

УДК 539.375

М. В. Дудик, Ю. В. Решітник, В. М. Феньків

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

КОНТАКТ БЕРЕГІВ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ

В умовах плоскої деформації за допомогою методу Вінера-Хопфа знайдено розв'язок задачі про розрахунок маломасштабної контактної зони біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з куткової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Отримано вирази для визначення довжини контактної зони і контактного напруження та виконано числовий аналіз їх залежності від пружних характеристик з'єднаних матеріалів, кута зламу межі поділу середовищ, конфігурації навантаження і коефіцієнта тертя.

MSC: 74B20, 74C05, 74G70.

Ключові слова: контактна зона, ламана межа поділу, міжфазна тріщина.

Вступ. Дослідження напружено-деформованого стану у кусково-однорідному тілі біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з куткової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів, виявили наявність комплексного показника сингулярності напружень на певних інтервалах кутів зламу, які залежать від пружних характеристик з'єднаних матеріалів [1]. Комплексні значення показника сингулярності передбачають просторові осциляції берегів тріщини і, як наслідок, їх взаємний перетин, неможливий з фізичної точки зору. Для усунення цього протиріччя М.Комніоу [2] була запропонована модель тріщини, що припускає контакт берегів біля її вершини. В [3] за допомогою методу Вінера-Хопфа знайдено аналітичний розв'язок задачі про контактну зону малих розмірів для міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі поділу, при наявності тертя берегів і навантаженні, заданому коефіцієнтом інтенсивності напружень. В даній роботі аналогічне дослідження виконано у більш загальному випадку ламаної межі поділу.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ 1. Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглядається задача про розрахунок розмірів маломасштабної контактної зони біля вершини міжфазної тріщини, яка співпадає з кутовою точкою ламаної межі поділу двох різних пружних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2 , коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 і кутом зламу α . Контактну зону моделюємо розрізом, береги якого взаємодіють за законом сухого тертя Кулона з коефіцієнтом тертя μ . На розрізі передбачається стискувальне нормальне напруження і допускається стрибок лише дотичної складової переміщення.

Вважаючи довжину контактної зони s значно меншою порівняно з довжиною тріщини L та іншими суттєвими розмірами тіла, будемо розглядати тіло як кусково-однорідну площину з півнескінченим розрізом на одній з меж поділу, частина берегів якого, прилегла до вершини, перебуває у контакті, а решта - вільна від навантаження (Рис.1).

Малість контактної зони дозволяє сформулювати умову на нескінченості у вигляді вимоги можливості зшивання розшукуваного розв'язку з асимптотичним

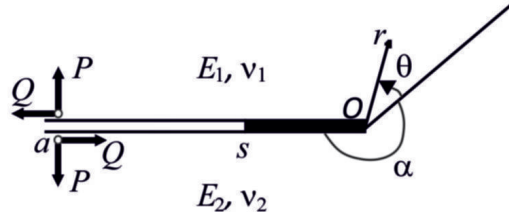


Рис. 1. Розрахункова модель контактної зони

розв'язком біля вершини тріщини аналогічної задачі про міжфазну тріщину без контакту берегів [4]. В результаті приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\theta = 0 : \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (1)$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha) : \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta; \quad (2)$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha) : \quad r < s, \quad \langle u_\theta \rangle = 0; \quad r > s, \quad \sigma_\theta = 0; \quad (3)$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha), \quad r \rightarrow \infty : \quad \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle = -\frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} \sum_i (2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) r^{\lambda_i} + o(1/r). \quad (4)$$

де $\langle f \rangle$ - стрибок величини f ; K_i - коефіцієнти інтенсивності напружень; λ_i - показники сингулярності, які є коренями характеристичного рівняння ($-1 < \text{Re}\lambda_i < 0$) [4]:

$$D(-\lambda - 1) = 0, \quad (5)$$

$$D(p) = (1 + \kappa_1)^2 \Delta_1 + e^2(1 + \kappa_2)^2 \Delta_2 - 4(1 - e)^2 \Delta_1 \Delta_2 - 2(1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2) \Delta_3 + \\ - 4(1 - e)(1 + \kappa_1) \Delta_1 \sin^2 p(2\pi - \alpha) + 4(1 - e)e(1 + \kappa_2) \Delta_2 \sin^2 p\alpha,$$

$$\Delta_1 = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha,$$

$$\Delta_2 = p^2 \sin^2 \beta - \sin^2 p\beta, \quad \beta = 2\pi - \alpha,$$

$$\Delta_3 = p^2 \sin^2 \alpha + \sin p\alpha \sin p(2\pi - \alpha) \cos 2p\pi,$$

$$e = \frac{E_1(1 + \nu_2)}{E_2(1 + \nu_1)}, \quad \kappa_i = 3 - 4\nu_i,$$

$$F(\lambda_i, \alpha) = \frac{e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)F_1(\lambda_i, \alpha) + eF_2(\lambda_i, \alpha)}{(1 + \kappa_1)(\lambda + 2)\Delta'_B(\lambda)},$$

$$F_1(\lambda_i, \alpha) = (1 + \kappa_1)\psi_1 + 2(1 - e)(\psi_2 - \psi_1) + e(1 + \kappa_2)(\psi_4 - \psi_1),$$

$$F_2(\lambda_i, \alpha) = 2e(1 + \kappa_2)t_3[(e - 1)\psi_6 - e(1 + \kappa_2)] + 4e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)\psi_1 + \\ + 4(1 - e)^2 t_3 \psi_5 - (1 + \kappa_1)[(1 + \kappa_1) - 4(1 - e)t_2]\psi_5,$$

$$\psi_1 = \lambda \sin \alpha \sin(2\lambda\pi + \alpha) + \cos 2\lambda\pi - \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(2\pi - \alpha),$$

$$\psi_2 = (\lambda^2 + 3\lambda + 2) \sin^2 \alpha \cos 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha),$$

$$\psi_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \cos 2\lambda\pi \sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$\begin{aligned}
\psi_4 &= \lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 2\lambda\pi - \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda\alpha, \\
\psi_5 &= 2\lambda(\lambda + 2) \sin^2 \alpha - 2 \sin \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\alpha + \\
&\quad + (1 + \kappa_2)[\lambda \sin^2 \alpha + 1 - \cos \lambda\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha], \\
\psi_6 &= (1 + \kappa_2) \cos 2(\lambda + 1)\alpha + 4 \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \\
\Delta'_B &= 2(e - 1)t_3[2(e - 1)t_{13} + e(1 + \kappa_2) \sin(\lambda + 2)\alpha] - \\
&\quad - (1 + \kappa_1)t_{13}[4(e - 1)t_2 + (1 + \kappa_1)] + e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)t_{14}, \\
t_2 &= \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \\
t_3 &= (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \\
t_{12} &= (\lambda + 2) \sin \lambda\alpha + 2 \sin(\lambda + 2)\alpha, \\
t_{13} &= \lambda \cos(\lambda + 1)\alpha \sin \alpha - \sin \lambda\alpha.
\end{aligned}$$

Введені в (4) коефіцієнти інтенсивності напружень K_i через відсутність симетрії у будові кусково-однорідного тіла не зв'язні з певними модами навантаження. Надалі вважаємо їх заданими за умовою задачі і такими, що забезпечують стискувальні напруження на берегах контактної зони ($\sigma_0(r, 2\pi - \alpha) = \sigma_0(r, -\alpha) < 0$ при $r < s$).

Розв'язок сформульованої крайової задачі шукаємо у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша задача відрізняється від початкової тим, що замість першої з умов (3) використовуємо умову

$$\theta = (2\pi - \alpha) \cup (-\alpha), \quad r < s: \quad \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} \sum_i (2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) r^{\lambda_i}, \quad (6)$$

а на нескінченності $\left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \sim o(1/r)$. Друга задача – аналогічна задача без контактної зони, розв'язок якої відомий [4], тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

2. Розв'язання задачі методом Вінера–Хопфа. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна сформульована крайова задача (1-4) зводиться до функціонального рівняння Вінера – Хопфа першої задачі у смугі $-\varepsilon_1 < \text{Re } p < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достатньо малі позитивні числа), що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p) - \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i}}{p + 1 + \lambda_i} = -G_0(p) \frac{B \sin p\pi}{\sin(p - \lambda_0)\pi} \Phi^-(p), \quad (7)$$

$$\Phi^+(p) = \frac{E_1}{2(1 - \nu_1^2)} \int_1^\infty \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=2\pi-\alpha \cup -\alpha}^{r=\rho s} \rho^p d\rho,$$

$$\Phi^-(p) = \int_0^1 \sigma_\theta(\rho s, 2\pi - \alpha) \rho^p d\rho,$$

$$G_0(p) = \frac{2D_0(p)}{D(p)} \frac{\sin(p - \lambda_0)\pi}{B(1 + \kappa_1) \sin p\pi}, \quad B = \frac{1 + \kappa_1 + e(1 + \kappa_2)}{2(1 + \kappa_1)},$$

$$\begin{aligned}
D_0(p) &= (1 - e)^3 2\mu \Delta_1 \Delta_2 - (1 - e) e^2 (1 + \kappa_2)^2 \Delta_4 - (1 - e)^2 e (1 + \kappa_2) \Delta_5 + \\
&\quad + (1 - e) (1 + \kappa_1) e (1 + \kappa_2) \Delta_6 + \\
&\quad + (1 - e) (1 + \kappa_1)^2 \Delta_7 - (1 - e)^2 (1 + \kappa_1) \Delta_8 + (1 + \kappa_1)^2 e (1 + \kappa_2) \Delta_9 - \\
&\quad - (1 + \kappa_1) e^2 (1 + \kappa_2)^2 \Delta_{10},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \cos px + \mu \sin px, \delta_1 = p \sin \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha), \\
\Delta_4 &= \delta(\alpha) \Delta_2 \sin p\alpha, \\
\Delta_5 &= \Delta_4 + (\delta_1 + 2\mu \sin^2 p\alpha) \Delta_2, \\
\Delta_6 &= \delta(-\beta) \Delta_1 \sin p\beta, \\
\Delta_7 &= 2\delta(\alpha - \pi) (p^2 \sin^2 \alpha + \sin p\alpha \sin p\beta) \sin p(\alpha - \pi) - \\
&\quad - 4 \sin^2 p\pi (\delta_1 \cos^2 p(\alpha - \pi) + \mu \sin p\alpha \sin p\beta), \\
\Delta_8 &= \Delta_6 - (\delta_1 + 2\mu \sin^2 p\beta) \Delta_1, \\
\Delta_9 &= \sin^2 p\pi \cdot (\delta_1 - \delta(-\beta) \sin p\alpha), \\
\Delta_{10} &= \sin^2 p\pi \cdot (\delta_1 + \delta(\alpha) \sin p\beta),
\end{aligned}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{-\mu\beta}{\sqrt{1+\mu^2\beta^2}} \right) - 1, \beta = \frac{(1+\epsilon\kappa_2)-(e+\kappa_1)}{(1+\epsilon\kappa_2)+(e+\kappa_1)} - \text{параметр Дундурса.}$$

Функція $G_0(it)$ має парну додатну дійсну і непарну уявну частини, які при $t \rightarrow \pm\infty$ прямують до 1 і 0 відповідно, тому індекс функції $G_0(p)$ по уявній вісі дорівнює 0 і справедлива факторизація за формулою Гахова [5]:

$$G_0(p) = \frac{G_0^+(p)}{G_0^-(p)} \quad (Rep = 0), \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G_0^+(p), & Rep < 0, \\ G_0^-(p), & Rep > 0. \end{cases} \quad (8)$$

З теорії гамма-функцій Ейлера випливає подання [6]:

$$\frac{\sin p\pi}{\sin(p-\lambda_0)\pi} = \frac{p}{(p-\lambda_0)Q^+(p)Q^-(p)}, Q^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1 \mp p \pm \lambda_0)} \quad (9)$$

Використовуючи (8) і (9), перепишемо (7) у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Phi^+(p)Q^+(p)}{pG_0^+(p)} - \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \left[\frac{Q^+(p)}{pG_0^+(p)} + \frac{Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)G_0^+(-1-\lambda_i)} \right] = \\
&= -\frac{B\Phi^-(p)}{(p-\lambda_0)G_0^-(p)Q^-(p)} - \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \frac{Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)G_0^+(-1-\lambda_i)} \quad (Rep = 0). \quad (10)
\end{aligned}$$

Ліва частина рівняння (10) є аналітичною функцією у півплощині $Rep < 0$, а права – у півплощині $Rep > 0$. Тому, згідно з принципом аналітичного продовження повинна існувати єдина функція, яка є аналітичною у всій комплексній площині p і дорівнює лівій і правій частинам цього рівняння у відповідних півплощинах. Щоб її знати дослідимо асимптотичну поведінку функцій, що входять в рівняння (10) на нескінченості. За допомогою формули Стерлінга отримаємо $Q^\pm(p) \sim e^{\pm\lambda_0} (\mp p)^{\mp\lambda_0}$, а з (8) випливає, що $\lim_{p \rightarrow \infty} G_0^\pm(p) = 1$. Врахуємо також, що у відповідності із загальними положеннями про поведінку напружень і переміщень біля концентраторів в кінці контактної зони мають місце сингулярності виду

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta(r, 2\pi - \alpha \cup -\alpha) &\sim M_1(s-r)^{-1-\lambda_0} \quad (r \rightarrow s-0), \\
\frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=2\pi-\alpha \cup -\alpha} &\sim M_2(r-s)^{-1-\lambda_0} \quad (r \rightarrow s+0),
\end{aligned}$$

де M_1, M_2 — деякі сталі. Тоді за теоремою абелева типу [7] знаходимо, що при $p \rightarrow \infty$

$$\Phi^-(p) \sim M_1 \Gamma(-\lambda_0) s^{-1-\lambda_0} p^{\lambda_0}, \Phi^+(p) \sim M_2 \Gamma(-\lambda_0) s^{-1-\lambda_0} (-p)^{\lambda_0}. \quad (11)$$

Підставляючи знайдені вище асимптотики $Q^\pm(p), G_0^\pm(p)$ та $\Phi^\pm(p)$ в (10), знаходимо, що функції в її лівій і правій частинах на нескінченності обертаються в нуль. Отже, за теоремою Ліувіля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині. Прирівнюючи обидві частини рівняння (10) до нуля, отримуємо його точний розв'язок:

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= \frac{p G_0^+(p)}{Q^+(p)} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \left[\frac{Q^+(p)}{p G_0^+(p)} + \frac{Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i) G_0^+(-1-\lambda_i)} \right] (Re p < 0), \\ \Phi^-(p) &= -\frac{(p-\lambda_0) G_0^-(p) Q^-(p)}{B} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \frac{Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i) G_0^+(-1-\lambda_i)} (Re p > 0). \end{aligned} \quad (12)$$

3. Розрахунок параметрів контактної зони. З (12) випливає, що при $p \rightarrow \infty$

$$\Phi^-(p) \sim -\frac{e^{-\lambda_0} p^{\lambda_0}}{B} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i} Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i) G_0^+(-1-\lambda_i)} (Re p > 0). \quad (13)$$

Порівнюючи (11) з (13), знаходимо:

$$M_1 = -\frac{e^{-\lambda_0} s^{1+\lambda_0}}{B \Gamma(-\lambda_0)} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i} Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i) G_0^+(-1-\lambda_i)}.$$

Оскільки в кінці контактної зони нормальне напруження обертається в 0 (при $r > s$ тріщина відкрита), тому повинно бути $M_1 = 0$, що приводить до трансцендентного рівняння для визначення довжини контактної зони:

$$\sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i} Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i) G_0^+(-1-\lambda_i)} = 0. \quad (14)$$

У цьому рівнянні для підвищення точності можна взяти довільну кількість доданків з коренями характеристичного рівняння (5), що задовольняють умову $Re \lambda_i > -1$, проте для маломасштабної зони з $s \ll L$ можна обмежитись лише двома найбільшими за модулем показниками сингулярності $\lambda_1, \lambda_2 \sim -0,5$, що дозволяє отримати вираз для довжини контактної зони

$$s = \left[\frac{(2\pi)^{\lambda_1} K_1 F(\lambda_1, \alpha) Q^+(-1-\lambda_1) (1+\lambda_2) G_0^+(-1-\lambda_2)}{(2\pi)^{\lambda_2} K_2 F(\lambda_2, \alpha) Q^+(-1-\lambda_2) (1+\lambda_1) G_0^+(-1-\lambda_1)} \right]^{1/(\lambda_2-\lambda_1)}. \quad (15)$$

Даний вираз годиться як для дійсних λ_1, λ_2 , так і для комплексно спряжених $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$. В останньому випадку в (15) використовуються комплексно спряжені коефіцієнти інтенсивності напружень $K_1 = \bar{K}_2$.

З розв'язку (12) визначили трансформанту нормального напруження на берегах тріщини та, застосувавши до неї зворотне перетворення Мелліна і теорему про лишки, знайшли вираз для контактної напруження:

$$\sigma_{\theta}(r, 2\pi - \alpha) = \sum_k \left[\frac{(1 + \kappa_1) D(-1 - \lambda'_k)}{2D'_0(-1 - \lambda'_k)} \left(\frac{r}{s}\right)^{\lambda'_k} \frac{(1 + \lambda'_k) G_0^+(-1 - \lambda'_k)}{Q^+(-1 - \lambda'_k)} \times \right. \\ \left. \times \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i} Q^+(-1 - \lambda_i)}{(\lambda_i - \lambda'_k) (1 + \lambda_i) G_0^+(-1 - \lambda_i)} \right], \quad (16)$$

де λ'_k - корені рівняння

$$D_0(-1 - \lambda'_k) = 0 \quad (Re \lambda'_k > -1), \quad (17)$$

$D'_0(p) = dD_0(p)/dp$. Для забезпечення точності при будь-яких $0 \leq r \leq s$ необхідно в сумах по k брати якомога більше доданків. Вираз (16) вказує на те, що біля вершини тріщини зберігається концентрація напружень, яка характеризується показником сингулярності λ'_1 .

4. Аналіз числових результатів. Згідно (14) і (15), довжина контактної зони при незмінній конфігурації зовнішнього навантаження не залежить від його модуля, який лінійно входить в коефіцієнти інтенсивності напружень. Для дослідження залежності розмірів контактної зони від конфігурації навантаження і параметрів композитного тіла розглянемо дію зосереджених сил з нормальними і дотичними компонентами P і Q , прикладених на відстані $a \ll L$ від вершини тріщини до її берегів (рис. 1). Конфігурація навантаження визначалась відношенням $n=P/Q$. Коефіцієнти інтенсивності для даного випадку визначені в [4]. Результати числових розрахунків довжини контактної зони для окремих параметрів тіла і навантаження подані на рис. 2. В усіх розрахунках покладалось $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

Довжина контактної зони стрімко зменшується при зближенні пружних характеристик з'єднаних матеріалів (рис. 2a) та зі збільшенням відношення $n=P/Q$ розтягувальних зусиль до зсувних (рис. 2c), набуваючи екстремально малих значень, для яких контактна модель міжфазної тріщини стає фізично некоректною. Навпаки, зусилля, що призводять до зсуву берега тріщини в менш жорсткому матеріалі відносно протилежного берега в напрямку від вершини, зумовлюють розміри зони, зрівнянні за порядком величини з довжиною тріщини, однак у цьому випадку порушується прийнята в даній роботі умова маломасштабності зони, і для великих її розмірів отриманий розв'язок стає необґрунтованим.

Залежність розміру контактної зони від тертя виявляється менш вираженою: її довжина повільно зростає зі збільшенням тертя (рис. 2d), що узгоджується з висновками робіт [3, 8, 9]. В той же час довжина області контакту берегів істотно залежить від кута зламу межі поділу з'єднаних матеріалів (рис. 2e): в цій залежності виявляється максимум при куті зламу, близькому до $\alpha \approx 170^\circ$.

Згідно (16), напруження біля вершини тріщини мають степеневу особливість з дійсним показником сингулярності $-1 < \lambda'_1 < 0$ (рис. 3), що задовольняє рівняння (17). Таким чином, контактна зона усуває просторові осциляції переміщень і напружень біля вершини тріщини, характерні для класичної моделі міжфазної тріщини на ламаній межі поділу при кутах зламу в інтервалі $60^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$.

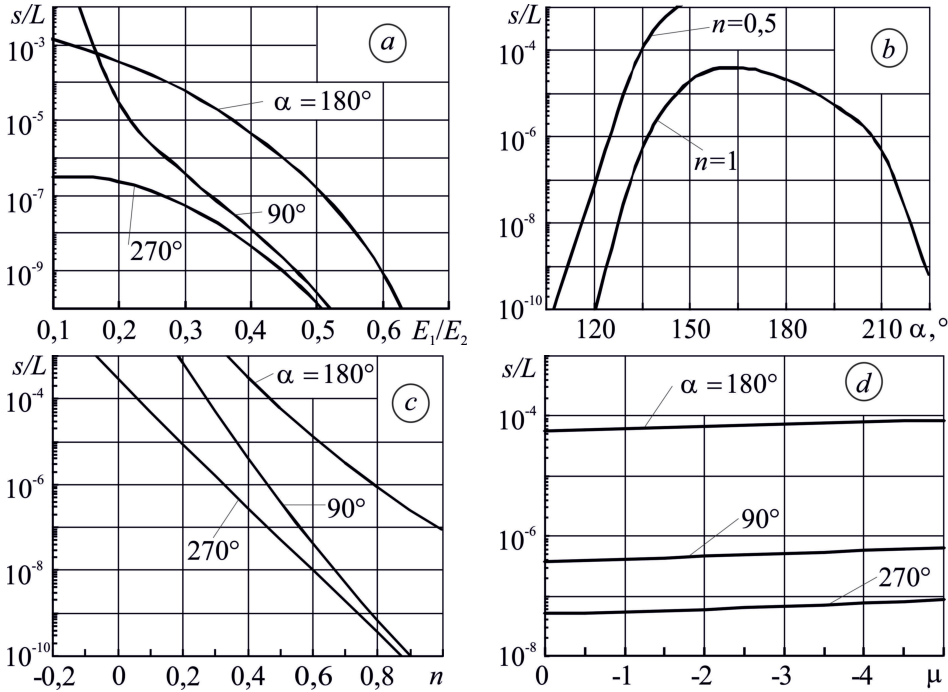


Рис. 2. Залежність довжини контактної зони від: а) відношення модулів Юнга для $n=0,5$, $\mu = -0,5$; б) кута зламу межі поділу для $E_1/E_2=0,1$, $\mu = -0,5$; в) конфігурації навантаження для $E_1/E_2=0,3$, $\mu = -0,5$; д) коефіцієнта тертя для $E_1/E_2=0,3$, $n=0,5$.

Проте, при відмінному від 0 коефіцієнті тертя показник сингулярності на порівняно вузьких інтервалах кутів зламу може набути комплексних значень, які обумовлюють фізично некоректні просторові осциляції переміщень (штрихована ділянка на графіку $\lambda'_1(\alpha)$ для $\mu = -1$, рис. 3).

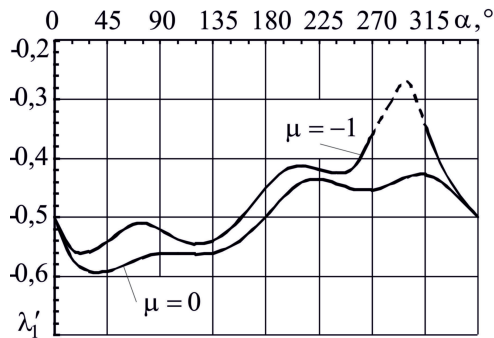


Рис. 3. Залежність показника сингулярності напружень від кута зламу межі поділу для $E_1/E_2=0,3$.

Розв'язання цього протиріччя, у відповідності з комплексною моделлю міжфазної тріщини [10], вбачаємо в утворенні зони передруйнування в околі верши-

ни. Зокрема, модель міжфазної тріщини з контактом берегів і бічною пластичною зоною передруйнування на плоскій межі поділу матеріалів розглянута в [11].

Висновки. За допомогою методу Вінера-Хопфа знайдено розв'язок задачі про розрахунок розмірів маломасштабної області контакту берегів біля вершини міжфазної тріщини, яка виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Між берегами тріщини передбачається взаємодія за законом сухого тертя. Отримано вирази для довжини контактної зони і контактного напруження та виконано числовий аналіз їх залежностей від пружних характеристик з'єднаних матеріалів, кута зламу, конфігурації зовнішнього навантаження і коефіцієнта тертя. Встановлено, що контакт берегів тріщини усуває фізично некоректні просторові осциляції переміщень, передбачувані класичною теорією міжфазних тріщин, за винятком досить вузького інтервалу кутів зламу.

1. **Дудик М. В.** Розвиток зони передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ / М. В. Дудик, Ю. В. Діхтяренко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т.54, №2. – С.103–114.
2. **Comninou M.** The Interface crack / M. Comninou // J. Appl. Mech. - 1977. - Vol. 44. - P. 631-636.
3. **Камінський А. О.** Маломасштабна контактна зона з тертям берегів біля вершини міжфазної тріщини / А. О. Камінський, М. В. Дудик, Л. А. Кіпніс // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2014. - №1. – С. 62-67.
4. **Дудик М. В.** Дослідження напружено-деформованого стану біля кутової точки межі поділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина / М. В. Дудик // Вісник ТНТУ.- 2014. № 3.- С. 87-98.
5. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
7. **Нобл Б.** Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279с.
8. **Острик В. И.** Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости / В. И. Острик, А. Ф. Улитко. – К. : Наук. думка, 2006. – 328 с.
9. **Антипов Ю. А.** Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения / Ю. А. Антипов // Прикл. мат. и мех. – 1995. – Т. 59, вып. 2. – С. 290-306.
10. **Каминский А. А.** О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис // Доповіди НАН України. – 2011. - №1. – С.38-43.
11. **Дудик М. В.** Вплив пластичної зони біля вершини міжфазної тріщини на контакт її берегів / М. В. Дудик // Дослідження в математиці і механіці. – 2015. – Т. 20, вип. 2(26). – С. 7–19.

Дудик М. В., Решетник Ю. В., Феньків В. М.

КОНТАКТ БЕРЕГОВ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ, ВЫХОДЯЩЕЙ ИЗ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ЛОМАННОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА

Резюме

В условиях плоской деформации с помощью метода Винера-Хопфа найдено решение задачи о расчете маломасштабной контактной зоны вблизи вершины межфазной трещины, выходящей из угловой точки ломаной границы раздела двух разных однородных изотропных материалов. Получены выражения для определения длины контактной зоны и контактного напряжения и выполнен числовой анализ их зависимости от упругих характеристик соединенных материалов, угла излома границы раздела сред, конфигурации нагрузки и коэффициента трения.

Ключевые слова: контактная зона, ломаная граница раздела, межфазная трещина .

Dudyk M. V., Reshitnyk Yu. V., Fen'kiv V. M.

CONTACT OF THE FACES OF THE INTERFACIAL CRACK OUTCOMING FROM ANGULAR POINT OF THE BROKEN INTERFACE

Summary

The model of the interfacial crack outcoming from the angular point of the broken interface of two different homogeneous isotropic materials has been developed. The model assumes the existence of a near the tip of the crack small-scale contact region of the faces interacting according to the law of dry friction. Owing to the small sizes of the contact zone the condition on the infinity as a demand of the possibility of sewing together the sought solution with the asymptotic solution near the crack tip of the analogous problem about an interfacial crack without contact of faces was formulated. The solution of the suitable static boundary-value problem of the theory of elasticity under the conditions of plane deformation is found by using the Wiener – Hopf method. The equations for the determination of the length of the contact zone and stress singularity index near the crack tip and an expression for the contact stress were obtained. The numerical analysis of the dependence of the contact zone length and stress singularity index on the external load configuration, friction and elastic characteristics of the joined materials was made. The fact that the length of the contact zone decreases impetuously under the normal component of the load increases or the moduli of elasticity of the joined materials become closer was discovered. At the same time, its dependence on the friction coefficient is less pronounced: with the enhancement of the friction of the faces, the length of the contact zone increases slightly. We have established that the contact of the faces eliminates the physically uncorrected spatial oscillation of the displacements predicted by the classic theory of the interfacial cracks with the exception of a narrow enough interval of the interfacial angle.

Key words: contact zone, broken interface, interfacial crack.

REFERENCES

1. Dudyk, M. V. & Dikhtyarenko Yu. V. (2012). Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol.184, 2, 121–135.
2. Comninou, M. (1977). The Interface crack. *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, Vol. 44, 631–636.

3. Kaminsky, A. A., Dudik, M. V. & Kipnis, L.A. (2014). Malomasshtabna kontaktna zona z tertiam berehiv bilia vershyny mizhfaznoi trishchyny [Small-scale contact zone with friction of the faces near the tip of an interface crack]. *Visn. Kyiv. Nats. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauk.- Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. No. 1*, 62–67 [in Ukrainian].
4. Dudyk, M. (2014). Doslidzhennia napruzhenno-deformovanoho stanu bilia kutovoi tochky mezhi podilu materialiv, z yakoi vykhodyt mizhfazna trishchyn [Investigation of the stress-strain state near the corner point of interface, from which the interfacial crack is initiated]. *Visnyk Ternopilskogo nacionalnogo tekhnichnogo universytetu - Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*, №3 (75), 87–98.
5. Gakhov, F. D. (1966). *Boundary Value Problems*. Oxford: Pergamon Press.
6. Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (editors) (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. New York: Dover.
7. Noble, B. (1988). *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*. New York.
8. Ostriuk, V. I. & Ulitko, A. F. (2006). *Metod Vinera-Hopfa v kontaktnykh zadachakh teorii uprugosti [Wiener-Hopf Method in Contact Problems of the Theory of Elasticity]*. Kiev: Naukova Dumka [in Russian].
9. Antipov Y. A. (1995). An interface crack between elastic materials when there is dry friction. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, Vol.59, 2, 273–287.
10. Kaminsky, A. A. & Kipnis, L. A. (2011). O stragivaniі treshhiny, raspolozhennoj na granice razdela uprugih sred [On the start of a crack located on the interface of elastic media]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy – Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, No. 1*, 38–43 [in Russian].
11. Dudyk, M. (2015). Vplyv plastychnoi zony bilia vershyny mizhfaznoi trishchyny na kontakt yii berehiv [Influence of plastic zone near the tip of interfacial crack on the contact of its lips]. *Doslidzhennia v matematytsi i mekhanitsi - Researches in Mathematics and Mechanics*, Vol. 20, 2 (26), 7–19.