'язків та їх похідних першого порядку, що суттєво доповнюють попередні дослідження у цьому напрямку.
Ключові слова: правильно змінні функції, швидко змінні функції, функції з класу Γ*, істотно нелінійні диференціальні рівняння,* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*– розв'язки, умови існування, асимптотична поведінка .*

Chernikova A. G.
Asymptotic behaviour of solutions of second-order differential equations with rapid varying nonlinearities

Summary

In the present paper the question of existence and asymptotic, as $t \uparrow \omega$ ($\omega \leqslant +\infty$), behaviour of $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-solutions of a binomial non-autonomous 2-nd order differential equation with rapidly varying nonlinearities, as $y \to Y_0$, where Y_0 is equal either to zero or to $\pm\infty$ in case, when $\lambda_0 = 1$, is investigated. In this case each of such solutions and its derivative of first order are rapidly varying functions, as $t \uparrow \omega$. There have been obtained new results of necessary and sufficient existence conditions of $P_\omega(Y_0,1)$–solutions of the considered class of essentially nonlinear non-autonomous second order ordinary differential equations and asymptotic representations, as $t \uparrow \omega$, of such solutions and their first order derivatives. These results are essentially complement the research, conducted in this direction.

Key words: regularly varying functions, rapidly varying functions, de Haan klass of functions, essentially nonlinear differential equations, $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – solutions, conditions of existence, asymptotic behaviour.

References

1. Maric V. (2000) *Regular Variation and Differential Equations.* Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 127 p.
2. Chernikova A.G. (2015). *Asimptotika bistro ismenjaushikhsya rechenij differensialnikh uravnenij vtorogo porjadka s bistro menjaushejcya nelinejnostju [Asymptotic of rapid varying solutions of second-order differential equations with rapid varying nonlinearities]. Researches in Mathematics and Mechanics*, Vol. 20, issue 2(26), P. 52-68.
3. Evtukhov V.M., Samojlenko A.M. (2010). *Usloviya sushestvovaniya ischesauchikh v osoboy tochke resheniy u vechestvenskh neavtonomnikh sistem kvasilineynikh differentialnikh uravneniy [Conditions for the existence of vanishing in the singular point solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations].Ukr.Math.J.*, Vol.62, № 1, P. 52 – 80.
4. Evtukhov V.M. (2003). *Ob ischezajuchikh na beskonechnosti recheniyakh neavtonomnikh sistem kvasilinejnikh differensiaknikh uravnenij [On solutions vanishing at infinity of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations]. Differ. Uravn.*, Vol. 39, № 4, P. 441–452.