УДК 517.925

Е. С. Корепанова
Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

АСИМПТОТИКА ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ N-ГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В настоящей работе для двучленного неавтономного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями устанавливаются условия существования решений, для которых существует $k \in \{3, \dots, n\}$ такое, что $(n-k)$-я производная решения стремится к отличной от нуля константе при стремлении аргумента к $+\infty$, а также асимптотические представления их производных до порядка $n-1$ включительно. При изучении данного вопроса возникают проблемы с установлением асимптотики $(n-k+1)$–й и последующих производных решения. В связи с этим вводится класс, так называемых, $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–решений, где $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$, и исследуется вопрос о наличии и асимптотике $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–решений в особых случаях, когда $\lambda_0 = \frac{n-j-1}{n-j}$, $j = \overline{n-k+2, n-1}$. Все остальные неособые случаи были исследованы в предыдущих работах автора. Полученные результаты существенно дополняют исследования о существовании решений такого вида в монографии И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия для уравнений общего вида и дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера, в которых накладывается достаточно жесткое ограничение на $(n-k+1)$–ю производную решения.

MSC: 34D05, 34C11.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, высший порядок, правильно меняющиеся нелинейности, класс $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–решений, условия существования, асимптотика решений.

Введение. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \tag{1.1}$$

в котором $n \geqslant 3$, $\alpha \in \{-1,1\}$, $p : [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $a \in \mathbb{R}$, $\varphi_j : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при $y^{(j)} \to Y_j$ функция порядка σ_j, $j = \overline{0, n-1}$, ΔY_j — некоторая односторонняя окрестность точки Y_j, $Y_j \in \{0, \pm\infty\}^*$.

Среди множества всех монотонных решений уравнения (1.1), заданных в некоторой окрестности $+\infty$, выделим решения, для которых существует $k \in \{1, \dots, n\}$ такое, что

$$y^{(n-k)}(t) = c + o(1) \quad (c \neq 0) \quad \text{при } t \to +\infty. \tag{1.2$_k$}$$

*При $Y_j = \pm\infty$ здесь и далее будем полагать, что все числа из окрестности ΔY_j одного знака.

Получена 04.09.2017

Некоторые результаты о существовании степенных решений вида (1.2_k) были получены в широко известной монографии И.Т. Кигурадзе и Т.А Чантурия [7] в следствиях 8.2, 8.6, 8.12 [7, Гл. II, §8, стр. 207, 214, 223] и следствиях 9.3, 9.7 [7, Гл. II, §9, стр. 230, 233] для уравнений общего вида и теореме 16.9 [7, Гл. IV, §16, стр. 321] для дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера. Однако эти результаты обеспечивают достаточно жесткое ограничение на $(n-k+1)$–ю и последующие производные решения.

При $k = 1{,}2$ или в случае, когда пределы $\varphi_i(y^{(i)})$ $(i = \overline{n-k+1{,}n-2})$ при $y^{(i)} \to Y_i$ равны положительным постоянным, вопрос о наличии решений вида (1.2_k) у уравнения (1.1) и их асимптотике был решен в работах [4] и [8] без дополнительных ограничений на эти решения. В противном случае — в работе [10] было введено следующее определение.

Определение. *Решение y дифференциального уравнения* (1.1) *будем при* $k \in \{3, \ldots, n\}$ *называть* $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$*–решением, где* $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$*, если оно определено на промежутке* $[t_{0k}, +\infty[\subset [a, +\infty[$ *и удовлетворяет следующим условиям*

$$\lim_{t\to+\infty} y^{(n-k)}(t) = c \ \ (c \neq 0), \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t)y^{(n)}(t)} = \lambda_0. \tag{1.3}$$

Из первого соотношения (1.3) непосредственно следует, что для таких решений имеют место следующие представления

$$y^{(l-1)}(t) = \frac{ct^{n-l-k+1}}{(n-l-k+1)!}\,[1+o(1)] \quad (l = \overline{1,n-k}) \quad \text{при } t \to +\infty \tag{1.4_k}$$

и $c \in \Delta Y_{n-k}$.

Из вида уравнения (1.1) становится очевидно, что $y^{(n)}(t)$ сохраняет знак в некоторой окрестности $+\infty$. Тогда $y^{(n-l)}(t)$ $(l = \overline{1{,}k-1})$ являются строго монотонными функциями в окрестности $+\infty$ и в силу (1.2_k) могут стремиться только к нулю при $t \to +\infty$. Поэтому также необходимо, чтобы

$$Y_{j-1} = 0 \quad \text{при} \ \ j = \overline{n-k+2{,}n}. \tag{1.5_k}$$

Всюду далее будем предполагать, что числа μ_j $(j = \overline{0{,}n-1})$, определяемые следующим образом:

$$\mu_j = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если } Y_j = +\infty, \\ & \text{либо } Y_j = 0 \text{ и } \Delta Y_j \ - \text{ правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } Y_j = -\infty, \\ & \text{либо } Y_j = 0 \text{ и } \Delta Y_j \ - \text{ левая окрестность } 0, \end{cases}$$

таковы, что

$$\mu_j\mu_{j+1} > 0 \text{ при } j = \overline{0{,}n-k-1}, \ \ \mu_j\mu_{j+1} < 0 \text{ при } j = \overline{n-k+1{,}n-2}, \tag{1.6_k}$$

$$\alpha\mu_{n-1} < 0. \tag{1.7_k}$$

Данные условия на μ_j $(j = \overline{0{,}n-1})$ и α являются необходимыми для существования у уравнения (1.1) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–решений, поскольку для каждого из них в некоторой окрестности $+\infty$

$$\operatorname{sign} y^{(j)}(t) = \mu_j \ \ (j = \overline{0{,}n-1}), \ \operatorname{sign} y^{(n)}(t) = \alpha.$$

Кроме того, для таких решений из (1.4_k) следует, что

$$Y_{j-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \mu_{n-k} > 0, \\ -\infty, & \text{если } \mu_{n-k} < 0, \end{cases} \quad \text{при } j = \overline{1,n-k}. \tag{1.8_k}$$

Согласно работе [2] по своим асимптотическим свойствам множество всех $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–решений уравнения (1.1) распадается на $k+1$ непересекающихся подмножеств, которые соответствуют следующим значениям параметра λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash \left\{0,\tfrac{1}{2},\ldots,\tfrac{k-3}{k-2},1\right\}, \quad \lambda_0 = \pm\infty, \quad \lambda_0 = 1,$$

$$\lambda_0 = \tfrac{n-j-1}{n-j}, \quad j \in \{n-k+2,\ldots,n-1\}.$$

Случай $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash \left\{0,\frac{1}{2},\ldots,\frac{k-3}{k-2},1\right\}$ был исследован в работе [10], получены необходимые и достаточные условия существования у уравнения (1.1) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–решений. Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования у уравнения (1.1) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–решений ($k \in \{3,\ldots,n\}$) в особых случаях, когда $\lambda_0 = \frac{n-j-1}{n-j}$, $j = \overline{n-k+2,n-1}$, а также асимптотических при $t \to +\infty$ формул для всех их производных до порядка $n-1$ включительно. Кроме того, решается вопрос о количестве таких решений.

Отметим, что в силу полученных результатов из работы В.М. Евтухова [2] исследуемые решения уравнения (1.1) обладают следующими априорными асимптотическими свойствами.

Лемма 1.1. *Пусть* $k \in \{3,\ldots,n\}$ *и* $y : [t_{0k},+\infty[\to \mathbb{R}$ *— произвольное* $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$*–решение уравнения* (1.1). *Тогда если* $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ *для некоторого* $i \in \{n-k+2,\ldots,n-1\}$, *то имеют место асимптотические при* $t \to +\infty$ *соотношения*

$$y^{(l-1)}(t) \sim \frac{t^{i-l}}{(i-l)!} y^{(i-1)}(t) \quad (l = \overline{n-k+2,i-1})^{\dagger}, \tag{1.9}$$

$$y^{(i)}(t) = o\left(\frac{y^{(i-1)}(t)}{t}\right), \tag{1.10}$$

$$y^{(l)}(t) \sim (-1)^{l-i}\frac{(l-i)!}{t^{l-i}} y^{(i)}(t) \quad (l = \overline{i+1,n}), \tag{1.11}$$

причем в случае, когда $i = n-1$, *соотношение* (1.11) *имеет место при дополнительном условии существования конечного или равного* $\pm\infty$ $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{ty^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$.

В уравнении (1.1) каждая из функций φ_j ($j = \overline{0,n-1}$), будучи правильно меняющейся при $y^{(j)} \to Y_j$ функцией порядка σ_j, представима (см. [9], гл.I, §1, с.10) в виде

$$\varphi_j(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}) \quad (j = \overline{0,n-1}), \tag{1.12}$$

где $L_j : \Delta Y_j \to]0,+\infty[$ ($j = \overline{0,n-1}$) — медленно меняющаяся при $y^{(j)} \to Y_j$ функция. Согласно определению и свойств медленно меняющихся функций

$$\lim_{\substack{y^{(j)}\to Y_j \\ y^{(j)}\in\Delta Y_j}} \frac{L_j(\lambda y^{(j)})}{L_j(y^{(j)})} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0 \quad (j = \overline{0,n-1}). \tag{1.13}$$

† При $i = n-k+2$ эти соотношения отсутствуют.

Приведем две важные теоремы, на которых базируются основные положения теории правильно и медленно меняющихся функций (см. [9], гл.I, §1, с.10).

Теорема 1.1 (о равномерной сходимости). *Если $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ — медленно меняющаяся функция при $y \to Y_0$, то предельное соотношение* (1.13) *выполняется равномерно по λ на любом промежутке $[c,d] \subset]0, +\infty[$.*

Теорема 1.2 (о представлении). *Функция $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ является медленно меняющейся при $y \to Y_0$ тогда и только тогда, когда для некоторого $b \in \Delta Y_0$ она представима в виде*

$$L(y) = c(y) \exp\left(\int\limits_b^y \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right) \quad \text{при } y \in \Delta_b Y_0,$$

где $\Delta_b Y_0$ — односторонняя окрестность точки Y_0, содержащая точку b, c — измеримая на промежутке $\Delta_b Y_0$ функция такая, что $c(y) \to c_0 \in]0, +\infty[$ при $y \to Y_0$, и ε — непрерывная на $\Delta_b Y_0$ функция, стремящаяся к нулю при $t \to +\infty$.

В силу данной теоремы о представлении существуют непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся функции $L_{0j} : \Delta Y_j \to]0, +\infty[$ $(j = \overline{0,n-1})$ такие, что

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{L_j(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 1, \qquad \lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{y^{(j)} L'_{0j}(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 0. \tag{1.14}$$

Будем также говорить, что медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0, если

$$L\left(\mu e^{[1+o(1)] \ln |y|}\right) = L(y)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \;\; (y \in \Delta Y_0),$$

где $\mu = \operatorname{sign} y$.

Условию S_0 заведомо удовлетворяют функции L, имеющие конечный предел при $y \to Y_0$, а также функции вида

$$L(y) = |\ln|y||^{\gamma_1}, \quad L(y) = |\ln|y||^{\gamma_1} |\ln|\ln|y|||^{\gamma_2},$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, и многие другие.

Замечание 1.1. Если медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0, то для любой медленно меняющейся при $y \to Y_0$ функции $l : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$

$$L(yl(y)) = L(y)[1 + o(1)] \;\; \text{при} \;\; y \to Y_0 \;\; (y \in \Delta Y_0).$$

Справедливость данного утверждения непосредственно следует из сформулированных выше теоремы 1.1 о равномерной сходимости и теоремы 1.2 о представлении медленно меняющихся функций.

Замечание 1.2 (см. [6]). Если медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0, а функция $y : [t_0, +\infty[\longrightarrow \Delta Y_0$ — непрерывно дифференцируемая и такая, что

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = Y_0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} [r + o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

где r — отличная от нуля вещественная постоянная, ξ — непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности $+\infty$ вещественная функция, для которой $\xi'(t) \neq 0$, то

$$L(y(t)) = L\left(\mu|\xi(t)|^r\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

где $\mu = \operatorname{sign} y(t)$ в некоторой окрестности $+\infty$.

Замечание 1.3 (см. [3]). Если медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0, а функция $r : \Delta Y_0 \times K \to \mathbb{R}$, где K — компакт в $\mathbb{R}^n$, такая, что

$$\lim_{\substack{y \to \Delta Y_0 \\ y \in \Delta Y_0}} r(z,v) = 0 \quad \text{равномерно по } v \in K,$$

то

$$\lim_{\substack{y \to \Delta Y_0 \\ y \in \Delta Y_0}} \frac{L(ve^{[1+r(z,v)]\ln|z|})}{L(z)} = 1 \quad \text{равномерно по } v \in K, \text{ где } v = \operatorname{sign} z.$$

Основные результаты.

Прежде всего покажем, что для уравнения (1.1) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Если* $k \in \{4, \dots, n\}$, *то уравнение* (1.1) *не имеет* $\mathcal{P}^k_{+\infty}\left(\frac{n-i-1}{n-i}\right)$*–решений при* $i \in \{n-k+3, \dots, n-1\}$.

Доказательство теоремы 2.1. Действительно, пусть $y : [t_{0k}, +\infty[\to \Delta Y_0$ — произвольное $\mathcal{P}^k_{+\infty}\left(\frac{n-i-1}{n-i}\right)$–решение уравнения (1.1) для некоторого $i \in \{n-k+3, \dots, n-1\}$. Тогда из соотношения (1.10) непосредственно следует, что

$$y^{(i-1)}(t) \sim t^{o(1)} \quad \text{при } t \to +\infty, \; i \in \{n-k+3, \dots, n-1\},$$

а это вместе с соотношениями (1.9) противоречит условию (1.5_k).

Далее рассмотрим случай, когда $k \in \{3, \dots, n\}$ и $\lambda_0 = \frac{k-3}{k-2}$. В этом случае для $\mathcal{P}^k_{+\infty}\left(\frac{k-3}{k-2}\right)$–решений справедливы утверждения леммы 1.1 при $i = n-k+2$ и поэтому имеют место асимптотические при $t \to +\infty$ соотношения

$$y^{(n-k+2)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-k+1)}(t)}{t}\right), \tag{2.1}$$

$$y^{(l)}(t) \sim (-1)^{l-n+k-2}\frac{(l-n+k-2)!}{t^{l-n+k-2}}y^{(n-k+2)}(t) \quad (l = \overline{n-k+3,n}), \tag{2.2}$$

причем при $k=3$ соотношение (2.2) имеет место при дополнительном условии существования $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{ty^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$.

Из (2.2) непосредственно следует, что при $t \in]a, +\infty[$ справедливы неравенства

$$(-1)^{j-n+k-2}\mu_j\mu_{n-k+2} > 0 \;\; (j = \overline{n-k+3,n-1}), \quad (-1)^{k-2}\alpha\mu_{n-k+2} > 0 \tag{2.3_k}$$

и имеют место асимптотические при $t \to +\infty$ соотношения

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = \frac{n-j-k+1}{t}[1+o(1)] \quad (j = \overline{n-k+2,n-1}). \tag{2.4}$$

Кроме фактов, указанных в введении, о правильно и медленно меняющихся при $y^{(j)} \to Y_j$ $(j = \overline{0,n-1})$ функциях, для изучения случая $\lambda_0 = \frac{k-3}{k-2}$ будут использоваться при $k \in \{3, \dots, n\}$ следующие вспомогательные обозначения:

$$\gamma_k = 1 - \sum_{j=n-k+2}^{n-1} \sigma_j, \quad \nu_k = \sum_{j=n-k+2}^{n-1} \sigma_j(n-j-k+2) + k - 3,$$

$$M_k(c) = \prod_{j=1}^{n-k} \left| \tfrac{c}{(n-j-k+1)!} \right|^{\sigma_{j-1}}, \quad C_k = \frac{\prod\limits_{j=n-k+3}^{n-1} ((j-n+k-2)!)^{\sigma_j}}{(k-2)!},$$

$$I_k(t) = \varphi_{n-k}(c) M_k(c) \int_{A_{0k}}^{t} p(\tau)\tau^{\nu_k} \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j\left(\mu_j \tau^{n-k-j}\right) \prod_{j=n-k+2}^{n-1} L_j\left(\mu_j \tau^{n-k-j+1}\right) d\tau,$$

$$I_{1k}(t) = \int_{A_{1k}}^{t} |I_k(\tau)|^{\frac{1}{\gamma_k}} d\tau,$$

где A_{0k} (A_{1k}) выбирается равным числу $a_{0k} \geqslant a$ $(a_{1k} \geqslant a_{0k})$ (справа от которого подынтегральная функция непрерывна), если при этом значении предела интегрирования соответствующий интеграл стремится к $+\infty$ при $t \to +\infty$, и равным $+\infty$, если при таком значении предела интегрирования он стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Теорема 2.2. *Пусть $k \in \{4, \dots, n\}$, $\gamma_k \notin \{0, \sigma_{n-k+1}\}$ и медленно меняющиеся при $y^{(j)} \to Y_j$ функции L_j $(j = \overline{n-k+2, n-1})$ удовлетворяют условию S_0. Для существования у уравнения* (1.1) *$\mathcal{P}_{+\infty}^{k}\left(\frac{k-3}{k-2}\right)$–решений необходимо, чтобы $c \in \Delta Y_{n-k}$, наряду с $(1.5_k) - (1.8_k)$ выполнялись условия*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{tI'_k(t)}{I_k(t)} = -\gamma_k, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{tI'_{1k}(t)}{I_{1k}(t)} = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} |I_{1k}(t)|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} = 0 \qquad (2.5_k)$$

и были справедливы при $t \in]a, +\infty[$ неравенства (2.3_k) *и*

$$\gamma_k I_k(t) < 0, \quad \frac{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}{\gamma_k} I_{1k}(t) < 0. \qquad (2.6_k)$$

Более того, для каждого такого решения, помимо (1.2_k) *и* (1.4_k), *имеют место при $t \to +\infty$ асимптотические представления*

$$\frac{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}}{L_{n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} = |\gamma_k C_k| \left| \frac{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}{\gamma_k} I_{1k}(t) \right|^{\gamma_k} [1 + o(1)], \qquad (2.7_k)$$

$$y^{(j)}(t) = (-1)^{j-n+k-2} \tfrac{(j-n+k-2)!}{t^{j-n+k-2}} \tfrac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \tfrac{I'_{1k}(t)}{I_{1k}(t)} y^{(n-k+1)}(t)[1 + o(1)] \quad (j = \overline{n-k+2, n-1}). \qquad (2.8_k)$$

Здесь в теореме 2.2 асимптотическое при $t \to +\infty$ представление (2.7_k) записано в неявном виде. Следующая теорема указывает дополнительные ограничения, при которых асимптотические при $t \to +\infty$ представления $\mathcal{P}_{+\infty}^{k}\left(\frac{k-3}{k-2}\right)$–решений уравнения (1.1) и их производные до порядка $n-1$ включительно могут быть записаны в явном виде.

Теорема 2.3. *Пусть соблюдаются условия теоремы* 2.2 *и медленно меняющаяся при* $y^{(n-k+1)} \to Y_{n-k+1}$ *функция* L_{n-k+1} *удовлетворяет условию* S_0. *Тогда в случае наличия у уравнения* (1.1) $\mathcal{P}^k_{+\infty}\left(\frac{k-3}{k-2}\right)$*–решений выполняется условие*

$$\int\limits_{a_{*k}}^{+\infty} \left| L_{n-k+1}\Big(\mu_{n-k+1} \left|I_{1k}(\tau)\right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}}\Big)\right|^{\frac{1}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}} \left|I_{1k}(\tau)\right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}} d\tau < +\infty, \quad (2.9_k)$$

где $a_{*k} \geqslant a_{1k}$ *такое, что* $\mu_{n-k+1}\left|I_{1k}(t)\right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}} \in \Delta Y_{n-k+1}$ *при* $t \geqslant a_{*k}$, *и для каждого из таких решений имеют место асимптотические при* $t \to +\infty$ *представления* (1.4_k), (2.8_k) *и*

$$y^{(n-k)}(t) = c + \mu_{n-k+1} W_k(t)[1 + o(1)], \quad (2.10_k)$$

$$y^{(n-k+1)}(t) = \mu_{n-k+1} W_k'(t)[1 + o(1)], \quad (2.11_k)$$

где

$$W_k(t) = \int\limits_{+\infty}^{t} \left|\gamma_k C_k L_{n-k+1}\left(\mu_{n-k+1}\left|I_{1k}(\tau)\right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}} \times$$
$$\times \left|\frac{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k} I_{1k}(\tau)\right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}} d\tau.$$

В следующей теореме приводятся достаточные условия наличия у уравнения (1.1) $\mathcal{P}^k_{+\infty}\left(\frac{k-3}{k-2}\right)$–решений с указанными в теореме 2.3 асимптотическими представлениями.

Теорема 2.4. *Пусть* $k \in \{4, \ldots, n\}$, $\gamma_k \notin \{0,\sigma_{n-k+1}\}$, $c \in \Delta Y_{n-k}$, *выполняются условия* $(1.5_k) - (1.8_k)$, (2.3_k), (2.5_k), (2.6_k), (2.9_k) *и медленно меняющиеся при* $y^{(j)} \to Y_j$ *функции* L_j $(j = \overline{n-k+1, n-1})$ *удовлетворяют условию* S_0. *Пусть, кроме того, выполняется неравенство* $\sigma_{n-1} \neq 1$ *и алгебраическое относительно* ρ *уравнение*

$$\begin{gathered}\sum_{j=n-k+1}^{n-3} (2-k)\sigma_j \prod_{l=n-k+2}^{j} (\rho + (n-l-k+1)) \prod_{l=j+1}^{n-2} (n-l-k+1) = \\ = (\rho + (2-k)(\sigma_{n-1}-1)) \prod_{l=n-k+2}^{n-2} (\rho + (n-l-k+1))\end{gathered} \quad (2.12)$$

не имеет корней с нулевой действительной частью. Тогда у уравнения (1.1) *существует* $(n-k+m+1)$*–параметрическое семейство* $\mathcal{P}^k_{+\infty}\left(\frac{k-3}{k-2}\right)$*–решений с асимптотическими при* $t \to +\infty$ *представлениями* (1.4_k), (2.8_k), (2.10_k) *и* (2.11_k), *где* m *— число корней (с учетом кратных) алгебраического уравнения* (2.12) *с отрицательными действительными частями.*

Доказательство теорем 2.2–2.3. Пусть $y : [t_{0k}, +\infty[\to \Delta Y_0$ – произвольное $\mathcal{P}^k_{+\infty}\left(\frac{k-3}{k-2}\right)$–решение уравнения (1.1). Тогда, как было установлено перед формулировками теорем, $c \in \Delta Y_{n-k}$, справедливо $(1.5_k) - (1.8_k)$, при $t \in [t_{0k}, +\infty[$ выполняются неравенства (2.3_k) и имеют место асимптотические при $t \to +\infty$ представления (1.2_k) и (1.4_k). Из (1.4_k) также следует, что

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = \frac{n-j-k}{t}\,[1 + o(1)] \quad (j = \overline{0, n-k-1}) \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Учитывая представления (1.12) правильно меняющихся при $t \to +\infty$ функций $\varphi_j(y^{(j)})$ при $j = \overline{0,n-k-1}$ и справедливость выполнения соотношений (1.13) равномерно по λ на любом отрезке $[d_1,d_2] \subset]0,+\infty[$, имеем

$$\varphi_{j-1}\left(\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right) = \left|\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right|^{\sigma_{j-1}} \times$$
$$\times L_{j-1}\left(\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right) = \left|\tfrac{c}{(n-j-k+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} t^{(n-j-k+1)\sigma_{j-1}} \times$$
$$\times L_{j-1}\left(\mu_{j-1}t^{n-j-k+1}\right)[1+o(1)] = \left|\tfrac{c}{(n-j-k+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} \times$$
$$\times \varphi_{j-1}(\mu_{j-1}t^{n-j-k+1})[1+o(1)] \quad (j = \overline{1,n-k}) \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Тогда подставив решение вместе с производными до порядка $n-k$ включительно в (1.1), при $t \to +\infty$ получим

$$\frac{y^{(n)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}(t))} = \alpha M_k(c)p(t)\varphi_{n-k}(c)\prod_{j=0}^{n-k-1}\varphi_j\left(\mu_j t^{n-k-j}\right)[1+o(1)]. \quad (2.13)$$

Из соотношений (2.4) и замечания 1.2 следует, что для медленно меняющихся при $t \to +\infty$ функций L_j $(j = \overline{n-k+2,n-1})$, удовлетворяющих условию S_0, имеют место представления

$$L_j(y^{(j)}(t)) = L_j(\mu_j t^{n-k-j+1})[1+o(1)] \quad (j = \overline{n-k+2,n-1}) \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Учитывая (1.12) и эти представления, перепишем (2.13) в виде

$$\frac{y^{(n)}(t)}{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{\sigma_{n-k+1}} L_{n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t)) \prod\limits_{j=n-k+2}^{n-1}\left|y^{(j)}(t)\right|^{\sigma_j} L_j(\mu_j t^{n-k-j+1})} =$$
$$= \alpha M_k(c)p(t)\varphi_{n-k}(c)\prod_{j=0}^{n-k-1}\varphi_j\left(\mu_j t^{n-k-j}\right)[1+o(1)].$$

Отсюда, учитывая то, что согласно (2.4), при $t \to +\infty$

$$y^{(n)}(t) = \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \times \ldots \times \frac{y^{(n-k+4)}(t)}{y^{(n-k+3)}(t)} y^{(n-k+3)}(t) \sim \frac{(-1)^{k-3}(k-2)!}{t^{k-3}} y^{(n-k+3)}(t),$$

получим с учетом (1.12), (2.2) и введённых обозначений, следующее соотношение при $t \to +\infty$

$$\frac{y^{(n-k+3)}(t)\left|y^{(n-k+2)}(t)\right|^{\gamma_k-1}}{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{\sigma_{n-k+1}} L_{n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} = (-1)^{k-3}\alpha C_k I_k'(t)[1+o(1)]. \quad (2.14)$$

Согласно (1.12) и тереме 1.2 о представлении существует непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $y^{(j)} \to Y_j$ функция $L_{0n-k+1} : \Delta Y_{n-k+1} \to]0;+\infty[$, удовлетворяющая условиям (1.14). В силу этих условий, (2.1) и (2.4) имеем

$$\left(\frac{\left|y^{(n-k+2)}(t)\right|^{\gamma_k}}{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{\sigma_{n-k+1}}L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}\right)'=\frac{\mu_{n-k+2}y^{(n-k+3)}(t)\left|y^{(n-k+2)}(t)\right|^{\gamma_k-1}}{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{\sigma_{n-k+1}}L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}\times$$
$$\times\left[\gamma_k-\sigma_{n-k+1}\frac{y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+3)}(t)}\frac{y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+1)}(t)}-\frac{y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+3)}(t)}\frac{y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+1)}(t)}\frac{y^{(n-k+1)}(t)L'_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}{L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}\right]=$$
$$=\frac{y^{(n-k+3)}(t)\left|y^{(n-k+2)}(t)\right|^{\gamma_k-1}}{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{\sigma_{n-k+1}}L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}[\mu_{n-k+2}\gamma_k+o(1)]. \tag{2.15}$$

Отсюда следует, что (2.14) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{\left|y^{(n-k+2)}(t)\right|^{\gamma_k}}{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{\sigma_{n-k+1}}L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}\right)'=\mu_{n-k+2}\gamma_k(-1)^{k-3}\alpha C_k I'_k(t)\ [1+o(1)].$$

Интегрируя данное соотношение на промежутке от t_{0k} до t, получим при $t\to+\infty$

$$\frac{\left|y^{(n-k+2)}(t)\right|^{\gamma_k}}{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{\sigma_{n-k+1}}L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}=C+\mu_{n-k+2}\gamma_k(-1)^{k-3}\alpha C_k I_k(t)\ [1+o(1)],$$

где C — некоторая вещественная постоянная.

Используя (2.15) несложно показать, что константа $C=0$ и тогда при $t\to+\infty$

$$\frac{\left|y^{(n-k+2)}(t)\right|^{\gamma_k}}{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{\sigma_{n-k+1}}L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}=\mu_{n-k+2}\gamma_k(-1)^{k-3}\alpha C_k I_k(t)[1+o(1)]. \tag{2.16}$$

Отсюда непосредственно следует, что ввиду последнего неравенства (2.3_k) выполняется первое неравенство из (2.6_k). Кроме того, ввиду первого соотношения (1.14) и (2.14), имеем

$$\frac{y^{(n-k+3)}(t)}{y^{(n-k+2)}(t)}\sim\frac{I'_k(t)}{\gamma_k I_k(t)}\ \text{при}\ t\to+\infty \tag{2.17}$$

и, учитывая (2.4), получаем справедливость первого предельного соотношения из (2.5_k). Из (2.16) также следует, что

$$\frac{y^{(n-k+2)}(t)}{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}}L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))}=\mu_{n-k+2}\left|\gamma_k C_k I_k(t)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}}\ [1+o(1)]. \tag{2.18}$$

Так как

$$\left(\frac{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{1-\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}}}{L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))}\right)'=\frac{\mu_{n-k+1}y^{(n-k+2)}(t)\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{-\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}}}{L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))}\times$$
$$\times\left[1-\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}-\frac{1}{\gamma_k}\frac{y^{(n-k+1)}(t)L'_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}{L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}\right]=$$
$$=\frac{\mu_{n-k+1}y^{(n-k+2)}(t)\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{-\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}}}{L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))}\left[1-\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}+o(1)\right]\ \text{при}\ t\to+\infty,$$

то из (2.18) с учетом (1.6_k) получаем, что при $t\to+\infty$

$$\left(\frac{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{1-\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}}}{L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))}\right)'=\frac{\sigma_{n-k+1}-\gamma_k}{\gamma_k}\left|\gamma_k C_k I_k(t)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}}\ [1+o(1)].$$

Интегрируя данное соотношение на промежутке от t_{0k} до t, получим

$$\frac{\left|y^{(n-k+1)}(t)\right|^{\frac{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}}}{L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))}=\frac{\sigma_{n-k+1}-\gamma_k}{\gamma_k}\left|\gamma_k C_k\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} I_{1k}(t)\,[1+o(1)] \quad \text{при } t\to+\infty.$$

Отсюда непосредственно следует, что выполняется второе неравенство (2.6_k) и имеет место асимптотическое при $t\to+\infty$ соотношение (2.7_k). Отсюда же, ввиду первого соотношения (1.14) и (2.18), имеем

$$\frac{y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+1)}(t)}\sim\frac{\gamma_k I_{1k}'(t)}{(\gamma_k-\sigma_{n-k+1})\,I_{1k}(t)} \quad \text{при } t\to+\infty \tag{2.19}$$

и, учитывая (2.1), получаем справедливость второго и третьего предельного соотношения из (2.5_k), а также асимптотические при $t\to+\infty$ соотношения (2.8_k). Таким образом, доказаны утверждения теоремы 2.2.

Допустим теперь дополнительно, что медленно меняющаяся при $t\to+\infty$ функция L_{n-k+1} удовлетворяет условию S_0. Тогда согласно (2.19) и замечанию 1.2

$$L_{n-k+1}\left(y^{(n-k+1)}(t)\right)=L_{n-k+1}\left(\mu_{n-k+1}\left|I_{1k}(t)\right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}}\right)[1+o(1)] \quad \text{при } t\to+\infty.$$

Поэтому из (2.7_k) следует, что имеют место асимптотические при $t\to+\infty$ соотношения (2.11_k).

Проинтегрировав (2.11_k) на $[t_{*k},t]$, где $t_{*k}=\max\{a_{*k},t_{0k}\}$, имеем

$$y^{(n-k)}(t)=y^{(n-k)}(t_{*k})+\mu_{n-k+1}\int\limits_{t_{*k}}^{t}\left|\gamma_k C_k L_{n-k+1}\left(\mu_{n-k+1}\left|I_{1k}(\tau)\right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}}\times$$
$$\times\left|\frac{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}I_{1k}(\tau)\right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}}[1+o(1)]d\tau \quad \text{при } t\to+\infty.$$

В силу первого из условий (1.3)

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{t_{*k}}^{t}\left|\gamma_k C_k L_{n-k+1}\left(\mu_{n-k+1}\left|I_{1k}(\tau)\right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}}\times$$
$$\times\left|\frac{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}I_{1k}(\tau)\right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}}[1+o(1)]d\tau=\mathrm{const}$$

и тогда по признаку сравнения верно (2.9_k). Используя предложение 6 из монографии [1] (гл.V, §3, с.293) об асимптотическом вычислении интегралов, для $(n-k)$–й производной решения получим представление (2.10_k).

Таким образом, асимптотические при $t\to+\infty$ соотношения (1.2_k) и (2.7_k) приняли вид (2.10_k) и (2.11_k). Теоремы 2.2–2.3 доказаны.

Доказательство теоремы 2.4. Покажем, что для данного c из условия теоремы у уравнения (1.1) существует хотя бы одно $\mathcal{P}_{+\infty}^{k}\left(\frac{k-3}{k-2}\right)$–решение, заданное на некотором промежутке $[t_{0k},+\infty[\subset[a,+\infty[$, допускающее при $t\to+\infty$ асимптотические представления (1.4_k), (2.8_k), (2.10_k) и (2.11_k), а также выясним вопрос о количестве таких решений.

Применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$
\begin{gathered}
y^{(l-1)}(t) = \frac{ct^{n-l-k+1}}{(n-l-k+1)!}[1+v_l(t)] \quad (l=\overline{1,n-k}),\\
y^{(n-k)}(t) = c + \mu_{n-k+1}W_k(t)[1+v_{n-k+1}(t)],\\
y^{(n-k+1)}(t) = \mu_{n-k+1}W_k'(t)[1+v_{n-k+2}(t)],\\
y^{(l-1)}(t) = (-1)^{l-n+k-3}\mu_{n-k+1}\frac{(l-n+k-3)!}{t^{l-n+k-3}}\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}\frac{I_{1k}'(t)}{I_{1k}(t)}W_k'(t)[1+v_l(t)]\\
(l=\overline{n-k+3,n}),
\end{gathered}
\tag{2.20}
$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
v_l' = \frac{n-l-k+1}{t}\left[-v_l+v_{l+1}\right] \quad (l=\overline{1,n-k-1}),\\
v_{n-k}' = \frac{1}{t}\left(\frac{\mu_{n-k+1}}{c}W_k(t)\left[1+v_{n-k+1}\right]-v_{n-k}\right),\\
v_{n-k+1}' = \frac{W_k'(t)}{W_k(t)}\left[-v_{n-k+1}+v_{n-k+2}\right],\\
v_{n-k+2}' = \frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}\frac{I_{1k}'(t)}{I_{1k}(t)}[1+v_{n-k+3}] - \frac{W''t)}{W_k'(t)}\left[1+v_{n-k+2}\right],\\
v_l' = -\frac{n-l-k+3}{t}[1+v_l] - h(t)\left[1+v_l\right] + \frac{n-l-k+2}{t}[1+v_{l+1}] - \frac{W_k''(t)}{W_k'(t)}\left[1+v_l\right]\\
(l=\overline{n-k+3,n-1}),\\
v_n' = \frac{1}{t}\left[k-3-th(t)-\frac{tW_k''(t)}{W_k'(t)}\right][1+v_n]+\\
+\frac{\alpha p(t)\varphi_0\left(\frac{ct^{n-k}}{(n-k)!}[1+v_1]\right)\ldots\varphi_{n-1}\left((-1)^{k-3}\mu_{n-k+1}\frac{(k-3)!}{t^{k-3}}\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}\frac{I_{1k}'(t)}{I_{1k}(t)}W_k'(t)[1+v_n]\right)}{\mu_{n-k+1}(-1)^{k-3}\frac{(k-3)!}{t^{k-3}}\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}\frac{I_{1k}'(t)W_k'(t)}{I_{1k}(t)}},
\end{cases}
\tag{2.21}
$$

где $h(t) = \frac{I_{1k}''(t)I_{1k}(t)-I_{1k}'^2(t)}{I_{1k}'(t)I_{1k}(t)}$, $th(t)\to -1$ при $t\to+\infty$.

Рассмотрим её на множестве $\Omega^n = [t_{0k},+\infty[\times\mathbb{R}^n_{\frac12}$, где $\mathbb{R}^n_{\frac12} = \{(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n : |v_j|\leqslant\frac12,\ j=\overline{1,n}\}$ и $t_{0k}\geqslant a_{*k}$ выбрано с учетом (2.9_k) таким образом, чтобы при $t>t_{0k}$ и $(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac12}$ выполнялись условия:

$$
\begin{gathered}
\frac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}\left[1+v_j(t)\right]\in\Delta Y_{j-1} \quad (j=\overline{1,n-k}),\\
c+\mu_{n-k+1}W_k(t)\left[1+v_{n-k+1}(t)\right]\in\Delta Y_{n-k},\\
\mu_{n-k+1}W_k'(t)\left[1+v_{n-k+2}(t)\right]\in\Delta Y_{n-k+1},\\
(-1)^{j-n+k-3}\mu_{n-k+1}\frac{(j-n+k-3)!}{t^{j-n+k-3}}\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}\frac{I_{1k}'(t)}{I_{1k}(t)}W_k'(t)\left[1+v_j(t)\right]\in\Delta Y_{j-1}\\
(j=\overline{n-k+3,n}).
\end{gathered}
$$

Поскольку функции $\varphi_j(y^{(j)})$ $(j\in\{0,\ldots,n-1\}\backslash\{n-k\})$ представимы в виде (1.12) и соотношения (1.13) выполняются равномерно по λ на любом отрезке $[d_1,d_2]\subset]0,+\infty[$, а также в силу непрерывности функции $\varphi_{n-k}(y^{(n-k)})$, (2.9_k) и того, что медленно меняющиеся при $t\to+\infty$ функции L_j $(j=\overline{n-k+1,n-1})$

удовлетворяют условию S_0, имеем

$$
\begin{aligned}
&\varphi_j\left(\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\,[1+v_{j+1}]\right)=\varphi_j\left(\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\right)(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1}))=\\
&=\left|\tfrac{c}{(n-k-j)!}\right|^{\sigma_j}\varphi_j(\mu_j t^{n-k-j})(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1}))\quad (j=\overline{0,n-k-1}),\\
&\varphi_{n-k+1}\left(\mu_{n-k+1}W_k'(t)\,[1+v_{n-k+2}(t)]\right)=\\
&=\varphi_{n-k+1}\left(\mu_{n-k+1}W_k'(t)\right)(1+v_{n-k+2})^{\sigma_{n-k+1}}(1+R_{n-k+1}(t,v_{n-k+2})),\\
&\varphi_j\left((-1)^{j-n+k-2}\mu_{n-k+1}\tfrac{(j-n+k-2)!}{t^{j-n+k-2}}\tfrac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}\tfrac{I_{1k}'(t)}{I_{1k}(t)}W_k'(t)\,[1+v_{j+1}(t)]\right)=\\
&=\left|\tfrac{\gamma_k(j-n+k-2)!}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}\right|^{\sigma_j}\varphi_j\left(\mu_j\tfrac{I_{1k}'(t)}{t^{j-n+k-2}I_{1k}(t)}W_k'(t)\right)(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1}))=\\
&=(k-2)!C_k\left|\tfrac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}\right|^{\sigma_j}\varphi_j\left(\mu_j t^{n-j-k+1}\right)(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1}))\\
&(j=\overline{n-k+2,n-1}),\\
&\varphi_{n-k}\left(c+\mu_{n-k+1}W_k(t)\,[1+v_{n-k+1}(t)]\right)=\varphi_{n-k}(c)(1+R_{n-k}(t,v_{n-k+1})),
\end{aligned}
$$

где функции $R_j(t,v_{j+1})$ $(j=\overline{0,n-1})$ стремятся к нулю при $t\to+\infty$ равномерно по $v_{j+1}\in\left[-\frac12,\frac12\right]$.

В силу вида функции $W_k(t)$, (2.1) – (2.2), (2.9$_k$) и (1.14)

$$
\lim_{t\to+\infty}\frac{tW_k''(t)}{W_k'(t)}=0,\qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{tW_k'(t)}{W_k(t)}=1,
$$

$$
\lim_{t\to+\infty}\frac{W_k''(t)I_{1k}(t)}{W_k'(t)I_{1k}'(t)}=\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}},\qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{tI_{1k}''(t)}{I_{1k}'(t)}=-1.
$$

Тогда, с использованием указанных выше представлений, система уравнений (2.21) может быть переписана в виде

$$
\begin{cases}
v_l'=\frac{n-l-k+1}{t}\,[-v_l+v_{l+1}]\quad (l=\overline{1,n-k-1}),\\
v_{n-k}'=\frac1t\left[-v_{n-k}+\frac{\mu_{n-k+1}}{c}W_k(t)\,(1+v_{n-k+1})\right],\\
v_{n-k+1}'=\frac1t\,[-v_{n-k+1}+v_{n-k+2}+V_{n-k+1,1}(t,v_1,\dots,v_n)],\\
v_{n-k+2}'=\frac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}\frac{I_{1k}'(t)}{I_{1k}(t)}[-v_{n-k+2}+v_{n-k+3}+V_{n-k+2,1}(t,v_1,\dots,v_n)],\\
v_l'=\frac{n-l-k+2}{t}\,[-v_l+v_{l+1}+V_{l,1}(t,v_1,\dots,v_n)]\quad (l=\overline{n-k+3,n-1}),\\
v_n'=\frac{2-k}{t}\left[\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n-1}\sigma_{j-1}v_j+(\sigma_{n-1}-1)v_n+\sum\limits_{i=1}^{2}V_{n,i}(t,v_1,\dots,v_n)\right],
\end{cases}
\tag{2.22}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&V_{n-k+1,1}(t,v_1,\dots,v_n)=\left(\tfrac{tW_k'(t)}{W_k(t)}-1\right)[-v_{n-k+1}+v_{n-k+2}],\\
&V_{n-k+2,1}(t,v_1,\dots,v_n)=\left(\tfrac{(\gamma_k-\sigma_{n-k+1})W_k''(t)I_{1k}(t)}{\gamma_kW_k'(t)I_{1k}'(t)}-1\right)[1+v_{n-k+2}],\\
&V_{l,1}(t,v_1,\dots,v_n)=\left(th(t)+1-\tfrac{tW_k''(t)}{W_k'(t)}\right)[1+v_l]\quad (l=\overline{n-k+2,n-1}),\\
&V_{n,1}(t,v_1,\dots,v_n)=\left(th(t)+1-\tfrac{tW_k''(t)}{W_k'(t)}\right)[1+v_n]+\\
&+\left(\prod_{j=0}^{n-1}(1+R_j(t,v_{j+1}))-1\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}},\\
&V_{n,2}(t,v_1,\dots,v_n)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}}-\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}v_j\sigma_{j-1}-1.
\end{aligned}
$$

При этом заметим, что

$$\lim_{t\to+\infty} V_{j,1}(t,v_1,\ldots,v_n)=0 \quad (j=\overline{n-k+2,n})$$

равномерно по $(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$,

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n|\to 0}\frac{V_{n,2}(t,v_1,\ldots,v_n)}{|v_1|+\ldots+|v_n|}=0$$

равномерно по $t\in[t_{0k},+\infty[$.

Сделав в (2.22) замену переменных следующим образом

$$\begin{cases} v_j=z_j \quad (j=1,n-k+1),\\ v_{n-k+2}=z_n,\\ v_{j+1}=z_j \quad (j=n-k+2,n-1), \end{cases} \tag{2.23}$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_l'=\dfrac{n-l-k+1}{t}\,[-z_l+z_{l+1}] \quad (l=\overline{1,n-k-1}),\\ z_{n-k}'=\dfrac{1}{t}\left[-z_{n-k}+\dfrac{\mu_{n-k+1}}{c}W_k(t)\,(1+z_{n-k+1})\right],\\ z_{n-k+1}'=\dfrac{1}{t}\,[-z_{n-k+1}+z_{n-k+2}+Z_{n-k+1,1}(t,z_1,\ldots,z_n)],\\ z_l'=\dfrac{n-l-k+1}{t}\,[-z_l+z_{l+1}+Z_{l,1}(t,z_1,\ldots,z_n)] \quad (l=\overline{n-k+2,n-2}),\\ z_{n-1}'=\dfrac{2-k}{t}\left[\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq\{n-k+1,n-1\}}}^{n}\sigma_{j-1}z_j+(\sigma_{n-1}-1)z_{n-1}+\sum\limits_{i=1}^{2}Z_{n,i}(t,z_1,\ldots,z_n)\right],\\ z_n'=\dfrac{\gamma_k}{\gamma_k-\sigma_{n-k+1}}\dfrac{I_{1k}'(t)}{I_{1k}(t)}[-z_n+z_{n-k+2}+Z_{n-k+2,1}(t,z_1,\ldots,z_n)], \end{cases} \tag{2.24}$$

в которой $Z_{j,m}(t,z_1,\ldots,z_n)=V_{j,m}(t,v_1,\ldots,v_{n-k+1},v_{n-k+3},\ldots,v_n,v_{n-k+2})$ $(m=1,2,\ j=\overline{n-k+1,n})$ и такие, что предел $\lim\limits_{t\to+\infty}Z_{j,1}(t,z_1,\ldots,z_n)=0$ существует равномерно по $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ и предел $\lim\limits_{|z_1|+\ldots+|z_n|\to 0}\frac{\partial Z_{n,2}(t,z_1,\ldots,z_n)}{\partial z_k}=0$ $(k=\overline{1,n})$ существует равномерно по $t\in[t_{0k},+\infty[$.

Характеристическое уравнение матрицы коэффициентов при $z_1,\ldots,z_{n-1}$ (при этом коэффициент при z_n отличен от 0) системы (2.24)

$$\prod_{l=1}^{n-k}(\rho+(n-l-k+1))(\rho+1)\left[\sum_{j=n-k+1}^{n-3}(2-k)\sigma_j\prod_{l=n-k+2}^{j}(\rho+(n-l-k+1))\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{l=j+1}^{n-2}(n-l-k+1)-(\rho+(2-k)(\sigma_{n-1}-1))\prod_{l=n-k+2}^{n-2}(\rho+(n-l-k+1))\right]=0$$

имеет $n-k+1$ отрицательных корней $\rho_l=-(n-l-k+1)$ $(l=\overline{1,n-k})$, $\rho_{n-k+1}=-1$ и $k-2$ корней алгебраического уравнения (2.12), среди которых (согласно условию теоремы) нет корней с нулевой действительной частью.

Тогда для системы (2.24) выполнены все условия теоремы 2.6 из работы [5] и, следовательно, у неё существует по крайней мере одно решение $(z_j)_{j=1}^n$: $[t_{1k}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ $(t_{1k} \in [t_{0k}, +\infty[)$, стремящееся к нулю при $t \to +\infty$. Каждому такому решению в силу замен (2.20) и (2.23) соответствует $\mathcal{P}^k_{+\infty}\left(\frac{k-3}{k-2}\right)$–решение уравнения (1.1), допускающее при $t \to +\infty$ асимптотические представления (1.4_k), (2.8_k), (2.10_k) и (2.11_k).

Так как $\rho_l = -(n-l-k+1)$ $(l = \overline{1,n-k})$, $\rho_{n-k+1} = -1$ являются отрицательными, то, согласно этой теореме, таких решений заведомо существует $(n-k+1)$–параметрическое семейство. Более того, существует $(n-k+m+1)$–параметрическое семейство решений с такими представлениями, где m — число корней (с учетом кратных) с отрицательными действительными частями алгебраического уравнения (2.12). Теорема доказана.

Из теорем $2.2-2.4$ выпадает случай $k=3$, который в силу леммы 1.1 требует дополнительного ограничения — существования $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{ty^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$. Из доказательства теоремы 2.2 становится ясно, что соотношение (2.17) остается справедливым и при $k=3$. Поэтому это ограничение можно заменить на существование $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{tI_3'(t)}{I_3(t)}$. Далее продолжая рассуждения доказательств теорем 2.2 и 2.3 получим их аналоги в случае $k=3$. То есть для уравнения (1.1) также справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.5. *Пусть* $\gamma_3 \notin \{0,\sigma_{n-2}\}$, *существует* $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{tI_3'(t)}{I_3(t)}$ *и медленно меняющаяся при* $y^{(n-1)} \to Y_{n-1}$ *функция* L_{n-1} *удовлетворяет условию* S_0. *Для существования у уравнения* (1.1) $\mathcal{P}^3_{+\infty}(0)$*–решений необходимо, чтобы* $c \in \Delta Y_{n-3}$, *наряду с* $(1.5_3)-(1.8_3)$ *выполнялись условия* (2.5_3) *и были справедливы при* $t \in]a, +\infty[$ *неравенства* (2.3_3) *и* (2.6_3). *Более того, для каждого такого решения, помимо* (1.2_3) *и* (1.4_3), *имеют место при* $t \to +\infty$ *асимптотические представления* (2.7_3) *и* (2.8_3).

Теорема 2.6. *Пусть соблюдаются условия теоремы* 2.5 *и медленно меняющаяся при* $y^{(n-2)} \to Y_{n-2}$ *функция* L_{n-2} *удовлетворяет условию* S_0. *Тогда в случае наличия у уравнения* (1.1) $\mathcal{P}^3_{+\infty}(0)$*–решений выполняется условие* (2.9_3) *и для каждого из таких решений имеют место асимптотические при* $t \to +\infty$ *представления* (1.4_3), (2.8_3), (2.10_3) *и* (2.11_3).

Кроме того заметим, что алгебраическое относительно ρ уравнение (2.12) при $k=3$ имеет единственный корень $\rho = \sigma_{n-1}-1$. Тогда приходим к справедливости следующего аналога теоремы 2.4 при $k=3$.

Теорема 2.7. *Пусть* $\gamma_3 \notin \{0,\sigma_{n-2}\}$, $c \in \Delta Y_{n-2}$, *существует* $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{tI_3'(t)}{I_3(t)}$, *выполняются условия* $(1.5_3)-(1.8_3)$, (2.3_3), (2.5_3), (2.6_3) *и* (2.9_3), *медленно меняющиеся при* $y^{(j)} \to Y_j$ *функции* L_j $(j = \overline{n-2,n-1})$ *удовлетворяют условию* S_0 *и* $\sigma_{n-1} \neq 1$. *Тогда у уравнения* (1.1) *существует* $(n-2)$*–параметрическое* (($n-1$)*–параметрическое) семейство* $\mathcal{P}^3_{+\infty}(0)$*–решений с асимптотическими при* $t \to +\infty$ *представлениями* (1.4_3), (2.8_3), (2.10_3) *и* (2.11_3) *в случае* $\sigma_{n-1} > 1$ $(\sigma_{n-1} < 1)$.

Заключение. В данной работе для двучленного неавтономного обыкновенного дифференциального уравнения n–го порядка с правильно меняющимися нелинейностями (1.1) исследован вопрос о наличии и асимптотике, так называемых, $\mathcal{P}^k_{+\infty}\left(\frac{n-i-1}{n-i}\right)$–решений в случае $i \in \{n-k+2,\dots,n-1\}$ при $k \in \{3,\dots,n\}$.

В результате было доказано, что у дифференциального уравнения (1.1) не существует $\mathcal{P}^k_{+\infty}\left(\frac{n-i-1}{n-i}\right)$–решений при всех i за исключением $i = n-k+2$. Особенность данного случая потребовала наложения условия S_0 на медленно меняющиеся при $y^{(j)} \to Y_j$ функции L_j $(j = \overline{n-k+2,n-1})$ для получения необходимых условий существования $\mathcal{P}^k_{+\infty}\left(\frac{k-3}{k-2}\right)$–решений, а также неявных асимптотических при $t \to +\infty$ формул для их производных до порядка $n-1$ включительно. Кроме того, при наложении условия S_0 и на функцию L_{n-k+1} асимптотические формулы записаны в явном виде и получены достаточные условия существования у дифференциального уравнения (1.1) решений с найденными представлениями.

1. **Бурбаки Н.** Функции действительного переменного / Н. Бурбаки. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
2. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов // Дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 – Киев. – 1998. – 295 с.
3. **Евтухов В. М., Клопот А. М.** Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Клопот // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, №5. – С. 584–600.
4. **Евтухов В. М., Корепанова Е. С.** Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, Е. С. Корепанова // Укр. мат. журн. – 2017. – Т.69, №9. – С. 1198–1216.
5. **Евтухов В. М., Самойленко А. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. мат. ж. – 2010. – Т. 62, №1. – С. 52–80.
6. **Евтухов В. М., Самойленко А. М.** Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения – 2011. – Т. 47, №5. – С. 628–650.
7. **Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия. – М.:Наука. – 1990. – 430 с.
8. **Корепанова К. С.** Умови існування розв'язків степеневого виду у диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями / К. С. Корепанова // Буковинський мат. ж. – 2016. – Т. 4, №3–4. – С. 75–79.
9. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета – М.:Наука. – 1985. – 144 с.
10. **Evtukhov V. M., Korepanova K. S.** Asymptotic Behaviour of Solutions of One Class of n-th Order Differential Equations / V. M. Evtukhov, K. S. Korepanova // Memoirs on Diff. Eq. and Math. Phys. – 2017. – V.71. – P. 111–124.

Корепанова К. С.

Асимптотика одного класу розв'язків звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку з правильно змінними нелінійностями

Резюме

В роботі для двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння n-го порядку з правильно змінними нелінійностями встановлюються ознаки існування розв'язків, для яких існує $k \in \{3, \ldots, n\}$ таке, що $(n-k)$-а похідна розв'язку прямує до відмінної від нуля сталої при прямуванні аргументу до $+\infty$, а також асимптотичні зображення їх похідних до порядку $n-1$ включно. При досідженні даного питання виникають проблеми з встановленням асимптотики $(n-k+1)$–ї та наступних похідних розв'язку. У зв'язку з цим вводиться клас, так званих, $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків, де $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$, та досліджується питання про наявність та асимптотику $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків в особливих випадках, коли $\lambda_0 = \frac{n-j-1}{n-j}$, $j = \overline{n-k+2, n-1}$. Усі інші неособливі випадки були досліджені у попередніх роботах автора. Отримані результати суттєво доповнюють дослідження про існування розв'язків такого вигляду в монографії І. Т. Кігурадзе та Т. А. Чантурія для рівнянь загального вигляду та диференціальних рівнянь типу Емдена-Фаулера, в яких забезпечується достатньо жорстке обмеження на $(n-k+1)$–у похідну розв'язку.

Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння, вищий порядок, правильно змінні нелінійності, клас $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків, умови існування, асимптотика розв'язків.

Korepanova K. S.

Asymptotics of one class of solutions of n-th order ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities

Summary

In the present paper the existence conditions of solutions, for each of which there exists a number $k \in \{3, \ldots, n\}$ such that $(n-k)$-th derivative of solution tends to nonzero constant as the argument tends to $+\infty$, of a binomial non-autonomous n-th order ordinary differential equation with regularly varying nonlinearities and the asymptotic representations of their derivatives of order up to $n-1$ are established. During the investigation of this question the problems with the asymptotics of $(n-k+1)$–st and the subsequent derivatives of order $\leqslant n-1$ are arose. As a result, the class of so-called $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–solutions, where $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$, is introduced and the question of existence and asymptotics of $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–solutions in singular cases, when $\lambda_0 = \frac{n-j-1}{n-j}$, $j = \overline{n-k+2, n-1}$, is considered. All other nonsingular cases have been studied in the previous author's works. These results are essentially complement the research concerning the existence of such solutions in the monograph by I. T. Kiguradze and T. A. Chanturiya for the equations of general type and the differential equations of Emden-Fauler type, where a considerably strict restriction to the $(n-k+1)$-st derivative of solution is provided for.

Key words: nonlinear differential equations, higher order, regularly varying nonlinearities, class of $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–solutions, existence conditions, asymptotics of solutions.

References

1. **Burbaki, N.** (1965). *Funktsii deystvitelnogo peremennogo [Functions of real variables].* Moscow: Nauka, 424 p.

2. **Evtukhov, V. M.** (1998). *Asymptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnyh uravneniy [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous differential equations]*. Kiev: Diss. dokt. phys-mat. nauk: 01.01.02, 295 p.
3. **Evtukhov, V. M., Klopot, A. M.** (2014). Asimptoticheskoe povedenie resheniy obyknovennykh differentsialnykh uravneniy n-go poryadka s pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [The asymptotic behaviour of solutions of n-th order ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities.] *Diff. uravneniya*, Vol. 50, №5. – P. 584–600.
4. **Evtukhov, V. M., Korepanova, K. S.** (2017). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy differentsialnykh uravneniy s pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic representations of solutions of differential equations with regularly varying nonlinearities.] *Ukr. mat. zhurn.*, Vol. 69, № 9. – P. 1198–1216.
5. **Evtukhov, V. M., Samoylenko, A. M.** (2010). Usloviya suschestvovaniya ischezayuschikh v osoboy tochke resheniy u veschestvennykh neavtonomnykh sistem kvazilineynykh differentsialnykh uravneniy [Existence conditions of solutions vanishing at the critical point of real nonautonomous system of quasi-linear differential equations.] *Ukr. mat. zh.*, Vol. 62, №1. – P. 52–80.
6. **Evtukhov, V. M., Samoylenko, A. M.** (2011). Asimptoticheskoe predstavlenie resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy s pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [The asymptotic representation of solutions of non-autonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities.] *Diff. uravneniya*, Vol. 47, №5. – P. 628–650.
7. **Kiguradze, I. T., Chanturiya, T. A.** (1990). *Asimptoticheskie svoystva resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Asymptotic properties of solutions of ordinary dufferential equations]* Moscow: Nauka, 430 p.
8. **Korepanova, K. S.** (2016). Umovy isnuvannya rozvjazkiv stepenevogo vydu u dyfferentsialnykh rivnyan z pravylno zminnymy neliniynostyamy [Existence conditions of power-mode solutions of differential equations with regularly varying nonlinearities]. *Bukov. mat. zh.*, Vol. 4, № 3–4. – P. 75–79.
9. **Seneta, E.** (1985). *Pravilno menyayuschiesya funktsii [Properly varying functions]* Moscow: Nauka, 144 p.
10. **Evtukhov, V. M., Korepanova, K. S.** (2017). Asymptotic Behaviour of Solutions of One Class of n-th Order Differential Equations. *Memoirs on Diff. Eq. and Math. Phys.*, Vol. 71. – P. 111–124.