Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – Т. 22, вип. 2(30). – С. 55–70

УДК 517.9

Р. М. Тацій, О. Ю. Чмир, О. О. Карабин
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ЗАГАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ІЗ КУСКОВО-НЕПЕРЕРВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ

В даній роботі розглянуто загальні крайові задачі для гіперболічного рівняння із кусково-неперервними за просторовою змінною коефіцієнтами та правими частинами. Знайдено розв'язки таких задач за допомогою концепції квазіпохідних, сучасної теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, класичного методу Фур'є та методу редукції.
MSC: 34B05.
Ключові слова: квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, метод Фур'є та метод власних функцій .

Вступ. Точні методи розв'язування мішаних крайових задач математичної фізики, які не використовують різного роду інтегральних перетворень, прийнято називати прямими методами. Загальна схема реалізації таких методів полягає в наступному:

1) редукція, тобто зведення вихідної задачі до розв'язування двох простіших, взаємозв'язаних задач;

2) застосування схеми Фур'є, що включає в себе відокремлення змінних, розв'язування задачі на власні значення та реалізації методу власних функцій.

Важливу роль в цих методах відіграє концепція квазіпохідних, яка дозволяє уникнути проблеми множення узагальнених функцій [1].

Для рівняння параболічного типу реалізація такої схеми вперше була проведена у роботі [2]. Подальший розвиток цей метод отримав в роботах [3]- [6]. Для рівнянь гіперболічного типу, вперше, ці ідеї були впроваджені в роботі [7].

В даній роботі розглядається гіперболічне рівняння з кусково-неперервними за просторовою змінною коефіцієнтами та правими частинами з найбільш загальними локальними крайовими умовами. Окремо виділено частинний, але важливий в прикладному аспекті випадок, кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин, коли розв'язки вихідної задачі можуть бути отримані в замкненій формі.

Основні результати

1. Основні позначення, формулювання задачі. Нехай $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} \ldots < x_{n-1} < x_n = l$ — довільне розбиття відрізка $[0; l]$ дійсної осі Ox на n частин, θ_i — характеристична функція проміжку $[x_i; x_{i+1})$, тобто $\theta_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}), \end{cases}$ $i = \overline{0,n-1}$.

Нехай $m_i(x)$, $a_i(x)$, $f_i(x)$, $i = \overline{0,n-1}$, — додатньо визначені функції на кожному з проміжків $[x_i; x_{i+1})$. Покладемо: $m(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i(x) \cdot \theta_i$, $a(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i(x) \cdot \theta_i$, $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f_i(x) \cdot \theta_i$.

Надійшла 11.07.2017

Позначимо $u^{[1]} = a(x){u_x}'$ (квазіпохідна).

Розглянемо загальну крайову задачу для гіперболічного рівняння

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x), x \in (x_0; x_n), t \in (0; +\infty), \tag{1}$$

із загальними крайовими умовами

$$\begin{cases} p_{11}u(x_0,t) + p_{12}u^{[1]}(x_0,t) + q_{11}u(x_n,t) + q_{12}u^{[1]}(x_n,t) = \psi_0(t), \\ p_{21}u(x_0,t) + p_{22}u^{[1]}(x_0,t) + q_{21}u(x_n,t) + q_{22}u^{[1]}(x_n,t) = \psi_l(t), \end{cases} \quad t \in [0; +\infty), \tag{2}$$

які вважаються лінійно незалежними,
та початковими умовами

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \quad x \in [x_0; x_n], \tag{3}$$

де $\psi_0(t)$, $\psi_l(t) \in C^2(0; +\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ — абсолютно-неперервні функції на $[x_0; x_n]$.

Надалі розглядатимемо частинний, але такий, що має важливе практичне застосування, випадок локальних крайових умов, коли $p_{21} = p_{22} = q_{11} = q_{12} = 0$

$$\begin{cases} p_{11}u(x_0,t) + p_{12}u^{[1]}(x_0,t) = \psi_0(t), \\ q_{21}u(x_n,t) + q_{22}u^{[1]}(x_n,t) = \psi_l(t), \end{cases} \quad t \in [0; +\infty).$$

Метод редукції відшукання розв'язку задачі детально описаний, наприклад, в [8, 9]. Згідно з цим методом розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t), \tag{4}$$

одну з яких, наприклад $w(x,t)$, конструюємо спеціальним способом, а іншу — $v(x,t)$ визначаємо однозначно.

2. Побудова функції $w(x,t)$. Визначимо функцію $w(x,t)$ як розв'язок крайової задачі

$$\left(a(x){w_x}'\right)_x{}' = -f(x), \tag{5}$$

$$\begin{cases} p_{11}w(x_0) + p_{12}w^{[1]}(x_0) = \psi_0(t), \\ q_{21}w(x_n) + q_{22}w^{[1]}(x_n) = \psi_l(t), \end{cases} \quad t \in [0; +\infty). \tag{6}$$

Зауважимо, що змінна t тут вважається параметром.

В основі методу розв'язування задачі (5), (6) лежить концепція квазіпохідних [10].

Введемо вектори $\overline{W} = \begin{pmatrix} w \\ w^{[1]} \end{pmatrix}$, де $w^{[1]} = a(x){w_x}'$, $\overline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}$.

За таких позначень квазідиференціальне рівняння (5) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{W}_x{}' = A(x) \cdot \overline{W} + \overline{F}, \tag{7}$$

де $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Під розв'язком системи (7) розуміємо вектор-функцію $\overline{W}(x,t)$, що за змінною x є абсолютно-неперервна та справджує систему (7) майже всюди (див. [10]).

Крайові умови (6) теж запишемо у векторній формі

$$P \cdot \overline{W}(x_0,t) + Q \cdot \overline{W}(x_n,t) = \overline{\Gamma}\,(t)\,, \tag{8}$$

де $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, причому $rang(P|Q) = 2$, $\overline{\Gamma}\,(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_l(t) \end{pmatrix}$.

Нехай $w_i(x,t)$ та $w_i^{[1]}(x,t)$ визначені на проміжку $[x_i; x_{i+1})$. Покладемо

$$w(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x,t)\theta_i. \tag{9}$$

На проміжку $[x_i; x_{i+1})$ система (7) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}'_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f_i(x) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Розглянемо однорідну систему, що відповідає системі (10)

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}.$$

Матриця Коші $B_i(x,s)$ такої системи має вигляд

$$B_i(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{де}\ b_i(x,s) = \int_s^x \frac{1}{a_i(z)} dz\,(\text{див. [11]}). \tag{11}$$

Для довільного $k \geqslant i$ позначимо

$$B(x_k,x_i) \overset{def}{=} B_{k-1}(x_k,x_{k-1}) \cdot B_{k-2}(x_{k-1},x_{k-2}) \cdot \ldots \cdot B_i(x_{i+1},x_i). \tag{12}$$

Структура (11) матриць $B_i\,(x,s)$ дає можливість встановити структуру матриці (12)

$$B(x_k,x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{m=i}^{k-1} b_m(x_{m+1},x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причому $B(x_k,x_k) \overset{def}{=} E$, де E — одинична матриця.

Розв'язок системи (10) на проміжку $[x_i; x_{i+1})$ має вигляд

$$\overline{W}_i(x,t) = B_i(x,x_i) \cdot \overline{P}_i + \int_{x_i}^x B_i(x,s) \cdot \overline{F}_i(s)\,ds, \tag{13}$$

де $\overline{P}_i$ — поки що невідомий вектор.

Аналогічно, на проміжку $[x_{i-1};x_i)$

$$\overline{W}_{i-1}(x,t)=B_{i-1}(x,x_{i-1})\cdot\overline{P}_{i-1}+\int\limits_{x_{i-1}}^{x}B_{i-1}(x,s)\cdot\overline{F}_{i-1}(s)\,ds. \tag{14}$$

В точці $x=x_i$ повинна виконуватись умова спряження, а саме $\overline{W}_i(x_i,t)=\overline{W}_{i-1}(x_i,t)$ (див. [12]), в результаті чого одержимо рекурентне співвідношення

$$\overline{P}_i=B_{i-1}(x_i,x_{i-1})\cdot\overline{P}_{i-1}+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}B_{i-1}(x_i,s)\cdot\overline{F}_{i-1}(s)\,ds. \tag{15}$$

Методом математичної індукції, з (15) одержуємо

$$\overline{P}_i=B(x_i,x_0)\cdot\overline{P}_0+\sum_{k=0}^{i}B(x_i,x_k)\overline{Z}_k, \tag{16}$$

де $\overline{Z}_k=\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}B_{k-1}(x_k,s)\cdot\overline{F}_{k-1}(s)\,ds$, $k=\overline{1,n-1}$, причому $\overline{Z}_0\overset{def}{=}\overline{0}$, $\overline{P}_0$ — початковий (невідомий) вектор. Для знаходження $\overline{P}_0$ використовуємо крайові умови (8), в яких покладемо $\overline{W}(x_0,t)\overset{def}{=}\overline{P}_0$,

$$\overline{W}(x_n,t)\overset{def}{=}\overline{W}_{n-1}(x_n,t)=B_{n-1}(x_n,x_{n-1})\overline{P}_{n-1}+\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}B_{n-1}(x_n,s)\cdot\overline{F}_{n-1}(s)\,ds=$$

$$=B(x_n,x_0)\overline{P}_0+\sum_{k=1}^{n}B(x_n,x_k)\overline{Z}_k.$$

Тоді $[P+QB(x_n,x_0)]\overline{P}_0+Q\sum\limits_{k=1}^{n}B(x_n,x_k)\overline{Z}_k=\overline{\Gamma}$, звідки одержуємо

$$\overline{P}_0=\left[P+Q\cdot B(x_n,x_0)\right]^{-1}\cdot\left(\overline{\Gamma}-Q\sum_{k=1}^{n}B(x_n,x_k)\overline{Z}_k\right). \tag{17}$$

Обчислимо

$$\left[P+Q\cdot B(x_n,x_0)\right]^{-1}=$$

$$=\left[\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\q_{21}&q_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\sum\limits_{m=0}^{n-1}b_m(x_{m+1},x_m)\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}q_{21}\sigma_n+q_{22}&-p_{12}\\-q_{21}&p_{11}\end{pmatrix},$$

де $\sigma_n=\sum\limits_{m=0}^{n-1}b_m(x_{m+1},x_m)$, $\sigma_0\overset{def}{=}0$, $\Delta=p_{11}(q_{21}\sigma_n+q_{22})-q_{21}p_{12}\neq0$;

$$\overline{\Gamma} - Q\sum_{k=1}^{n} B(x_n,x_k)\overline{Z}_k =$$

$$= \begin{pmatrix}\psi_0(t)\\ \psi_l(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}\sum_{k=1}^{n} B(x_n,x_k)\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k,s)\cdot\overline{F}_{k-1}(s)\,ds. \qquad (18)$$

Запишемо праву частину (18) в матричному вигляді

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k,s)\cdot\overline{F}_{k-1}(s)\,ds = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\begin{pmatrix}1 & b_{k-1}(x_k,s)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -f_{k-1}(s)\end{pmatrix}ds =$$

$$= \begin{pmatrix} -\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} b_{k-1}(x_k,s)\cdot f_{k-1}(s)\,ds\\ -\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f_{k-1}(s)\,ds\end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix}I_{k-1}(x_k)\\ I_{k-1}^{[1]}(x_k)\end{pmatrix} = \overline{Z}_k;$$

$$\sum_{k=1}^{n} B(x_n,x_k)\begin{pmatrix}I_{k-1}(x_k)\\ I_{k-1}^{[1]}(x_k)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k)\cdot\sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m)\right)\\ \sum\limits_{k=1}^{n} I_{k-1}^{[1]}(x_k)\end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо

$$\overline{\Gamma} - Q\sum_{k=1}^{n} B(x_n,x_k)\overline{Z}_k =$$

$$= \begin{pmatrix}\psi_0(t)\\ \psi_l(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k)\cdot\sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m)\right)\\ \sum\limits_{k=1}^{n} I_{k-1}^{[1]}(x_k)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\psi_0(t)\\ \psi_l(t) - q_{21}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k)\cdot\sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m)\right) - q_{22}\sum\limits_{k=1}^{n} I_{k-1}^{[1]}(x_k)\end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Підставимо (19) в (17)

$$\overline{P}_0 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}q_{21}\sigma_n + q_{22} & -p_{12}\\ -q_{21} & p_{11}\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\psi_0(t)\\ \psi_l(t) - q_{21}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k)\cdot\sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m)\right) - q_{22}\sum\limits_{k=1}^{n} I_{k-1}^{[1]}(x_k)\end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Зокрема, перша координата вектора $\overline{P}_0$ дорівнює

$$\frac{1}{\Delta}\Bigg((q_{21}\sigma_n + q_{22})\psi_0(t) - p_{12}\Bigg(\psi_l(t) - q_{21}\sum_{k=1}^{n}(I_{k-1}(x_k)+$$

$$+I_{k-1}^{[1]}(x_k)\cdot\sum_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m)) - q_{22}\sum_{k=1}^{n} I_{k-1}^{[1]}(x_k)\Bigg)\Bigg),$$

а друга координата вектора $\overline{P}_0$ —

$$\frac{1}{\Delta}\left(-q_{21}\psi_0(t)+p_{11}\left(\psi_l(t)-q_{21}\sum_{k=1}^{n}(I_{k-1}(x_k)+I_{k-1}^{[1]}(x_k)\cdot\sum_{m=k}^{n-1}b_m(x_{m+1},x_m))-\right.\right.$$

$$\left.\left.-q_{22}\sum_{k=1}^{n}I_{k-1}^{[1]}(x_k)\right)\right).$$

На основі формул (13), (16), (20), після перетворень, отримаємо зображення вектор-функції $\overline{W}_i(x,t)$ на проміжку $[x_i;x_{i+1})$

$$\overline{W}_i(x,t)=B_i(x,x_i)\cdot\left(B(x_i,x_0)\cdot\overline{P}_0+\sum_{k=1}^{i}B(x_i,x_k)\overline{Z}_k\right)+\int_{x_i}^{x}B_i(x,s)\cdot\overline{F}_i(s)\,ds=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & b_i(x,x_i)+\sigma_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\overline{P}_0+$$

$$+\begin{pmatrix}1 & b_i(x,x_i)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{i}(I_{k-1}(x_k)+I_{k-1}^{[1]}(x_k)\sum\limits_{m=k}^{i-1}b_m(x_{m+1},x_m))\\ \sum\limits_{k=1}^{i}I_{k-1}^{[1]}(x_k)\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-\int\limits_{x_i}^{x}b_i(x,s)\cdot f_i(s)\,ds\\ -\int\limits_{x_i}^{x}f_i(s)\;ds\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & b_i(x,x_i)+\sigma_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\overline{P}_0+$$

$$+\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{i}(I_{k-1}(x_k)+I_{k-1}^{[1]}(x_k)\sum\limits_{m=k}^{i-1}b_m(x_{m+1},x_m))+b_i(x,x_i)\sum\limits_{k=1}^{i}I_{k-1}^{[1]}(x_k)+I_i(x)\\ \sum\limits_{k=1}^{i}I_{k-1}^{[1]}(x_k)+I_i^{[1]}(x)\end{pmatrix}. \quad (21)$$

Перша координата вектора $\overline{W}_i(x,t)$ в (21) і є шуканою функцією $w_i(x,t)$. Отже,

$$w_i(x,t)=\frac{1}{\Delta}((q_{21}\sigma_n+q_{22})\psi_0(t)-$$

$$-p_{12}\left(\psi_l(t)-q_{21}\sum_{k=1}^{n}(I_{k-1}(x_k)+I_{k-1}^{[1]}(x_k)\cdot\sum_{m=k}^{n-1}b_m(x_{m+1},x_m))-\right.$$

$$\left.-q_{22}\sum_{k=1}^{n}I_{k-1}^{[1]}(x_k)\right)+(b_i(x,x_i)+\sigma_i)\times$$

$$\times\left(-q_{21}\psi_0(t)+p_{11}\left(\psi_l(t)-q_{21}\sum_{k=1}^{n}(I_{k-1}(x_k)+I_{k-1}^{[1]}(x_k)\cdot\sum_{m=k}^{n-1}b_m(x_{m+1},x_m))-\right.\right.$$

$$\left.\left.-q_{22}\sum_{k=1}^{n}I_{k-1}^{[1]}(x_k)\right)\right))+\sum_{k=1}^{i}(I_{k-1}(x_k)+I_{k-1}^{[1]}(x_k)\sum_{m=k}^{i-1}b_m(x_{m+1},x_m))+$$

$$+b_i(x,x_i)\sum_{k=1}^{i} I_{k-1}^{[1]}(x_k) + I_i(x). \qquad (22)$$

Підставляючи вираз (22) у (9), можемо записати розв'язок на всьому проміжку $[x_0; x_n]$.

3. Побудова функції $v(x,t)$. Запишемо мішану задачу для функції $v(x,t)$. Підставляючи (4) в (1) та враховуючи, що функція $w(x,t)$ задовольняє (5), одержуємо неоднорідне рівняння

$$m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, x \in (x_0; x_n), t \in (0; +\infty). \qquad (23)$$

Підставимо (4) в початкові умови (3). Одержимо для функції $v(x,t)$ початкові умови

$$\begin{cases} v(x,0) = \Phi_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \Phi_1(x), \end{cases} \quad x \in [x_0; x_n], \qquad (24)$$

де $\Phi_0(x) \overset{def}{=} \varphi_0(x) - w(x,0)$, $\Phi_1(x) \overset{def}{=} \varphi_1(x) - \frac{\partial w}{\partial t}(x,0)$.

Оскільки функція $w(x,t)$ справджує крайові умови (6), то із (4) випливають крайові умови для функції $v(x,t)$

$$\begin{cases} p_{11}v(x_0) + p_{12}v^{[1]}(x_0) = 0, \\ q_{21}v(x_n) + q_{22}v^{[1]}(x_n) = 0, \end{cases} \quad t \in [0; +\infty). \qquad (25)$$

Отже, за умови, що розв'язок $w(x,t)$ задачі (5), (6) є відомим, функція $v(x,t)$ є розв'язком мішаної задачі (23) - (25).

4. Метод Фур'є та задача на власні значення. Для рівняння (23) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right). \qquad (26)$$

Знайдемо його нетривіальні розв'язки у вигляді

$$v(x,t) = \sin(\omega t + \varepsilon) \cdot X(x), \qquad (27)$$

де ω — параметр, ε — константа, $X(x)$ — поки що невідома функція [8], що справджує крайові умови (25).

Підставимо (27) в рівняння (26). Одержимо квазідиференціальне рівняння

$$\big(a(x)X'(x)\big)' + \omega^2 m(x)X(x) = 0. \qquad (28)$$

Підставивши (27) в умови (25), одержимо крайові умови

$$\begin{cases} p_{11}X(x_0) + p_{12}X^{[1]}(x_0) = 0, \\ q_{21}X(x_n) + q_{22}X^{[1]}(x_n) = 0. \end{cases} \qquad (29)$$

Як і вище, під розв'язком рівняння (28) розуміємо абсолютно-неперервну на $[x_0; x_n]$ функцію $X(x)$, що справджує його майже всюди.

Ввівши квазіпохідну $X^{[1]}\overset{def}{=} aX'$, вектор $\overline{X} = \begin{pmatrix} X \\ X^{[1]} \end{pmatrix}$ та матрицю $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(x)} \\ -m(x)\,\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, запишемо задачу (28), (29) в матричному вигляді

$$\overline{X}' = A(x) \cdot \overline{X}, \tag{30}$$

$$P\overline{X}(x_0) + Q\overline{X}(x_n) = \overline{0}. \tag{31}$$

Відповідну систему на проміжку $[x_i, x_{i+1})$ запишемо у вигляді

$$\overline{X}'_i = A_i(x) \cdot \overline{X}_i, i = \overline{0, n-1}, \tag{32}$$

де $A_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i(x)} \\ -\omega^2 m_i(x) & 0 \end{pmatrix}$.

Матрицю Коші системи (32) позначимо $\widetilde{B}_i(x,s,\omega)$ і аналогічно, як і в формулі (12), позначимо $\widetilde{B}(x_i,x_0,\omega)\overset{def}{=}\prod\limits_{j=0}^{i}\widetilde{B}_{i-j}(x_{i-j+1},x_{i-j},\omega)$.

Позначимо також

$$\widetilde{B}(x,x_0,\omega)\overset{def}{=}\sum_{i=0}^{n-1}\widetilde{B}_i(x,x_i,\omega) \cdot \widetilde{B}(x_i,x_0,\omega) \cdot \theta_i, \tag{33}$$

(аналог матриці Коші на всьому проміжку $[x_0; x_n]$);

$$\widetilde{B}(x_n,x_0,\omega)\overset{def}{=}\begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Нетривіальний розв'язок $\overline{X}(x,\omega)$ системи (30) шукаємо у вигляді

$$\overline{X}(x,\omega) = \widetilde{B}(x,x_0,\omega) \cdot \overline{C}, \tag{35}$$

де $\overline{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ — деякий ненульовий вектор.

Вектор - функція $\overline{X}(x,\omega)$ має задовольняти крайові умови (31), тобто

$$P \cdot \overline{X}(x_0,\omega) + Q \cdot \overline{X}(x_n,\omega) = \overline{0},$$

$$\Big(P \cdot \widetilde{B}(x_0,x_0,\omega) + Q \cdot \widetilde{B}(x_n,x_0,\omega)\Big) \cdot \overline{C} = \overline{0},$$

врахувавши, що $\widetilde{B}(x_0,x_0,\omega) = E$, прийдемо до рівності

$$\Big(P + Q \cdot \widetilde{B}(x_n,x_0,\omega)\Big) \cdot \overline{C} = \overline{0}. \tag{36}$$

Для існування ненульового вектора $\overline{C}$ в (36) необхідно і досить виконання умови

$$\det\Big(P + Q \cdot \widetilde{B}(x_n,x_0,\omega)\Big) = 0. \tag{37}$$

Конкретизуємо вигляд лівої частини характеристичного рівняння (37), врахувавши вигляд матриць P, Q та (34)

$$\det\left(P + Q\cdot\widetilde{B}(x_n,x_0,\omega)\right) = \det\left(\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega)\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ q_{21}b_{11}(\omega)+q_{22}b_{21}(\omega) & q_{21}b_{12}(\omega)+q_{22}b_{22}(\omega)\end{pmatrix} =$$

$$= p_{11}\cdot(q_{21}b_{12}(\omega)+q_{22}b_{22}(\omega)) - p_{12}\cdot(q_{21}b_{11}(\omega)+q_{22}b_{21}(\omega)).$$

Сформулюємо наступне твердження.

Зауваження 1. *Характеристичне рівняння задачі на власні значення (28), (29) має вигляд*

$$p_{11}\cdot(q_{21}b_{12}(\omega)+q_{22}b_{22}(\omega)) - p_{12}\cdot(q_{21}b_{11}(\omega)+q_{22}b_{21}(\omega)) = 0. \tag{38}$$

Як відомо [13], корені характеристичного рівняння (38), які є власними значеннями задачі (28), (29), є дійсними та різними.

Для знаходження ненульового вектора $\overline{C}$ підставимо в рівність (36) ω_k замість ω. Тоді прийдемо до векторної рівності

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ q_{21}b_{11}(\omega_k)+q_{22}b_{21}(\omega_k) & q_{21}b_{12}(\omega_k)+q_{22}b_{22}(\omega_k)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases} p_{11}C_1 + p_{12}C_2 = 0, \\ (q_{21}b_{11}(\omega_k)+q_{22}b_{21}(\omega_k))\cdot C_1 + (q_{21}b_{12}(\omega_k)+q_{22}b_{22}(\omega_k))\cdot C_2 = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Оскільки виконується (38), то система (39) зводиться до рівняння $p_{11}C_1 + p_{12}C_2 = 0$, з якого знаходимо координати вектора $\overline{C}$ при певних припущеннях на коефіцієнти матриці P:

1. $p_{11}\neq 0$, $p_{12}\neq 0$, поклавши $C_2 = 1$, маємо $C_1 = -\frac{p_{12}}{p_{11}}$, тобто $\overline{C} = \begin{pmatrix} -\frac{p_{12}}{p_{11}} \\ 1\end{pmatrix}$;

2. $p_{11}\neq 0$, $p_{12} = 0$, тоді $C_1 = 0$, а $C_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, наприклад, $C_2 = 1$, тобто $\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}$;

3. $p_{11} = 0$, $p_{12}\neq 0$, тоді $C_2 = 0$, а $C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, наприклад, $C_1 = 1$, $\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}$.

Нехай $\overline{X}_k(x,\omega_k)$ - нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню ω_k. Справедливим є твердження.

Зауваження 2. *Власні вектори системи диференціальних рівнянь (30) з крайовими умовами (31) мають структуру*

$$\overline{X}_k(x,\omega_k) = \widetilde{B}(x,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C},\, k\in\mathbb{N}.$$

Наслідок. *Власні функції $X_k(x,\omega_k)$, як перші координати власних векторів $\overline{X}_k(x,\omega_k)$, можна записати у вигляді*

$$X_k(x,\omega_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\widetilde{B}(x,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C},\, k = 1,2,3,\ldots. \tag{40}$$

Зокрема, оскільки $X_k(x,\omega_k)$ має вигляд $X_k(x,\omega_k) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} X_{k\,i}(x,\omega_k) \cdot \theta_i$, то з (33) та (40) випливає, що

$$X_{k\,i}(x,\omega_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \widetilde{B}_i(x,x_i,\omega_k) \cdot \widetilde{B}(x_i,x_0,\omega_k) \cdot \overline{C}, i = \overline{0,n-1}. \tag{41}$$

5. Побудова розв'язку $v(x,t)$ мішаної задачі (23) - (25). Розвинення деякої функції $F(x)$ в ряд Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ має вигляд

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot X_k(x,\omega_k), \tag{42}$$

де коефіцієнти Фур'є F_k обчислюють за формулами

$$F_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_n} F(x) \cdot X_k(x,\omega_k) \cdot m(x)\ dx. \tag{43}$$

Зауважимо, що $\|X_k\|^2$ — квадрат норми власної функції X_k

$$\|X_k\|^2 = \int\limits_{x_0}^{x_n} X_k^2(x,\omega_k) \cdot m(x)\, dx. \tag{44}$$

Уточнимо, які ж умови задовольняє функція $F(x)$, щоб її можна було розвинути в ряд Фур'є. Вважатимемо, що $F(x)$ — абсолютно неперервна функція, яка має різні аналітичні вирази на кожному з проміжків $[x_i; x_{i+1})$, тобто допускає зображення $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} F_i(x) \cdot \theta_i$ на проміжку $[x_0; x_n]$.

Покладемо

$$X_k(x,\omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{k\,i}(x,\omega_k) \cdot \theta_i. \tag{45}$$

Тоді для коефіцієнтів Фур'є F_k з розвинення (42) та для квадратів норми функцій $X_k(x)$ з формул (43) і (44) отримаємо:

$$F_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} F_i(x) \cdot X_{k\ i}(x,\omega_k) \cdot m_i(x)\ dx,$$

$$\|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} X_{k\ i}^2(x,\omega_k) \cdot m_i(x)\ dx.$$

Для розв'язання задачі (23) - (25) застосуємо метод власних функцій [9], який полягає в тому, що розв'язок задачі (23) - (25) шукаємо у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x,\omega_k), \tag{46}$$

де $T_k(t)$ — поки що невідомі функції.

Оскільки $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ входить в праву частину рівняння (23), то розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ крайової задачі (28), (29)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cdot X_k(x,\omega_k). \tag{47}$$

Підставляючи вираз (46) у (23) та враховуючи (47), отримаємо рівність

$$m(x) \sum_{k=1}^{\infty} T_k{}''(t)\, X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\big(a(x) X_k{}'(x,\omega_k)\big)' - m(x) \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) X_k(x,\omega_k).$$

Враховуючи, що власні функції $X_k(x,\omega_k)$ задовольняють рівняння (28), приходимо до рівності

$$m(x) \sum_{k=1}^{\infty} T_k{}''(t)\, X_k(x,\omega_k) = -m(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 X_k(x,\omega_k) T_k(t) - m(x) \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) X_k(x,\omega_k),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big[T_k{}''(t) + \omega_k^2 \cdot T_k(t) + w_k(t)\big] \cdot m(x) \cdot X_k(x,\omega_k) = 0. \tag{48}$$

Помножимо ліву і праву частини (48) на $X_j(x,\omega_j)$ та проінтегруємо за змінною x на проміжку $[x_0; x_n)$. Врахувавши ортогональність власних функцій, приходимо до сукупності диференціальних рівнянь

$$T_k{}''(t) + \omega_k^2 \cdot T_k(t) = -w_k(t), k = 1,2,3,\ldots. \tag{49}$$

Загальний розв'язок кожного з диференціальних рівнянь (49) має вигляд

$$T_k(t) = a_k \cos\omega_k t + d_k \sin\omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin\omega_k(t-s) \cdot w_k(s)\; ds, \tag{50}$$

де a_k, d_k — невідомі сталі [14].

Позначимо $I(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin\omega_k(t-s) \cdot w_k(s)\; ds$. Зауважимо, що $I(0) = 0$, $I'_t(0) = 0$ [12].

Для визначення сталих a_k, d_k розвинемо в ряди Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ праві частини початкових умов (24)

$$\Phi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{0k} \cdot X_k(x,\omega_k), \tag{51}$$

$$\Phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1k} \cdot X_k(x,\omega_k), \tag{52}$$

де Φ_{0k}, Φ_{1k} — відповідні коефіцієнти Фур'є.

З (50) випливає, що

$$T_k(0) = a_k, \tag{53}$$

$$T_k{}'(t) = -a_k\omega_k \sin\omega_k t + d_k\omega_k \cos\omega_k t - I_t{}'(t),$$

звідки

$$T_k{}'(0) = d_k\omega_k. \tag{54}$$

З (46), першої умови в (24), та врахувавши (51), одержуємо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(0)\cdot X_k(x,\omega_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_{0k}\cdot X_k(x,\omega_k)$. Звідки, використовуючи (53), маємо

$$T_k(0) = a_k = \Phi_{0k}.$$

Аналогічно з (46), другої умови в (24), врахувавши (52), маємо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k{}'(0)\cdot X_k(x,\omega_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_{1k}\cdot X_k(x,\omega_k)$. Звідки, використовуючи (54), знаходимо

$$T_k{}'(0) = d_k\omega_k = \Phi_{1k}, \text{ або } d_k = \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k}.$$

Отже, остаточно отримуємо розв'язок мішаної задачі (23) - (25) у вигляді ряду

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\Phi_{0k}\cos\omega_k t + \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k}\sin\omega_k t - \frac{1}{\omega_k}\int\limits_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right)\cdot X_k(x,\omega_k). \tag{55}$$

6. Частковий випадок кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин. При розв'язуванні прикладних задач коефіцієнти m_i і a_i, праві частини f_i, $i=\overline{0,n-1}$ зазвичай вважаються сталими, як наслідок, коефіцієнти $m(x)$ і $a(x)$, права частина $f(x)$ у рівнянні (1) є кусково-сталими функціями з розривами першого роду в точках $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$. З врахуванням цього матриця у формулі (10) прийме вигляд $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; вираз у формулі (11) обчислюється таким чином:

$$b_i(x,s) = \int\limits_s^x \frac{1}{a_i}dz = \frac{x-s}{a_i}.$$

Тоді маємо матрицю

$$B(x_k,x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{m=i}^{k-1} b_m(x_{m+1},x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{m=i}^{k-1} \frac{x_{m+1}-x_m}{a_m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

та вираз

$$\sigma_n = \sum_{m=0}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m) = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{x_{m+1}-x_m}{a_m}.$$

За таких умов формули (13) та (14) набувають вигляду

$$\overline{W}_i(x,t) = B_i(x,x_i)\cdot\overline{P}_i + \begin{pmatrix} -f_i\frac{(x-x_i)^2}{2a_i} \\ -f_i(x-x_i)\end{pmatrix},$$

$$\overline{W}_{i-1}(x,t) = B_{i-1}(x,x_{i-1})\cdot\overline{P}_{i-1} + \begin{pmatrix} -f_{i-1}\frac{(x-x_{i-1})^2}{2a_{i-1}} \\ -f_{i-1}(x-x_{i-1})\end{pmatrix},$$

а також

$$\overline{Z}_k = \begin{pmatrix} I_{k-1}(x_k) \\ I^{[1]}_{k-1}(x_k)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{k-1}\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2a_{k-1}} \\ -f_{k-1}(x_k-x_{k-1})\end{pmatrix}.$$

Матриця $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(x)} \\ -m(x)\ \omega^2 & 0\end{pmatrix}$ прийме вигляд $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ -m\ \omega^2 & 0\end{pmatrix}$,
а матриця $A_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i(x)} \\ -\omega^2 m_i(x) & 0\end{pmatrix}$ матиме вигляд $A_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i} \\ -\omega^2 m_i & 0\end{pmatrix}$,

$$F_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} m_i\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} F_i(x)\cdot X_{k\ i}(x,\omega_k)\,dx,$$

$$\|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} X^2_{k\ i}(x,\omega_k)\,dx.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що матриця Коші системи (32) на $[x_i,x_{i+1})$ має вигляд

$$\widetilde{B}_i(x,s,\omega) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i(x-s) & \frac{\sin\alpha_i(x-s)}{a_i\alpha_i} \\ -a_i\alpha_i\sin\alpha_i(x-s) & \cos\alpha_i(x-s)\end{pmatrix},$$

де $\alpha_i = \omega\sqrt{\frac{m_i}{a_i}}$.

Використовуючи вище описані міркування, формули (22), (9), (55) та (4), одержуємо розв'язок задачі (1)–(3) у випадку кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин.

Висновки. В даній роботі за допомогою методу редукції розв'язування вихідної мішаної крайової задачі для гіперболічного рівняння із кусково-неперервними за просторовою змінною коефіцієнтами та правими частинами зведено до знаходження розв'язків двох взаємозв'язаних задач: квазістаціонарної неоднорідної крайової задачі з найбільш загальними локальними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для неоднорідного рівняння.

В частинному випадку кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин всі складові розв'язків таких задач отримано в замкненій формі. В основі побудови розв'язків лежить концепція квазіпохідних, яка дозволяє оминути проблему множення узагальнених функцій.

1. **Тацій Р.М.** Моделювання дискретно-континуальних систем. Основні концепції квазіпохідних / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, В.В. Мазуренко. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – № 10. – С. 7–37.
2. **Тацій Р.М.** Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково - змінними коефіцієнтами/ Р.М. Тацій, О.О. Власій, М.Ф. Стасюк. // Вісник НУ "Львівська політехніка": Серія "Фіз. - мат. науки". – 2014. – № 804. – С. 64–69.
3. **Таций Р.М.** Общие краевые задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами / Р.М. Таций, О.Ю. Пазен. // Инженерно-физический журнал. – 2016. – Том 89, № 2. – С. 350–361.
4. **Семерак М.М.** Теплоизолирующая способность многослойных строительных конструкций с учётом разрушения произвольного слоя / М.М. Семерак, Р.М. Таций, О.Ю. Пазен. // Вестник Кокшетауского технического института Министерства по чрезвычайным ситуациям республики Казахстан: Сб. науч. тр. – Кокшетау: КТИ КЧС МВД РК, 2015. – № 4 (20). – С. 8–17.
5. **Тацій Р.М.** Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталими коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла / Р.М. Тацій, Т.І. Ушак, О. Ю. Пазен. // Пожежна безпека: Зб. наук. пр. – Львів: ЛДУ БЖД, 2015. – № 27. – С. 120–126.
6. **Тацій Р.М.** Прямий метод розрахунку нестаціонарного температурного поля за умов пожежі / Р.М. Тацій, О. Ю. Пазен. // Пожежна безпека: Зб. наук. пр. – Львів: ЛДУ БЖД, 2015. – № 26. – С. 135–141.
7. **Тацій Р.М.** Загальні крайові задачі для гіперболічного рівняння із сумовними коефіцієнтами та правими частинами / Р.М. Тацій, О.О. Карабин, О.Ю. Чмир. // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційні технології та комп'ютерне моделюваня". – Івано-Франківськ, 15-20 травня 2017. – С. 431–435.
8. **Арсенин В.Я.** Методы математической физики / В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
9. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1977. – 735 с.
10. **Тацій Р.М.** Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, В. Мазуренко, О.О. Власій. – Дрогобич: Коло, 2011. – 297 с.
11. **Рудавський Ю.К.** Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник. / Ю.К. Рудавський, П.І. Каленюк, Р.М. Тацій та ін. – Л.: Вид. Національного університету "Львівська політехніка 2001. – 244 с.
12. **Мартыненко В.С.** Операционное исчисление: Учеб. пособие. – 4 - е изд., перераб. и доп. / В.С. Мартыненко. – К.: Выща школа, 1990. – 359 с.
13. **Мазуренко В.В.** Про звідність дискретно-неперервної крайової задачі до узагальненої схеми Аткінсона / В.В. Мазуренко.// Доповіді НАН України. – 2001. – № 8 – С. 19–22.
14. **Каленюк П.І.** Диференціальні рівняння: Навч. посібник. / П.І. Каленюк, Ю.К. Рудавський, Р.М. Тацій, І.Ф. Клюйник, В.М. Колісник, П.П. Костробій, І.Я. Олексів. – Л.: Вид. Національного університету "Львівська політехніка 2014. – 380 с.

Таций Р.М., Чмырь О.Ю., Карабин О.О.

Общие краевые задачи для гиперболического уравнения с кусочно-непрерывными коэффициентами и правыми частями

Резюме

В данной работе рассмотрены общие краевые задачи для гиперболического уравнения с кусочно-непрерывными по пространственной переменной коэффициентами и правыми частями. Найдено решения таких задач с помощью концепции квазипроизводных, современной теории систем линейных дифференциальных уравнений, классического метода Фурье и метода редукции.

Ключевые слова: квазидифференциальное уравнение, краевая задача, матрица Коши, задача на собственные значения, метод Фурье та метод собственных функций .

Tatsij R.M., Chmyr O.Yu., Karabyn O.O.

The total boundary value problems for hiperbolic equation with piecewise continuous coefficients and right parts

Summary

In this paper, the general boundary value problems for hyperbolic equation with piecewise continuous on spatial variable coefficients and right parts was considered. The solutions such problems were found by using a concept of quasi-derivatives, a modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and a reduction method.

Key words: kvazidifferential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of eigenfunctions.

References

1. Tatsij, R. M., Stasjuk, M. F., Mazurenko, V. V. (2009). Modelyuvannya dyskretno-kontynualnykh system. Osnovni kontseptsiyi kvazipokhidnykh [The modelling of the discrete-continual systems. The main conseptions of the quasi-derivatives]. *Physico-mathematical modelling and informational technologies*, №10. – P. 7–37.
2. Tatsij, R. M., Vlasij, O. O., Stasjuk, M. F. (2014). Zagalna persha krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovidnosti z kuskovo-zminnymy koefitsiyentamy [General first boundary value problem for the heat equation with piecewise variable coefficients]. *Bulletin of the University "Lviv Polytechnic series "Physics and mathematics"*, №804. – P. 64–69.
3. Tatsij, R. M., Pazen, O. Y. (2016). Obshchiye krayevyye zadachi dlya uravneniya teploprovodnosti s kusochno-nepreryvnymi koefitsiyentami [The total boundary value problems for the heat equation with piecewise continuous coefficients]. *The Engineering-physical journal*, Vol. 89, №2. – P. 350–361.
4. Semerak, M. M., Tatsij, R. M., Pazen, O. Y. (2015). Teploizoliruyushchaya sposobnost mnogosloynykh stroitelnykh konstruktsiy s uchyetom razrusheniya proizvolnogo sloya [Thermal insulating ability of multi-layer building structures taking into account the destruction of an arbitrary layer]. *The Bulletin of the Kokshetau Technical Institute of the Ministry of Emergency Situations of the Republic of Kazakhstan*, №4(20). – P. 8–17.
5. Tatsij, R. M., Ushak, T.I., Pazen, O. Y. (2015). Zagalna tretya krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovidnosti z kuskovo-stalymy koefitsiyentamy ta vnutrishnimy dzherelamy tepla [General third boundary problem for the heat equation with piecewise constant and internal heat sources]. *The journal of scientific works "Fire Safety"*, №27. – P. 120-126.

6. Tatsij, R. M., Pazen, O. Y. (2015). Pryamyy metod rozrakhunku nestatsionarnogo temperaturnogo polya za umov pozhezhi [Direct method of calculation unsteady temperature field in a fire]. *The journal of scientific works "Fire Safety"*, №26. – P. 135-141.

7. Tatsij, R. M., Karabyn, O. O., Chmyr, O. Yu. (2017). Zagalni krayovi zadachi dlya giperbolichnogo rivnyannya iz sumovnymy koefitsiyentamy ta pravymy chastynamy [The total boundary value problems for hiperbolic equation with summable coefficients and right parts]. *The materials of the international scientific and practical conference "Information Technologies and Computer Modeling"*. – P. 431–435.

8. Arsenin, V. Ya. (1974). *Metody matematicheskoyu phiziki [Methods of Mathematical Physics]*. Moscow: Nauka, 432 p.

9. Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. (1977). *Uravneniya matematicheskoyu phiziki [Equations of Mathematicai Physics]*. Moscow: Nauka, 735 p.

10. Tatsij, R. M., Stasjuk, M. F., Mazurenko, V. V., Vlasij, O. O. (2011). *Uzagalneni kvazi-dyferentsialni rivnyannya [Generalized quasi-differential equations]*. Drogobych: Kolo, 297 p.

11. Rudavsky, J. K., Kaleniuk, P. I., Tatsij, R. M. (2001). *Zbirnyk z dyferentsialnykh rivnyan [Collection of problems of the differential equations]*. Lviv: Polytechnic Publisher, 244 p.

12. Martynenko, V. S. (1990). *Operatsionnoye ischislyeniye [The operational calculus]*. Kyiv: Vyshcha shkola, 359 p.

13. Mazurenko, V. V. (2001). Pro zvidnist dyskretno-neperervnoyi krayovoyi zadachi do uzagalnenoyi skhemy Atkinsona [The reporting of the discrete-continuous boundary problem to the generalized scheme of Atkinson]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, №8. – P. 19–22.

14. Kaleniuk, P. I., Rudavsky, J. K., Tatsij, R. M., Kliinik, I. F., Kostrobij, P. P., Oleksiv, I. Ya. (2014). *Dyferentsialni rivnyannya [Differential Equations]*. Lviv: Polytechnic Publisher, 380 p.