УДК 517.9

Т. А. Комлева[1], Л. И. Плотникова[2], А. В. Плотников[1,3]
[1]Одесская государственная академия строительства и архитектуры
[2]Одесский национальный политехнический университет
[3]Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОЖЕСТВЕННОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В последнее время многие авторы рассматривали вопросы существования, единственности и свойства решений множественнозначных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, уравнений высших порядков, исследовали импульсные и управляемые системы в рамках теории множественнозначных уравнений. Очевидно, что получение всех этих результатов было бы невозможно без развития теории множественнозначного анализа. В частности при рассмотрении множественнозначных дифференциальных уравнений, когда правая часть удовлетворяет условиям Каратеодори, в качестве решений рассматриваются абсолютно непрерывные множественнозначные отображения. В статье показывается, что абсолютно непрерывные множественнозначные отображения (при имеющихся понятиях производной и интеграла) не удовлетворяют тем свойствам, которым удовлетворяют однозначные абсолютно непрерывные функции и предлагается ввести дополнительно понятие интегрально абсолютно непрерывного множественнозначного отображения.
MSC: 34A60, 34A12.
Ключевые слова: множественнозначность, абсолютная непрерывность, производная Хукухары .

Введение. В последнее время в рамках теории множественнозначных уравнений были рассмотрены свойства решений множественнозначных дифференциальных уравнений, множественнозначных дифференциальных включений, множественнозначных интегро-дифференциальных уравнений и множественнозначных интегральных уравнений, а также исследовались импульсные множественнозначные системы и управляемые множественнозначные системы (см. [1-6] и ссылки в них). Очевидно, что получение всех этих результатов было невозможно без развития теории множественнозначного анализа. В данной работе сделаны некоторые замечания к абсолютной непрерывности множественнозначных отображений и тем самым показано отличие множественнозначного случая от однозначного, а так же вводится дополнительно понятие интегрально абсолютно непрерывного множественнозначного отображения.

Основные результаты

1. Необходимые определения и обозначения. Пусть R^n - n-мерное пространство с евклидовой метрикой $d(\cdot,\cdot)$.

Определение 1. [7] *Функция $f:[a,b]\to R^n$ называется абсолютно непрерывной на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любой конечной системы непересекающихся интервалов $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^m$ из отрезка*

Получена 17.08.2017

$[a,b]$ *таких, что* $\sum\limits_{k=1}^{m}(b_k - a_k) < \delta$, *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} d(f(b_k), f(a_k)) < \varepsilon.$$

Теорема 1. [7, 8] *Следующие утверждения являются эквивалентными:*

1) *функция* $f(\cdot)$ *абсолютно непрерывна на* $[a,b]$;

2) *функция* $f(\cdot)$ *дифференцируема почти всюду на* $[a,b]$, $f'(\cdot)$ *интегрируема по Лебегу на* $[a,b]$ *и для всех* $x \in [a,b]$ *выполняется равенство* $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(s)ds$;

3) *существует интегрируемая по Лебегу на отрезке* $[a,b]$ *функция* $g(\cdot)$ *такая, что для всех* $x \in [a,b]$ *выполняется равенство* $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x g(s)ds$.

Замечание 1. *Следовательно, абсолютно непрерывные функции и только они восстанавливаются по своей производной интегрированием (вообще говоря, по Лебегу). Это свойство абсолютно непрерывных функций позволяет рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные включения, правая часть которых удовлетворяет условиям Каратеодори [9-11]. Для таких уравнений решениями определяются абсолютно непрерывные функции, которые удовлетворяют уравнению почти всюду на рассматриваемом промежутке.*

Пусть $conv(R^n)$ - метрическое пространство всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \max\left\{\max_{a\in A}\min_{b\in B} d(a,b),\ \max_{b\in B}\min_{a\in A} d(a,b)\right\},$$

где $A,B \in conv(R^n)$.

Как известно, пространство $conv(R^n)$ не является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на скаляр, так как в общем случае нельзя ввести понятие противоположного для $A \in conv(R^n)$ элемента, то есть в общем случае $A + (-1)A \neq \{0\}$, хотя, если $A = \{a\} \in R^n$, то для него противоположный элемент существует.

Отсутствие противоположного элемента в пространстве $conv(R^n)$ приводит к неоднозначному введению понятия разности множеств и условиям ее существования. Наиболее распространенной и используемой в научных публикациях является разность Хукухары [12].

Определение 2. [12] *Пусть* $X,Y \in conv(R^n)$, *а множество* $Z \in conv(R^n)$ *таково, что* $X = Y + Z$. *Тогда множество* Z *мы будем называть разностью по Хукухаре множеств* X *и* Y *и писать* $Z = X \overset{h}{-} Y$.

Основными свойствами разности Хукухары [4] являются следующие:

1) если разность Хукухары двух множеств $A\overset{h}{-}B$ существует, то она единственная;
2) $A\overset{h}{-}A = \{0\}$ для любого $A \in conv(R^n)$;
3) $(A + B)\overset{h}{-}B = A$ для любых $A,B \in conv(R^n)$.

Данная разность позволяет ввести следующее определение производной:

Определение 3. [12] *Множественнозначное отображение $F : [a,b] \to conv(R^n)$ называется дифференцируемым по Хукухаре в точке $x \in [a,b]$, если существует $D_H F(x) \in conv(R^n)$ такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{1}{\Delta}(F(x + \Delta)\overset{h}{-}F(x)) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{1}{\Delta}(F(x)\overset{h}{-}F(x - \Delta))$$

существуют и равны $D_H F(x)$. Множество $D_H F(x)$ при этом называется производной Хукухары множественнозначного отображения $F : [a,b] \to conv(R^n)$ в точке x.

Заметим, что в данном определении предполагается, что для всех достаточно малых $\Delta > 0$ разности $F(x + \Delta)\overset{h}{-}F(x)$, $F(x)\overset{h}{-}F(x - \Delta)$ существуют.

Далее покажем, что теорема аналогичная теореме 1 не справедлива для абсолютно непрервных множественнозначных отображений при имеющихся определениях абсолютно непрерывного отображения, производной и интеграла.

2. Абсолютно непрерывные множественнозначные отображения. В начале приведем определение абсолютно непрервывного множественнозначного отображения:

Определение 4. [13, 14] *Множественнозначное отображение $F : [a,b] \to conv(R^n)$ называется абсолютно непрерывным на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой конечной системы непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^m$ из отрезка $[a, b]$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{m}(b_k - a_k) < \delta$, имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} h(F(b_k),F(a_k)) < \varepsilon.$$

Очевидно, что данное определение обобщает определение 1 абсолютно непрервной функции в пространстве R^n. Однако, далее мы покажем, что утверждения теоремы 1 не будут верны для множественнозначного случая.

Для этого введем следующие обозначения:

$AC[a,b]$ – множество множественнозначных отображений $F : [a,b] \to conv(R^n)$, удовлетворяющих определению 4.

$ACD[a,b]$ – множество множественнозначных отображений $F : [a,b] \to conv(R^n)$ таких, что $F(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре почти всюду на $[a,b]$, $D_H F(\cdot)$ интегрируемо по Хукухаре [12] на $[a,b]$ и для всех $x \in [a,b]$ выполняется равенство

$$F(x) = F(a) + \int\limits_a^x D_H F(s)ds.$$

$ACI[a,b]$ – множество множественнозначных отображений $F : [a,b] \to conv(R^n)$ таких, что существует интегрируемое по Хукухаре [12] на отрезке $[a,b]$ множественнозначное отображение $G(\cdot)$ такое, что для всех $x \in [a,b]$ выполняется равенство

$$F(x) = F(a) + \int\limits_a^x G(s)ds. \tag{1}$$

Далее докажем, что $ACD[a,b] = ACI[a,b] \subset AC[a,b]$, т.е. утверждения теоремы 1 не будут верны для множественнозначного случая.

Лемма 1. $ACI[a,b] \subset AC[a,b]$.

Доказательство. Возьмем произвольное множественнозначное отображение $F(\cdot) \in ACI[a,b]$. Из теоремы 4.1 [14] следует, что для того, чтобы множественнозначное отображение $F : [a,b] \to conv(R^n)$ было представимо в виде (1) необходимо и достаточно, чтобы оно было абсолютно непрерывно в смысле определения 4 и удовлетворяло условию

a) для любых $x', x'' \in [a,b]$, $x' < x''$ существует $R(x',x'') \in conv(R^n)$ такое, что $F(x'') = F(x') + R(x',x'')$.

Следовательно, $ACI[a,b] \subset AC[a,b]$. Лемма доказана.

Лемма 2. $ACI[a,b] = ACD[a,b]$.

Доказательство. Возьмем произвольное множественнозначное отображение $F(\cdot) \in ACI[a,b]$. Следовательно, существует интегрируемое по Хукухаре множественнозначное отображение $G(\cdot)$ такое, что $F(x) = F(a) + \int\limits_a^x G(s)ds$ для всех $x \in [a,b]$.

Из [12] следует, что для почти всех $x \in [a,b]$ справедливо равенство

$$D_H\left(F(a) + \int\limits_a^x G(s)ds\right) = \{0\} + D_H\left(\int\limits_a^x G(s)ds\right) = G(x).$$

Следовательно, множественнозначное отображение $F(\cdot)$ диференцируемо по Хукухаре для почти всех $x \in [a,b]$ и $D_H F(x) \equiv G(x)$. Отсюда, $F(\cdot) \in ACD[a,b]$, то есть $ACI[a,b] \subset ACD[a,b]$.

Возьмем произвольное множественнозначное отображение $F(\cdot) \in ACD[a,b]$. Следовательно, $F(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре почти всюду на $[a,b]$, $D_H F(\cdot)$ интегрируемо по Хукухаре на $[a,b]$ и для всех $x \in [a,b]$ выполняется равенство $F(x) = F(a) + \int\limits_a^x D_H F(s)ds$. Взяв $G(x) \equiv D_H F(x)$ для всех $x \in [a,b]$, получаем, что $F(\cdot) \in ACI[a,b]$, то есть $ACD[a,b] \subset ACI[a,b]$. Лемма доказана.

Лемма 3. $ACD[a,b] \subset AC[a,b]$.

Доказательство. Из леммы 1 мы имеем $ACI[a,b] \subset AC[a,b]$. Из леммы 2 $ACI[a,b] = ACD[a,b]$. Следовательно, $ACD[a,b] \subset AC[a,b]$. Лемма доказана.

Для демонстрации полученных результатов приведем следующие примеры.

Пример 1. *Пусть* $F(x) = [-\cos(x), \cos(x)]$ *для* $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$. *Множественнозначное отображение* $F(\cdot)$ *не дифференцируемо по Хукухаре на сегменте* $[0,\frac{\pi}{2}]$ *и не существует множественнозначного отображения* $G(\cdot)$ *такого, что* $F(x) = F(a) + \int\limits_0^x G(s)ds$ *для всех* $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, *так как диаметр* $F(x)$, *равный* $2\cos(x)$, *на этом сегменте убывает.*

Теперь покажем, что множественнозначное отображение $F(\cdot)$ *является абсолютно непрерывным множественнозначным отображением на отрезке* $[0,\frac{\pi}{2}]$. *Выберем любое* $\varepsilon > 0$ *и возьмем* $\delta = \varepsilon$. *Возьмем любую конечную систему непересекающихся интервалов* $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^m$ *из отрезка* $[0,\frac{\pi}{2}]$ *такую, что* $\sum\limits_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta = \varepsilon$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^m h(F(b_k),F(a_k)) = \sum_{k=1}^m |\cos(b_k) - \cos(a_k)| \leqslant \sum_{k=1}^m |b_k - a_k| < \delta = \varepsilon.$$

Следовательно, множественнозначное отображение $F(\cdot)$ *является абсолютно непрерывным множественнозначным отображением в смысле определения 4.*

Пример 2. *Пусть для* $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ *и* $F(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} K$, *где* $K = \{f \in R^2 : |f_i| \leqslant 1, i = 1,2\}$.

Так как для любых двух $x_1, x_2 \in [0,\frac{\pi}{2}]$ *разность Хукухары* $F(x_1) \overset{h}{-} F(x_2)$ *не существует, то множественнозначное отображение* $F(x)$ *не дифференцируемо по Хукухаре на сегменте* $[0,\frac{\pi}{2}]$, *т.е.* $F(\cdot) \notin ACD[0,\frac{\pi}{2}]$.

Так как множественнозначное отображение $F(\cdot)$ *не удовлетворяет условиям теоремы 4.1 из [14], то не существует множественнозначного отображения* $G(\cdot)$ *такого, что* $F(x) = F(a) + \int\limits_0^x G(s)ds$ *для всех* $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, *т.е.* $F(\cdot) \notin ACI[0,\frac{\pi}{2}]$.

Теперь покажем, что множественнозначное отображение $F(\cdot)$ *является абсолютно непрерывным множественнозначным отображением на отрезке* $[0,\frac{\pi}{2}]$ *в смысле определения 4. Выберем любое* $\varepsilon > 0$ *и возьмем* $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. *Возьмем любую конечную систему непересекающихся интервалов* $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^m$ *из отрезка* $[0,\frac{\pi}{2}]$ *такую, что* $\sum\limits_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^m h(F(b_k),F(a_k)) <$$

$$< \sqrt{2} \sum_{k=1}^m \sqrt{\left(\sin\left(b_k + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(a_k + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(b_k + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(a_k + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2} \sum_{k=1}^m \sqrt{2 + 2\sin\left(b_k + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(a_k + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(b_k + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(a_k + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt{2} \sum_{k=1}^m \sqrt{2 + 2\cos(b_k - a_k)} = 2 \sum_{k=1}^m \sqrt{1 + \cos(b_k - a_k)} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m}\sqrt{2\cos^2\left(\frac{b_k-a_k}{2}\right)} = 2\sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}|\cos\left(\frac{b_k-a_k}{2}\right)| < \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}|b_k-a_k| < \sqrt{2}\delta = \varepsilon.$$

Следовательно, множественнозначное отображение $F(\cdot)$ является абсолютно непрерывным множественнозначным отображением на отрезке $[0,\frac{\pi}{2}]$ в смысле определения 4.

Введем определение интегрального абсолютно непрерывного множественнозначного отображения.

Определение 5. *Множественнозначное отображение $F : [a,b] \to conv(R^n)$ называется интегрально абсолютно непрерывным на отрезке $[a,b]$, если существует интегрируемое по Хукухаре множественнозначное отображение $G : [a,b] \to conv(R^n)$ такое, что $F(x) \equiv F(a) + \int\limits_a^x G(s)ds$.*

Замечание 2. *Как известно, аналогичное определение так же используют для определения абсолютно непрервыных функций на отрезке $[a,b]$ в однозначном случае (смотри, например, [10,15]) и в отличие от множественнозначного случая, согласно теоремы 1, в однозначном случае это определение эквивалентно определению 1.*

Тогда из лемм 1-3 следует справедливость следующей теоремы аналогичной теореме 1:

Теорема 2. *Следующие утверждения являются эквивалентными:*

1) *отображение $F(\cdot)$ интегрально абсолютно непрерывно на $[a,b]$;*
2) *отображение $F(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре почти всюду на $[a,b]$, отображение $D_H F(\cdot)$ интегрируемо по Хукухаре на $[a,b]$ и для всех $x \in [a,b]$ справедливо равенство $F(x) = F(a) + \int\limits_a^x D_H F(s)ds$;*
3) *существует интегрируемое по Хукухаре на отрезке $[a, b]$ отображение $G(\cdot)$ такое, что для всех $x \in [a,b]$ справедливо равенство $F(x) = F(a) + \int\limits_a^x G(s)ds$.*

Заключение. В заключение сделаем несколько замечаний:

Замечание 3. *Из лемм 1-3 следует, что в отличии от теории однозначных функций, для множественнозначных отображений, удовлетворяющих условиям определения 4, не выполняется теорема 1.*

Замечание 4. *При рассмотрении дифференциальных уравнений с производной Хукухары, удовлетворяющих условию Каратеодори, при введение понятия решения необходимо использовать интегрально абсолютно непрерывные множественнозначные отображения.*

Замечание 5. *В случае, когда вместо производной Хукухары рассматривается обобщенная производная в смысле [16-18], необходимо использовать следующее определение интегрально абсолютно непрерывного множественнозначного отображения:*

Определение 6. *Множественнозначное отображение* $F : [a,b] \to conv(R^n)$ *называется интегрально абсолютно непрерывным на отрезке* $[a,b]$, *если существует интегрируемое по Хукухаре множественнозначное отображение* $G : [a,b] \to conv(R^n)$ *такое, что существует конечное разбиение отрезка* $[a,b]$ *точками* $a = x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = b$ *такое, что на каждом сегменте* $[x_i,x_{i+1}]$ *выполняется одно из равенств* $F(x) = F(x_i) + \int\limits_{x_i}^{x} G(s)ds$ *или* $F(x_i) = F(x) + \int\limits_{x_i}^{x} G(s)ds$.

Тогда будет выполняться следующая теорема аналогичная теореме 2:

Теорема 3. *Следующие утверждения являются эквивалентными:*

1) *отображение* $F(\cdot)$ *интегрально абсолютно непрерывно в смысле определения 6 на* $[a,b]$;
2) *отображение* $F(\cdot)$ *дифференцируемо в смысле обобщенной производной [16-18] почти всюду на* $[a,b]$, *отображение* $DF(\cdot)$ *интегрируемо по Хукухаре на* $[a,b]$ *и существует конечное разбиение отрезка* $[a,b]$ *точками* $a = x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = b$ *такое, что на каждом сегменте* $[x_i,x_{i+1}]$ *выполняется одно из равенств* $F(x) = F(x_i) + \int\limits_{x_i}^{x} DF(s)ds$ *или* $F(x_i) = F(x) + \int\limits_{x_i}^{x} DF(s)ds$.
3) *существует интегрируемое по Хукухаре на отрезке* $[a, b]$ *отображение* $G(\cdot)$ *такое, что существует конечное разбиение отрезка* $[a,b]$ *точками* $a = x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = b$ *такое, что на каждом сегменте* $[x_i,x_{i+1}]$ *выполняется одно из равенств* $F(x) = F(x_i) + \int\limits_{x_i}^{x} G(s)ds$ *или* $F(x_i) = F(x) + \int\limits_{x_i}^{x} G(s)ds$.

Замечание 6. *В случае, если размерность пространства равняется единице и вместо производной Хукухары рассматривается обобщенная производная в смысле [19], необходимо использовать следующее определение интегрально абсолютно непрерывного сегментнозначного отображения.*

Определение 7. *Сегментнозначное отображение* $F : [a,b] \to conv(R)$ *называется интегрально абсолютно непрерывным на отрезке* $[a,b]$, *если существует интегрируемое по Хукухаре сегментнозначное отображение* $G : [a,b] \to conv(R)$ *такое, что на отрезке* $[a,b]$ *выполняется одно из равенств* $F(x) = F(a) + \int\limits_{a}^{x} G(s)ds$ *или* $F(a) = F(x) + (-1)\int\limits_{a}^{x} G(s)ds$.

Тогда будет выполняться следующая теорема аналогичная теореме 2:

Теорема 4. *Следующие утверждения являются эквивалентными:*

1) *отображение $F(\cdot)$ интегрально абсолютно непрерывное в смысле определения 7 на $[a,b]$;*

2) *отображение $F(\cdot)$ дифференцируемо в смысле обобщенной производной [19] почти всюду на $[a,b]$, отображение $D_{gh}F(\cdot)$ интегрируемо по Хукухаре на $[a,b]$ и для всех $x \in [a,b]$ выполняется одно из равенство $F(x) = F(a) + \int\limits_a^x D_{gh}F(s)ds$ или $F(a) = F(x) + (-1)\int\limits_a^x D_{gh}F(s)ds$;*

3) *существует интегрируемое по Хукухаре на отрезке $[a,b]$ отображение $G(\cdot)$ такое, что для всех $x \in [a,b]$ выполняется одно из равенство $F(x) = F(a) + \int\limits_a^x G(s)ds$ или $F(a) = F(x) + (-1)\int\limits_a^x G(s)ds$.*

Замечание 7. *Очевидно, что замечания 3-6 справедливы для нечетких отображений и для соответствующих нечетких дифференциальных уравнений [4, 20-24].*

1. **Aubin J.-P.** Differential Inclusions. Set-valued maps and Viability Theory / J.-P. Aubin, A. Cellina. – Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer–Verlag, 1984, 342 p.
2. **Lakshmikantham V.** Theory of set differential equations in metric spaces / V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi. – Cambridge Scientific Publishers, 2006, 204 p.
3. **Perestyuk N.A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities / N.A. Perestyuk, V.A. Plotnikov, A.M. Samoilenko, N.V. Skripnik. – de Gruyter Stud. Math. Vol. 40. – Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co, 2011, 309 p.
4. **Плотников А.В.** Дифференциальные уравнениния с четкой и нечеткой правой частью. Асимптотические методы / А.В. Плотников, Н.В. Скрипник. – Одесса: АстроПринт, 2009, 192 с.
5. **Плотников В.А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999, 355 с.
6. **Половинкин Е.С.** Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин. – М.: Физматлит, 2014, 597 с.
7. **Natanson I.P.** Theory of functions of a real variable / I.P. Natanson. – Translated by Leo F. Boron with the collaboration of Edwin Hewitt. – New York: Frederick Ungar Publishing Co., 1955, 277 p.
8. **Кадец В.М.** Функциональный анализ / В.М. Кадец. – Харьков: ХНУ, 2006, 607 с.
9. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985, 255 с.
10. **Егоров А.И.** Классификация решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / А.И. Егоров. – М.: Физматлит, 2013, 108 с.

11. **Финогенко И.А.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / И.А. Финогенко. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013, 82 с.

12. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe / M. Hukuhara. // Funkcial. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 205–223.

13. **Kikuchi N.** On the absolute continuity of multi-functions and orientor fields / N. Kikuchi, Y. Tomita. // Funkcial. Ekvac. – 1971. – №14. – P. 161–170.

14. **Arstein Z.** On the calculus of closed set-valued functions / Z. Arstein. // Indiana Univ. Math. J. – 1974. – V.24, №5. – P. 433–441.

15. **Nikolsky S.M.** A course of mathematical analysis / S.M. Nikolsky. – Vol. 2. Reprint of the 1977 translation by V. M. Volosov. – Moscow: Mir, 1985, 440 p.

16. **Plotnikov A.V.** Set-Valued Differential Equations With Generalized Derivative / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // Journal of Advanced Research in Pure Mathematics. – 2011. – V. 3, №1. – P. 144–160.

17. **Plotnikov A.V.** An Existence and Uniqueness Theorem to the Cauchy Problem for Generalised Set Differential Equations / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis.– 2013. – V.20, №4. – P. 433–445.

18. **Плотников А.В.** Многозначные дифференциальные уравнения с обобщенной производной / А.В. Плотников, Н.В. Скрипник. // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, №10. – С. 1350–1362.

19. **Bede B.** Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations / B. Bede, L. Stefanini. – Univ. Urbino "Carlo Bo", Working Paper Series in Economics, Math. and Statistics, WP-EMS ♯ 2008/03, 2008.

20. **Plotnikov A.V.** Fuzzy Differential Equations with Generalized Derivative / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik // Journal of Fuzzy Set Valued Analysis. – 2012. – V. 2012, Article ID jfsva00113. – 12 pages.

21. **Plotnikov A.V.** New Definition of a Generalized Fuzzy Derivative / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik // Journal of Advanced Research in Pure Mathematics. – 2014. - V.6, №3. – P. 69-77.

22. **Bede B.** Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations / B. Bede, S.G. Gal // Fuzzy Sets Syst. – 2005. - №. 151. - P. 581–599.

23. **Gomes L.T.** Fuzzy differential equations in various approaches. / L.T. Gomes, L.C. de Barros, B. Bede – SpringerBriefs in Mathematics. Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 2015, 119 p.

24. **Bede B.** Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic. / B. Bede – Studies in fuzziness and soft computing, Vol. 295. Berlin-Heidelberg: Springer-verlag, 2013, 258 p.

Комлева Т. О., Плотнікова Л. І., Плотніков А. В., Скрипник Н. В.
Деякі зауваження до абсолютної неперервності множиннозначних відображень

Резюме

В останній час багато авторів розглядали питання існування, єдиності та властивості розв'язків множиннозначних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, рівнянь вищих порядків, досліджували імпульсних та керованих систем в рамках теорії

множиннозначних рівнянь. В очевидь, отримання всіх цих результатів було б не можливим без розвитку теорії множиннозначного аналізу. Зокрема при розгляді множиннозначних диференціальних рівнянь, коли права частина задовольняє умовам Каратеодорі, як рішень розглядаються абсолютно неперервні множиннозначні відображення. У статті показується, що абсолютно неперервні множиннозначні відображення (при наявних поняттях похідної та інтеграла) не задовольняють тим властивостям, яким задовольняють однозначні абсолютно неперервні функції та пропонується ввести додатково поняття інтегрально абсолютно неперервного множиннозначного відображення.
Ключові слова: множиннозначність, абсолютна неперервність, похідна Хукухари .

Komleva T. A., Plotnikova L. I., Plotnikov A. V.
Some remarks on the absolute continuity of set-valued mappings

Summary

Recently, many authors have considered the existence, uniqueness and properties of solutions of set-valued differential and integral-differential equations, higher-order equations and investigated impulsive and control systems within the framework of the theory of set-valued equations. Obviously, obtaining all these results would be impossible without the development of the theory of set-valued analysis. In particular, when considering set-valued differential equations, when the right-hand side satisfies Caratheodory conditions, absolutely continuous set-valued mappings are considered as solutions. The article show that absolutely continuous set-valued mappings (under the existing concepts of the derivative and integral) do not satisfy those properties that are satisfied by single-valued absolutely continuous functions and therefore it is proposed to introduce additionally the concept of a integrally absolutely continuous set-valued mapping.
Key words: set-valued, absolutely continuous, Hukuhara derivative.

References

1. Aubin, J.-P., Cellina, A. (1984). *Differential Inclusions. Set-valued maps and Viability Theory.* Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer–Verlag, 342 p.
2. Lakshmikantham, V., Granna Bhaskar, T. and Vasundhara Devi, J. (2006). *Theory of set differential equations in metric spaces.* Cambridge Scientific Publishers, 204 p.
3. Perestyuk, N.A., Plotnikov, V.A., Samoilenko, A.M. and Skripnik, N.V. (2011). *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities.* de Gruyter Stud. Math. Vol. 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co, 309 p.
4. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2009). *Differential equations with "clear" and fuzzy multivalued right-hand side. Asymptotics methods.* Odessa: AstroPrint, 192 p.
5. Plotnikov, V.A., Plotnikov, A.V. and Vityuk, A.N. (1999). *Differential equations with multivalued right-hand side. Asymptotic methods.* Odessa: AstroPrint, 355 p.
6. Polovinkin, E.S. (2014) *Multivalued analysis and differential inclusions.* Moscow: FIZMATLIT, 597 p.
7. Natanson, I.P. (1955). *Theory of functions of a real variable.* Translated by Leo F. Boron with the collaboration of Edwin Hewitt. New York: Frederick Ungar Publishing Co., 277 p.

8. Kadets, V.M. (2006). *Functional Analysis.* Kharkiv: V. N. Karazin Kharkiv National University, 607 p.
9. Filippov, A.F. (1985). *Differential equations with discontinuous righthand sides.* Kluwer Academic Publishers, 307 p.
10. Egorov, A.I. (2013) *Classification of solutions of ordinary differential equations of the first order.* Moscow: FIZMATLIT, 108 p.
11. Finogenko, I.A. (1985). *Differential equations with discontinuous righthand sides.* Irkutsk: IDSTU SO RAN, 82 p.
12. Hukuhara, M. (1967). Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcial. Ekvac.*, №10, P. 205–223.
13. Kikuchi, N., Tomita, Y. (1971). On the absolute continuity of multi-functions and orientor fields. *Funkcial. Ekvac.*, №14, P. 161–170.
14. Arstein, Z. (1974). On the calculus of closed set-valued functions. *Indiana Univ. Math. J.*, V.24, №5, P. 433–441.
15. Nikolsky, S.M. (1985). *A course of mathematical analysis.* Vol. 2. Reprint of the 1977 translation by V. M. Volosov. Moscow: Mir, 440 p.
16. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2011). Set-Valued Differential Equations With Generalized Derivative. *Journal of Advanced Research in Pure Mathematics*, V.3, №1, P. 144–160.
17. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2013). An Existence and Uniqueness Theorem to the Cauchy Problem for Generalised Set Differential Equations. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis*, V.20, №4, P. 433–445.
18. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2014). Conditions for the Existence of Local Solutions of Set-Valued Differential Equations with Generalized Derivative. *Ukrainian Math. J.*, V.65, № 10, P. 1498–1513
19. Bede, B., Stefanini, L. (2008). *Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations.* Univ. Urbino "Carlo Bo", Working Paper Series in Economics, Math. and Statistics, WP-EMS ♯ 2008/03.
20. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2012). Fuzzy Differential Equations with Generalized Derivative. *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, V. 2012, Article ID jfsva00113, 12 pages.
21. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2014). New Definition of a Generalized Fuzzy Derivative. *Journal of Advanced Research in Pure Mathematics*, V.6, №3, P. 69–77.
22. Bede, B., Gal, S.G. (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.*, №151, P. 581–599.
23. Gomes, L.T., de Barros, L.C. and Bede, B. (2015). *Fuzzy differential equations in various approaches.* SpringerBriefs in Mathematics. Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 119 p.
24. Bede, B. (2013). *Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic.* Studies in fuzziness and soft computing, V. 295. Berlin-Heidelberg: Springer-verlag, 258 p.