Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – Т. 22, вип. 2(30). – С. 45–54

УДК 519.714

В. В. Пічкур, Т. М. Роговченко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ПРО МЕТОД АДАПТИВНОГО НАЛАШТУВАННЯ ПАРАМЕТРІВ РЕГУЛЯТОРА В ДИСКРЕТНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

В статті пропонується адаптивний метод налаштування параметрів стабілізуючого регулятора в дискретні моменти часу. Ідея методу полягає в наступному: в задані дискретні моменти часу для регулятора параметричного вигляду ми підбираємо параметри керування, які мінімізують критерій якості, що описує відстань траєкторії системи до початку координат. Для цього здійснюється лінеаризація розв'язку системи за допомогою функції чутливості в околі поточного значення параметру. Для знаходження функції чутливості інтегрується матричне рівняння чутливості. Метод і його модифікації одержуємо за допомогою мінімізації квадратичної частини критерію якості в поточний момент часу. Розроблений алгоритм застосовується до задачі стабілізації коливання двох мас. Для цього знаходимо параметричне представлення регулятора, який розв'язує дану задачу. Для проведення обчислювального експерименту розглядаємо випадок залежності регулятора від одного параметру при постійному часовому кроці. Результати обчислювального експерименту наводяться в роботі.
MSC: 93C40, 93D21.
Ключові слова: адаптивна стабілізація, параметризація керування, функція чутливості .

Вступ. Методи теорії стійкості і стабілізації є базовими при дослідженні систем керування. Вони застосовуються при проектуванні систем із заданою якістю функціонування, при побудові автоматизованих систем керування тощо. Класичним підходом до розв'язування задачі стабілізації є метод функцій Ляпунова, а також алгебраїчні методи аналізу стійких режимів [1, 2, 4]. Разом з тим, вимоги, які висуваються до систем керування на теперішньому етапі, пов'язані з наявністю фазових обмежень, побудовою керувань за умов невизначеності. При цьому характеристики шумів, які впливають на динаміку системи, можуть бути невідомими заздалегідь. Ці обставини передбачають створення нових та розвиток наявних математичних засобів і алгоритмів, які б враховували вказані особливості. До таких підходів належать методи стабілізації, практичної стабілізації для систем з багатозначною правою частиною [10, 11, 13]. Інша методика пов'язана з побудовою робастних стабілізуючих регуляторів [3, 4, 8]. В роботах [6, 12, 14] розглядаються адаптивні методи до задач ідентифікації параметрів і керування системами. В [9] висвітлюються підходи до побудови адаптивних регуляторів на основі параметричного представлення функції Ляпунова.

В статті пропонується адаптивний метод налаштування параметрів стабілізуючого регулятора в дискретні моменти часу. В основі методу лежить рівняння для функції чутливості та підходи оптимізаційних методів другого порядку. Знайдене параметричне представлення керування, що розв'язує задачу стабілізації коливання двох мас, для якого застосовується розроблений адаптивний алгоритм. Проведено обчислювальні експерименти.

Надійшла 18.09.2017

Основні результати

1. Адаптивне налаштування параметрів регулятора в дискретні моменти часу. Нехай задана система керування вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u(x,p,t),t), \; t \geqslant t_0. \tag{1}$$

Тут $x = (x_1,x_2,...,x_n)^*$ — вектор стану, $u = (u_1,u_2,...,u_m)^*$ — вектор керування, $u(0,p) = 0$, $p = (p_1,p_2,...,p_r)^*$ — вектор параметрів, $f(x,u,t)$ — вектор-функція правих частин системи (1), яка є неперервно диференційованою за змінними x, u і неперервною за змінною t на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$, $f(0,0,t) = 0$.

Припускаємо, що керування $u = u(x,p,t)$ розв'язує задачу стабілізації системи (1) для всіх $p \in P$, де $P \subset \mathbb{R}^r$ — відкрита множина. Слід зазначити, що існує цілий ряд факторів, які суттєво впливають на поведінку системи, на вибір параметра $p \in P$ і які можуть бути невідомими до початку процесу виконання алгоритму стабілізації: початкові дані системи можуть бути невідомими; існують шуми, які діють на праву частину системи і природа цих шумів не може бути визначена заздалегідь.

Тому ми пропонуємо здійснювати адаптивне налаштування параметру p в залежності від поточного положення системи. Зміну значення параметру p будемо реалізовувати в дискретні моменти часу $t_1 < t_2 < ... < t_i < ...$. Вважаємо, що на проміжках (t_i,t_{i+1}) параметр p приймає постійні значення $p = p^{(i)}$, $i = 0,1,...$. В моменти часу t, які відповідають різним інтервалам, значення параметру p можуть відрізнятись.

Позначимо $x(t,p)$ – розв'язок (1), $x(t_0) = x_0$ при керуванні $u = u(x,p,t)$. За теоремою про неперервну диференційованість розв'язків системи диференціальних рівнянь за параметрами, функція $x(t,p)$ є неперервно диференційованою за змінною p за умови, що функція керування є неперервно диференційованою за параметром p. В моменти $t = t_i$ відома реалізація $x(t,p)$ розв'язку (1), яка відповідає значенню параметра $p = p^{(i-1)}$. На основі даної реалізації шукаємо таке значення параметра $p^{(i)}$, яке мінімізує критерій якості вигляду

$$I_i\,(p) = \|x\,(t_i,p)\,\|^2 \to \min_{p \in P}. \tag{2}$$

Застосуємо підходи, які є характерними для методів оптимізації другого порядку, а також використаємо властивості матриці чутливості. Збуримо параметр p в точці $p^{(i-1)}$ на величину h і запишемо розв'язок системи (1) з врахуванням лінійного наближення

$$x\left(t_i,p^{(i-1)}+h\right) = x\left(t_i,p^{(i-1)}\right) + W(t_i,p^{(i-1)})h + r_i(h). \tag{3}$$

Тут $W(t) = W(t,p^{(i-1)})$ – матриця чутливості системи (1), яка відповідає значенню на розв'язкові $x(t,p)$ при $p = p^{(i-1)}$, h належить $\mathbb{R}^r$, $r_i(h)$ нескінченно мала вищих порядків малості по відношенню до h при $h \to 0$. Матриця чутливості задовольняє матричне диференціальне рівняння [5]

$$\frac{dW(t)}{dt} = F(t,p)W(t) + g(t,p), \; W(t_i) = 0, \; t \in [t_i,t_{i+1}], \tag{4}$$

де $F(t,p) = \frac{\partial f(t,p)}{\partial x} + \frac{\partial f(t,p)}{\partial u}\frac{\partial u(t,p)}{\partial p}$, $g(t,p) = \frac{\partial f(t,p)}{\partial u}\frac{\partial u(t,p)}{\partial p}$, $p = p^{(i-1)}$. Тут $f(t,p) = f(x(t,p),u(x(t,p,t),p),t)$, $u(t,p) = u(x(t,p),p,t)$.

Позначимо $x^{(i)} = x(t_i,p^{(i-1)})$. Відкидаючи в (3) функцію $r_i(h)$, підставимо лінійне наближення до $x\left(t_i,p^{(i-1)} + h\right)$ в функціонал (2). Одержуємо квадратичний функціонал вигляду

$$J\,(h) = \left\langle x^{(i)} + W(t_i)h,x^{(i)} + W(t_i)h\right\rangle =$$
$$= \left\langle x^{(i)}, x^{(i)}\right\rangle + \langle W^*(t_i)W(t_i)h, h\rangle + 2\left\langle h, W^*(t_i)x^{(i)}\right\rangle.$$

Шукаємо параметр $h = h^{(i)}$ з умови мінімуму $J\,(h)$. З $\frac{\partial J(h^{(i)})}{\partial h} = 0$ одержуємо для знаходження $h^{(i)}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$W^*(t_i)W(t_i)h = -W^*(t_i)x^{(i)}.$$

Припустимо, що матриця $W^*(t_i)W(t_i)$ є невиродженою. Тоді

$$h^{(i)} = -(W^*(t_i)W(t_i))^{-1}W^*(t_i)x^{(i)}. \tag{5}$$

Виходячи з (1), (4), (5), метод можна записати так

$$\begin{gathered}
\frac{dx}{dt} = f(x,u(x,p^{(i)},t),t),\\
x(t_0) = x_0 \text{ при } i = 0,\ x(t_i) = x\left(t_i,p^{(i-1)}\right) \text{ при } i = 1,2,...,\\
\frac{dW(t)}{dt} = F(t,p^{(i)})W(t) + g(t,p^{(i)}),\ W(t_i) = 0,\ t \in [t_i,t_{i+1}],\\
p^{(i+1)} = p^{(i)} - s_i(W^*(t_{i+1})W(t_{i+1}))^{-1}W^*(t_{i+1})x^{(i+1)},\ p^{(0)} = p_0,
\end{gathered} \tag{6}$$

де $s_i \in (0,1]$ вибираємо так, щоб $p^{(i+1)} \in P$, $i = 0,1,...$.

Якщо матриця $W^*(t_{i+1})W(t_{i+1})$ вироджена або близька до виродженої, то можна застосувати регуляризацію методу (6). Для цього вводиться параметр регуляризації $\varepsilon > 0$, для якого одержуємо

$$\begin{gathered}
\frac{dx}{dt} = f(x,u(x,p^{(i)},t),t),\\
x(t_0) = x_0 \text{ при } i = 0,\ x(t_i) = x\left(t_i,p^{(i-1)}\right) \text{ при } i = 1,2,...,\\
\frac{dW(t)}{dt} = F(t,p^{(i)})W(t) + g(t,p^{(i)}),\ W(t_i) = 0,\ t \in [t_i,t_{i+1}],\\
p^{(i+1)} = p^{(i)} - s_i(W^*(t_{i+1})W(t_{i+1}) + \varepsilon I)^{-1}W^*(t_{i+1})x^{(i+1)},\ p^{(0)} = p_0,
\end{gathered} \tag{7}$$

де $s_i \in (0,1]$ вибираємо так, щоб $p^{(i+1)} \in P$, $i = 0,1,...$, I – $m \times m$-одинична матриця. Слід зауважити, що

$$\lim_{\varepsilon \to +0}(W^*(t_{i+1})W(t_{i+1}) + \varepsilon I)^{-1}W^*(t_{i+1}) = W^+(t_{i+1}),$$

де $W^+(t_{i+1})$ – псевдообернена матриця до матриці $W(t_{i+1})$. Тому в (7) останню стрічку можна модифікувати так

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} - s_iW^+(t_{i+1})x^{(i+1)},\ p^{(0)} = p_0. \tag{8}$$

Нехай система (1) є лінійною і має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,\ t \geqslant t_0,$$

де A, B – $n \times n$ і $n \times m$ - матриці з постійними коефіцієнтами. Припустимо, що керування, яке розв'язує задачу стабілізації, має вигляд

$$u = C(p)x,$$

де $C(p)$ – $m \times n$ - матриця, компоненти якої гладко залежать від p. Тоді методи (6), (7) будуть записуватись аналогічно з врахуванням того, що $F(t,p) = A + BC(p)$, $g(t,p) = \frac{\partial (A+BC(p))x}{\partial p}$.

2. Адаптивне налаштування параметрів регулятора в задачі стабілізації системи коливання двох мас.

2.1. Параметричне представлення регулятора. Математична модель коливання двох мас M_1, M_2, які взаємодіють через сили тертя B, B_1, B_2 і поєднані пружинами з відповідними жорсткостями K, K_1, K_2 має вигляд [7]

$$\begin{cases} M_1 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + (B + B_1)\frac{dy_1(t)}{dt} + (K + K_1)\, y_1(t) - B\frac{dy_2(t)}{dt} - K y_2(t) = u_1(t)\,, \\ M_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + (B + B_2)\frac{dy_2(t)}{dt} + (K + K_2)\, y_2(t) - B\frac{dy_1(t)}{dt} - K y_1(t) = -u_2(t)\,. \end{cases}$$

Тут y_1, y_2 – відхилення мас M_1, M_2 від положення рівноваги, $u_1(t)$, $u_2(t)$ – зовнішні сили, які діють на маси M_1, M_2 відповідно. Вважаємо, що M_1, M_2, B, B_1, B_2, K, K_1, K_2 є заданими додатніми константами. Таку систему можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = y_3(t)\,,\ \frac{dy_2(t)}{dt} = y_4(t), \\ M_1\frac{dy_3(t)}{dt} + (K + K_1)\, y_1(t) - K y_2(t) + (B + B_1)\, y_3(t) - B y_4(t) = u_1(t)\,, \\ M_2\frac{dy_4(t)}{dt} - K y_1(t) + (K + K_2)\, y_2(t) - B y_3(t) + (B + B_2)\, y_4(t) = -u_2(t)\,. \end{cases} \tag{9}$$

Розглядається задача стабілізації положення рівноваги системи (9), в якій зовнішні сили $u_1(t)$, $u_2(t)$ відіграють роль функцій керування. Керування шукаємо у формі з оберненим зв'язком

$$\begin{aligned} u_1(y_1,y_2,y_3,y_4) &= A_1 y_1 + C_1 y_2 + D_1 y_3 + E_1 y_4, \\ u_2(y_1,y_2,y_3,y_4) &= A_2 y_1 + C_2 y_2 + D_2 y_3 + E_2 y_4. \end{aligned} \tag{10}$$

Тут A_1, C_1, D_1, E_1, A_2, C_2, D_2, E_2 – коефіцієнти, які визначаються так, щоб тривіальний розв'язок системи (9) був асимптотично стійким. Має місце твердження.

Теорема (про параметричне представлення регулятора). *Припустимо, що коефіцієнти A_1, C_1, D_1, E_1 задовольняють такі умови*

$$\begin{gathered} A_1 \neq K + K_1 - \frac{K + C_1}{B + E_1}\left(B + B_1 - D_1 - \frac{M_1(K + C_1)}{B + E_1}\right),\ \textit{якщо}\ E_1 \neq -B, \\ C_1 \neq -K,\ \textit{якщо}\ E_1 = -B. \end{gathered} \tag{11}$$

Припустимо також, що A_2, C_2, D_2, E_2 визначаються як розв'язок системи лінійний алгебраїчних рівнянь $L\overline{x} = \overline{g}$. Тут $\overline{x} = (A_2{,}C_2{,}D_2{,}E_2)^*$,

$$\overline{g} = \left(k_1 + g_1, \frac{k_2^2 k_3 + k_3^2 + k_4 k_1^2}{k_1 k_2 k_3} + g_2, \frac{k_3^2 + k_4 k_1^2}{k_2 k_3} + g_3, \frac{k_4}{k_3} + g_4 \right)^*,$$

$$g_1 = -\frac{BM_1 + BM_2 + B_1M_2 + B_2M_1 - D_1M_2}{M_1M_2},$$

$$g_2 = \frac{A_1M_2 - BB_1 - BB_2 + BD_1 + BE_1 - B_1B_2 + B_2D_1 - KM_1}{M_1M_2} -$$
$$-\frac{-KM_2 - K_1M_2 - K_2M_1}{M_1M_2},$$

$$g_3 = \frac{A_1B + A_1B_2 + BC_1 - BK_1 - BK_2 - B_1K - B_1K_2 - KB_2 - K_1B_2}{M_1M_2} +$$
$$+\frac{D_1K + K_2D_1 + E_1K}{M_1M_2}, g_4 = \frac{A_1K + A_1K_2 + KC_1 - KK_1 - KK_2 - K_1K_2}{M_1M_2},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & b & d \\ b & d & c & e \\ c & e & 0 & 0 \end{pmatrix},\ a = \frac{1}{M_2},\ b = \frac{B + E_1}{M_1M_2},\ c = \frac{K + C_1}{M_1M_2},$$

$$d = \frac{B + B_1 - D_1}{M_1M_2},\ e = \frac{K + K_1 - A_1}{M_1M_2},$$

$k_1{,}k_2{,}k_3{,}k_4$ – довільні додатні константи. Тоді керування (10) є розв'язком задачі стабілізації системи (9).

Доведення. Підставляємо керування (10) в (9). Одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь, характеристичний многочлен якої $P(\lambda) = \lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4$, причому

$$\begin{gathered}
p_1 = \frac{E_2}{M_2} + \frac{BM_1 + BM_2 + B_1M_2 + B_2M_1 - D_1M_2}{M_1M_2}, \\
p_2 = \frac{C_2}{M_2} + \frac{(B + E_1)\,D_2}{M_1M_2} + \frac{(B + B_1 - D_1)\,E_2}{M_1M_2} - \frac{1}{M_1M_2}[A_1M_2 - BB_1 - \\
-BB_2 + BD_1 + BE_1 - B_1B_2 + B_2D_1 - KM_1 - KM_2 - K_1M_2 - K_2M_1], \\
p_3 = \frac{(B + E_1)\,A_2}{M_1M_2} + \frac{(B + B_1 - D_1)\,C_2}{M_1M_2} + \frac{(C_1 + K)\,D_2}{M_1M_2} + \\
+\frac{(K + K_1 - A_1)\,E_2}{M_1M_2} - \frac{1}{M_1M_2}[A_1B + A_1B_2 + BC_1 - BK_1 - BK_2 - \\
-B_1K - B_1K_2 - KB_2 - K_1B_2 + D_1K + K_2D_1 + E_1K], \\
p_4 = \frac{(C_1 + K)\,A_2}{M_1M_2} + \frac{(K + K_1 - A_1)\,C_2}{M_1M_2} - \\
-\frac{1}{M_1M_2}[A_1K + A_1K_2 + KC_1 - KK_1 - KK_2 - K_1K_2].
\end{gathered} \tag{12}$$

Відповідно до критерія Гурвіца, для того, щоб нульова точка рівноваги системи була асимптотично стійкою, необхідно і достатньо, щоб

$$\Delta_1 = p_1 > 0,\ \Delta_2 = p_1 p_2 - p_3 > 0,\ \Delta_3 = p_3 \Delta_2 - p_4 p_1^2 > 0,\ \Delta_4 = p_4 \Delta_3 > 0.$$

Покладемо $\Delta_1 = k_1$, $\Delta_2 = k_2$, $\Delta_3 = k_3$, $\Delta_4 = k_4$, де k_1, k_2, k_3, k_4 – довільні додатні константи. Тоді $p_1 = k_1$, $p_2 = \frac{k_2^2 k_3 + k_3^2 + k_4 k_1^2}{k_1 k_2 k_3}$, $p_3 = \frac{k_3^2 + k_4 k_1^2}{k_2 k_3}$, $p_4 = \frac{k_4}{k_3}$. Систему (12) можна записати у вигляді $L\overline{x} = \overline{g}$. Її розв'язком є вектор $(A_2, C_2, D_2, E_2)^*$. Умови невиродженості матриці L такі: $e \neq \frac{bcd - ac^2}{b^2}$ при $b \neq 0$; $c \neq 0$ якщо $b = 0$. Це еквівалентно (11) і дає умови для знаходження $(A_1, C_1, D_1, E_1)^*$. Теорему доведено.

Зауваження 1. *Якщо в умовах теореми* $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = p$, *то*

$$\overline{g} = \left(p + g_1, 2 + \frac{1}{p} + g_2, 1 + p + g_3, 1 + g_4 \right)^*$$

2.2. Обчислювальний експеримент. Припустимо, що керування (10) є таким, що A_1, C_1, D_1, E_1, $A_2 = A_2(p)$, $C_2 = C_2(p)$, $D_2 = D_2(p)$, $E_2 = E_2(p)$ задовольняють умовам теореми про параметричне представлення регулятора при $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = p$. У цьому випадку підстановка (10) в (9) дає

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = y_3(t)\,, \ \frac{dy_2(t)}{dt} = y_4(t), \\ \frac{dy_3(t)}{dt} = \frac{(-K-K_1+A_1)}{M_1} y_1(t) + \frac{(K+C_1)}{M_1} y_2(t) + \frac{(-B-B_1+D_1)}{M_1} y_3(t) + \frac{(B+E_1)}{M_1} y_4(t)\,, \\ \frac{dy_4(t)}{dt} = \frac{(K-A_2(p))}{M_2} y_1(t) + \frac{(-K-K_2-C_2(p))}{M_2} y_2(t) + \\ \quad + \frac{(B-D_2(p))}{M_2} y_3(t) + \frac{(-B-B_2-E_2(p))}{M_2} y_4(t)\,. \end{cases}$$

Тут

$$\begin{aligned} A_2(p) &= e_{11}(p+g_1) + e_{12}\left(2 + p^{-1} + g_2\right) + e_{13}(1+p+g_3) + e_{14}(1+g_4)\,, \\ C_2(p) &= e_{21}(p+g_1) + e_{22}\left(2 + p^{-1} + g_2\right) + e_{23}(1+p+g_3) + e_{24}(1+g_4)\,, \\ D_2(p) &= e_{31}(p+g_1) + e_{32}\left(2 + p^{-1} + g_2\right) + e_{33}(1+p+g_3) + e_{34}(1+g_4)\,, \\ E_2(p) &= e_{41}(p+g_1) + e_{42}\left(2 + p^{-1} + g_2\right) + e_{43}(1+p+g_3) + e_{44}(1+g_4)\,, \end{aligned}$$

e_{ij} – компоненти матриці L^{-1}, $i,j = 1,2,3,4$. Рівняння для функції чутливості $W(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t), w_4(t))^*$ має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dw_1(t)}{dt} = w_3(t)\,, \ \frac{dw_2(t)}{dt} = w_4(t), \\ \frac{dw_3(t)}{dt} = \frac{(-K-K_1+A_1)}{M_1} w_1(t) + \frac{(K+C_1)}{M_1} w_2(t) + \frac{(-B-B_1+D_1)}{M_1} w_3(t) + \frac{(B+E_1)}{M_1} w_4(t)\,, \\ \frac{dw_4(t)}{dt} = \frac{(K-A_2(p))}{M_2} w_1(t) + \frac{(-K-K_2-C_2(p))}{M_2} w_2(t) + \frac{(B-D_2(p))}{M_2} w_3(t) + \\ \quad + \frac{(-B-B_2-E_2(p))}{M_2} w_4(t) - \frac{A_2'(p)}{M_2} y_1(t) - \frac{C_2'(p)}{M_2} y_2(t) - \frac{D_2'(p)}{M_2} y_3(t) - \frac{E_2'(p)}{M_2} y_4(t)\,, \end{cases}$$

$t \in [t_i, t_{i+1}]$, $w_1(t_i) = w_2(t_i) = w_3(t_i) = w_4(t_i) = 0$. Тут $A_2'(p) = e_{11} + e_{13} - e_{12}p^{-2}$, $C_2'(p) = e_{21} + e_{23} - e_{22}p^{-2}$, $D_2'(p) = e_{31} + e_{33} - e_{32}p^{-2}$, $E_2'(p) = e_{41} + e_{43} - e_{42}p^{-2}$.

Застосуємо у цьому випадку метод (8) і наведемо результати обчислювального експерименту.

Експеримент 1. Вхідні дані: $M_1 = 1.0$, $M_2 = 1.0$, $B = 100.0$, $B_1 = 100.0$, $B_2 = 100.0$, $K = 100.0$, $K_1 = 0.0001$, $K_2 = 0.0001$. Початкові умови: $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 100$. Умова виходу з алгоритму

$$|y_j(T)| \leqslant \varepsilon,\ j = 1{,}2{,}3{,}4,$$

де $\varepsilon = 0.1$, T – момент закінчення роботи алгоритму. Вибираємо $s_i = 1$, якщо $p^{(i+1)} > 0$, інакше $s_i = 0.0000001$, $i = 0{,}1{,}\ldots$. Позначимо $\tau = t_{i+1} - t_i$, $i = 0{,}1{,}\ldots$, тобто крок методу постійний.

При $p = 1$ за умови, що регулятор вибирається згідно твердження без застосування (8), момент закінчення роботи алгоритму $T = 729.50999$. Вибираємо $p_0 = 1$ як початкове наближення і застосовуємо метод (8). Одержуємо такі результати: $T = 161.984$ при $\tau = 10$; $T = 83.729$ при $\tau = 15$; $T = 130.684$ при $\tau = 20$.

При $p = 0.1$ за умови, що регулятор вибирається згідно твердження без застосування (8), момент закінчення роботи алгоритму $T = 2680.659$. Вибираємо $p_0 = 0.1$ як початкове наближення і застосовуємо метод (8). Одержуємо такі результати: $T = 197.177$ при $\tau = 10$; $T = 116.171$ при $\tau = 15$; $T = 128.331$ при $\tau = 20$.

Експеримент 2. Вхідні дані: $M_1 = 210000$, $M_2 = 50000$, $B = 7.75$, $B_1 = 89.99$, $B_2 = 1.123$, $K = 2144.2$, $K_1 = 4.62$, $K_2 = 913.1$. Решта параметрів аналогічні попередньому експерименту.

При $p = 1$ за умови, що регулятор вибирається згідно твердження без застосування (8), момент закінчення роботи алгоритму $T = 99.286$. Вибираємо $p_0 = 1$ як початкове наближення і застосовуємо метод (8). Одержуємо такі результати: $T = 101.711$ при $\tau = 10$; $T = 97.361$ при $\tau = 15$; $T = 101.719$ при $\tau = 20$.

При $p = 0.001$ за умови, що регулятор вибирається згідно твердження без застосування (8), момент закінчення роботи алгоритму $T = 13822.607$. Вибираємо $p_0 = 0.001$ як початкове наближення і застосовуємо метод (8). Одержуємо такі результати: $T = 865.2659$ при $\tau = 10$; $T = 781.9009$ при $\tau = 15$; $T = 1323.7369$ при $\tau = 50$.

При $p = 0.1$ за умови, що регулятор вибирається згідно твердження без застосування (8), момент закінчення роботи алгоритму $T = 890.0079$. Вибираємо $p_0 = 0.1$ як початкове наближення і застосовуємо метод (8). Одержуємо такі результати: $T = 490.4159$ при $\tau = 5$; $T = 889.9449$ при $\tau = 10$; $T = 878.7369$ при $\tau = 15$; $T = 889.87399$ при $\tau = 50$.

Висновки.

1. Одержано адаптивний метод налаштування параметрів стабілізуючого регулятора в дискретні моменти часу. В основі методу лежить рівняння для функції чутливості та підходи оптимізаційних методів другого порядку.
2. Для задачі стабілізації коливання двох мас запропоновано параметричне представлення керування.
3. На основі параметричного представлення регулятора для задачі стабілізації коливання двох мас наведено алгоритм адаптивної стабілізації коливання двох мас.
4. Проведено обчислювальний експеримент.

1. **Кириченко Н. Ф.** Введение в теорию стабилизации движения/Н. Ф. Кириченко. — К.: Вища школа, 1978. — 184 с.
2. **Кунцевич В. М.** Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова/ В. М. Кунцевич, М. М. Лычак. — М.: Наука, 1977. — 400 с.
3. **Мазко А. Г.** Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств/ А. Г. Мазко. — Київ: Інститут математики НАН України, 2016. — 330 с.
4. **Поляк Б. Т.** Робастная устойчивость и управление/ Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
5. **Розенвассер Е. Н.** Чувствительность систем управления/Е. Н. Розенвассер , Р. М. Юсупов. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
6. **Цыпкин Я. З.** Адаптация и обучение в автоматических системах/Я. З. Цыпкин. — М.: Наука, 1968. — 400 с.
7. **Antsaklis P. J.** Linear Systems/P. J. Antsaklis, A. N. Michel. — Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2005. — 670 p.
8. **Boyd S.** Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, 15/S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. — Philadelphia: PA, 1994. — 193 p.
9. **Krstić M.** Nonlinear and Adaptive Control Design/ M. Krstić, I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotović. — N.Y.: Wiley & Sons, Inc., 1995. — 563 p.
10. **Pichkur V.** On practical stability of differential inclusions using Lyapunov functions/ V. V. Pichkur // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. — Vol. 22, Number 5. — 2017. — pp. 1977 – 1986.
11. **Pichkur V. V.** Maximum set of initial conditions for the problem of weak practical stability of a discrete inclusion/ V. V. Pichkur, M. S. Sasonkina //Journal of Mathematical Sciences. — Vol. 194, Issue 4. — 2013. — pp. 414–425.
12. **Sastry S.** Adaptive control: stability, convergence, and robustness/ S. Sastry, M. Bodson. — New Jersey: Prentice Hall, 1989. — 196 p.
13. **Smirnov G.** Introduction to the Theory of Differential Inclusions/ G. Smirnov — American Mathematical Society, 2002. — 226 p.
14. **Fradkov A. L.** Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems/A. L. Fradkov, I. V. Miroshnik, V. O. Nikiforov. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 510 p.

Пичкур В. В., Роговченко Т. Н.

О методе адаптивной настройки параметров регулятора в дискретные моменты времени

Резюме

В статье предлагается адаптивный метод настройки параметров стабилизирующего регулятора в дискретные моменты времени. Идея метода заключается в следующем: в заданные дискретные моменты времени для регулятора параметрического вида мы подбираем параметры управления, которые минимизируют критерий качества, описывающего расстояние траектории системы до начала координат. Для этого мы линеаризируем решение системы с помощью функции чувствительности в окрестности

текущего значения параметра. Для нахождения функции чувствительности мы записываем матричное уравнение чувствительности. Метод и его модификации получаем с помощью минимизации квадратичной части критерия качества в текущий момент времени. Мы применяем разработанный алгоритм к задаче стабилизации колебания двух масс. Для этого находим параметрическое представление регулятора, который решает данную задачу. Для проведения вычислительного эксперимента рассматриваем случай зависимости регулятора от одного параметра при постоянном временном шаге. Результаты вычислительного эксперимента приведены в работе.
Ключевые слова: адаптивна стабілізація, параметризація керування, функція чутливості .

Pichkur V. V., Rogovchenko T. M.
ON AN ADAPTIVE METHOD OF REGULATOR PARAMETERS ADJUSTMENT AT DISCRETE TIME POINTS

Summary

We offer an adaptive method of regulator parameters correction at discrete points of time. The method is based on the following idea: we choose the parameters of the parametric regulator at discrete moments of time minimizing the quality criterion. The criterion describes Euclidean distance between the system trajectory and the equilibrium point. In order to solve the minimization problem, we linearise the solution of the system in the neighbourhood of the current parameter value via the sensitivity function. The sensitivity function depends on the system solution. We calculate this function plugging the current system solution into the right part of the differential matrix sensitivity equation. We obtain the method and its modifications by minimizing the quadratic part of the quality criterion at the current time. Further we apply the developed algorithm to the problem of stabilization of two-mass oscillations. For this purpose we find the parametric representation of the proper regulator. In computational experiment we use the case of one parameter regulator and the constant time step. The results of the computational experiment are given in the last section of the paper.
Key words: adaptive stabilization, control parametrization, sensitivity function.

REFERENCES

1. Kirichenko, N. F. (1978) *Vvedenie v teoriyu stabilizacii dvizheniya [Introduction to the theory of movement stabilization]*. Kyiv: Vyshcha shkola, 184 p.

2. Kuncevich, V. M., Lychak, M. M. (1977) *Sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s pomoshchyu funkciy Lyapunova [Synthesis of automatic control systems using Lyapunov functions]*. Moscow: Nauka, 400 p.

3. Mazko, A. G. (2016) *Robastnaya ustoychivost i stabilizaciya dinamicheskih sistem. Metody matrichnyh i konusnyh neravenstv [Robust stability and stabilization of dynamic systems. Methods of matrix and cone inequalities]*. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 330 p.

4. Polyak, B. T., Shcherbakov, P.S. (2002) *Robastnaya ustoichivost i upravlenie [Robust stability and control]*. Moscow: Nauka, 303 p.

5. Rosenvasser, E. N., Yusupov, R. M. (1981) *Chuvstvitelnost sistem upravleniya [Control systems sensitivity]*. Moscow: Nauka, 464 p.

6. Cypkin, Ya. Z. (1968) *Adaptaciya i obucheniye v avtomaticheskih sistemah[Adaptation and learning in automatic systems]*. Moscow: Nauka, 400 p.
7. Antsaklis, P. J., Michel, A. N. (2005) *Linear Systems*. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 670 p.
8. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. (1994) *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, 15*. Philadelphia: PA, 193 p.
9. Krstić, M., Kanellakopoulos, I., Kokotović, P. V. (1995) *Nonlinear and Adaptive Control Design*. N.Y.: Wiley & Sons, Inc., 563 p.
10. Pichkur, V. (2017) On practical stability of differential inclusions using Lyapunov functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, Vol. 22, Number 5, P. 1977 – 1986.
11. Pichkur, V. V., Sasonkina, M. S. (2013) Maximum set of initial conditions for the problem of weak practical stability of a discrete inclusion. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 194, Issue 4, P. 414–425.
12. Sastry, S., Bodson, M. (1989) *Adaptive control: stability, convergence, and robustness*. New Jersey: Prentice Hall, 196 p.
13. Smirnov, G. (2002) *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*. American Mathematical Society, 226 p.
14. Fradkov, A. L., Miroshnik, I. V., Nikiforov, V. O. (1999) *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 510 p.