Дослідження в математиці і механіці.– 2017.–Т.22, вип. 1(29).– С. 81–96

УДК 517.9

М. І. Яременко
Міжнародний математичний центр ім. Ю. О. Митропольського НАН України

ГІПЕРБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ З СИНГУЛЯРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Робота присвячена доведенню існування слабкого розв'язку квазілінійних диференціальних рівнянь з частковими похідними в просторах W_1^p з вимірними коефіцієнтами. Дослідження проводиться з використанням методу Гальоркіна та методу форм і нелінійних монотонних операторів. Умови на коефіцієнти уточнюються в процесі дослідження властивостей нелінійних операторів, що породжені формою, яка складена за лівими частинами заданого рівняння.
MSC: 35L81.
Ключові слова: гіперболічне рівняння, сингулярні коефіцієнти, метод форм .

Вступ.

Хвильовий процес — це складна модель руху реальних систем, що властива всім без винятку об'єктам матеріального світу, стан яких залежить як від часової так і від просторових змінних, тому, як правило, його описують за допомогою рівнянь гіперболічного типу.

В теорії хвиль важливе значення має рівняння вигляду:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) + b(x,u,\nabla u) = f(x,t),$$

частинний випадок цього рівняння має вигляд

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2u(t)}{dt^2} - \Delta u - b(x,u,\nabla u) = f(x,t),$$

де функція $f(x,t)$ характеризує зовнішній вплив на систему, що досліджується. В середовищах, підчас розповсюдження хвилі, відбуваються процеси передачі енергії хвилі частинкам середовища, також можливий випадок коли швидкість розповсюдження хвилі є функцією частоти. Як правило, в залежності від певних механізмів взаємодії хвилі з середовищем, подібні явища враховуються за допомогою структурного вигляду нелінійної функції $b(x,u,\nabla u)$

Робота присвячена дослідженню слабкої розв'язуваності квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу з гладкими та вимірними коефіцієнтами, дослідження базується на методах теорії напівгруп із застосуванням методу диференційних форм. Вивчення задачі проводиться за такою схемою: спочатку від гіперболічного рівняння, за допомогою певної заміни, здійснюється перехід до системи параболічних рівнянь спеціального вигляду і далі досліджується розв'язуваність цієї системи, при цьому виникає потреба в дослідженні рівнянь еліптичного типу. Рівняння еліптичного типу розглядаються за допомогою аналогу метода монотонних слабко компактних операторів в

Надійшла 08.09.2016

роботі отримано аналог теореми типу Мінті—Браудера. При цьому розглядається новий тип операторів $A^p_\lambda : W^p_1 \to W^p_{-1}$.

Основні результати

1. Випадок задачі із гладкими коефіцієнтами в просторах $L^p(R^l{,}d^l x)$**.** Розглянемо випадок коли коефіцієнти є нескінченно гладкими функціями своїх аргументів. За цих умов доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Для довільних елементів* $\{\gamma{,}\eta\} \subset W^p_1\left(R^l{,}d^l x\right)$ *існує таке дійсне число* $\tilde{\mu} > 0$ *, що для всіх* $0 < \mu < \tilde{\mu}$ *система рівнянь:*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$$

має єдиний розв'язок $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Доведення. Для доведення існування розв'язку перепишемо систему у вигляді:

$$u = \gamma + \mu v,$$

$$v - \mu \mathrm{A} u = \eta,$$

і підставимо $u = \gamma + \mu v$ в $v - \mu \mathrm{A} u = \eta$, тоді маємо:

$$v - \mu \mathrm{A} \left(\gamma + \mu v\right) = \eta.$$

Або в розгорнутому вигляді:

$$v - \mu \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\gamma + \mu v\right) \right) + \mu b(x, \left(\gamma + \mu v\right), \nabla \left(\gamma + \mu v\right)) = \eta$$

Розпишемо лінійний доданок:

$$\sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\gamma - \mu v\right) \right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma \right) + \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \mu v \right),$$

тоді останнє рівняння набуде вигляду:

$$v - \mu^2 \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) + \mu b(x, \left(\gamma + \mu v\right), \nabla \left(\gamma + \mu v\right)) =$$

$$= \eta + \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma \right).$$

Далі зауважимо, що доданок елементу γ в нелінійній складові рівняння $b(x, (\gamma + \mu v),$ $\nabla \left(\gamma + \mu v\right))$ не впливає на характер умов тобто умови на не лінійність матимуть той самий вигляд (з іншими функціями $\mu_i(x)$, а отже з іншою форм – гранню), а саме:

$$|b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v))| \leqslant \mu\left(\mu_1(x)|\nabla u|+\mu_2(x)|u|+\mu_3(x)\right),$$

$$|b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v))-b(x,(\gamma+\mu w),\nabla(\gamma+\mu w))| \leqslant$$

$$\leqslant \mu\left(\mu_4(x)|v-w|+\mu_5(x)|\nabla(v-w)|\right).$$

Поділимо його на μ^2, при цьому $\frac{1}{\mu^2}$ позначимо через λ, оскільки $\mu^2>0$, а праву частину через ψ, при цьому зміняться лише позначення, а рівняння залишиться тим же, в спрощеному записі зміняться лише числові сталі форм – грані, що не суттєво, оскільки $\mu^2\to 0$ залежить лише від початкових даних. Отже маємо рівняння:

$$\lambda v-\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)+\frac{1}{\mu}b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v))=\psi.$$

Це квазілінійне еліптичне диференційне рівняння в частинних з гладкими повільно зростаючими коефіцієнтами. Дослідимо його за допомогою аналога методу монотонних слабко компактних операторів із застосуванням форм.

Схема метода. За рівнянням складається спеціальна форма та досліджуються її властивості, доводиться її обмеженість, після цього *встановлюється, що ця форма породжує оператор, який діє за правилом $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ і досліджуються властивості цього оператора за допомогою форми, що його породжує, встановлюється обмеженість, коерцитивність, акретивність та хеміneперервність цього оператора. Далі доводиться теорема про існування розв'язку рівняння за яким складена форма, що породжує оператор, який має властивості обмеженості, коерцитивності, акретивності та хемінеперервності. При доведенні теореми існування використовується схема Гальоркіна, аналог леми про гострий кут, за допомогою якого будується послідовність наближення Гальоркіна та показується, що ця послідовність збігається до розв'язку рівняння.*

За рівнянням складемо форму $h_\lambda^p(v,w)$:

$$h_\lambda^p(v,w)\equiv\lambda\langle v,w\rangle+\langle dw\circ a\circ dv\rangle+\left\langle\frac{1}{\mu}b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)),w\right\rangle,$$

де $v\in W^p(R^l,d^lx)$, $\quad w\in W_{1,0}^q(R^l,d^lx)$. Справедлива лема.

Лема 1. *Форма $h_\lambda^p(v,w)$ є обмеженою.*

Як наслідок леми 1 маємо, що форма $h_\lambda^p(v,w)$ породжує оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx)\to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$, який також є обмеженим, а отже $h_\lambda^p(v,w)=\langle \mathrm{A}_\lambda^p(v),w\rangle$ де $v\in W_1^p(R^l,d^lx)$, $\quad w\in W_{1,0}^q(R^l,d^lx)$.

Означення. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx)\to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ *коерцитивний*, якщо форма $h_\lambda^p(v,w)=\langle \mathrm{A}_\lambda^p(v),w\rangle$ задовольняє умову

$$\lim_{||v||_{W_1^p}\to\infty}\frac{h_\lambda^p\left(v,v\,|v|^{p-2}\right)}{||v||_{W_1^p}}=\infty.$$

Лема 2. *Оператор* $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ *визначає коерцитивне відображення.*

Доведення. Оцінимо форму $h_\lambda^p(v,w) = \langle \mathrm{A}_\lambda^p(v), w\rangle$, де елементи $v \in W_1^p(R^l,d^lx)$, $w \in W_{1,0}^q(R^l,d^lx)$:

$$h_\lambda^p\left(v,v\,|v|^{p-2}\right) = \left\langle \mathrm{A}_\lambda^p(v), v\,|v|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \lambda v - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right) + \frac{1}{\mu}b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)), v\,|v|^{p-2}\right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \left\langle \lambda v - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right) - |\mu_1(x)|\nabla v| + \mu_2(x)|v| + \mu_3(x)|, v\,|v|^{p-2}\right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \lambda||v||_p^p + \frac{4(p-1)}{p^2}\left\langle d(v_n\,|v_n|^{\frac{p-1}{2}}) \circ a \circ d(v_n\,|v_n|^{\frac{p-1}{2}})\right\rangle -$$

$$- \left\langle |\mu_1(x)|\nabla v| + \mu_2(x)|v| + \mu_3(x)|, v\,|v|^{p-2}\right\rangle.$$

Позначимо $W = v\,|v|^{\frac{p-2}{2}}$ і оцінимо останній доданок:

$$\begin{aligned}
&\left\langle |\mu_1(x)|\nabla v| + \mu_2(x)|v| + \mu_3(x)|, v\,|v|^{p-2}\right\rangle \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{2}{p}||\nabla W||_2||\mu_1 W||_2 + ||\mu_2 W||_2||W||_2 + \|\mu_3\|_p \left\|v\,|v|^{p-2}\right\|_q \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{1}{p}\left(\varepsilon^2||\nabla W||_2^2 + \tfrac{1}{\varepsilon^2}\left(\beta||\nabla W||_2^2 + c(\beta)\,||W||_2^2\right)\right) + \\
&+ \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon^2||W||_2^2 + \tfrac{1}{\varepsilon^2}\left(\beta||\nabla W||_2^2 + c(\beta)\,||W||_2^2\right)\right) + \tfrac{1}{p\sigma^p}\|\mu_3\|_p^p + \tfrac{\sigma^q}{q}\left\|v\,|v|^{p-2}\right\|_q^q \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\sqrt{\beta}\left(\frac{2}{p} + \frac{1}{2}\right)\right)|\nabla W||_2^2 + \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} + \frac{c(\beta)}{p\sqrt{\beta}} + \frac{c(\beta)}{2\sqrt{\beta}} + \frac{\sigma^q}{q}\right)||W||_2^2 + \frac{1}{p\sigma^p}\|\mu_3\|_p^p.$$

Далі групуємо відповідні доданки, отримуємо твердження леми.

Означення. Оператор $h_\lambda^p(v,w) = \langle \mathrm{A}_\lambda^p(v), w\rangle$ є акретивним в $L^p\left(R^l,d^lx\right)$, якщо виконується нерівність

$$\left\langle A_\lambda^p(v) - A_\lambda^p(w), (v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle \geqslant 0,\_\forall v,\, w \in W_{1,0}^p\left(R^l,d^lx\right).$$

Лема 3. *Оператор* $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ *визначає акретивне відображення в* $L^p\left(R^l,d^lx\right)$.

Доведення. Дійсно, згідно з означенням акретивності, враховуючи умови, маємо:

$$\left\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u) - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u-v)\,|u-v|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \lambda v - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right) + \frac{1}{\mu}b(x,\gamma+\mu v,\nabla(\gamma+\mu v)), (v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle -$$

$$- \left\langle \lambda w - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}w\right) + \frac{1}{\mu}b(x,\gamma+\mu w,\nabla(\gamma+\mu w)), (v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \lambda||u-v||_p^p + + \tfrac{4(p-1)}{p^2}\left\langle d(u_n\,|u_n|^{\frac{p-1}{2}}) \circ a \circ d(u_n\,|u_n|^{\frac{p-1}{2}})\right\rangle +$$
$$+\left\langle \tfrac{1}{\mu} b(x,\gamma+\mu v,\nabla\,(\gamma+\mu v)) - \tfrac{1}{\mu} b(x,\gamma+\mu w,\nabla\,(\gamma+\mu w)),(v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle,$$

оцінимо останній доданок використовуючи початкові умови, форм обмеженість коефіцієнтів і оцінку Гельдера, покладаючи $W=(v-w)\,|v-w|^{\frac{p-2}{2}}$, маємо:

$$\left|\left\langle \frac{1}{\mu} b(x,\gamma+\mu v,\nabla\,(\gamma+\mu v)) - \frac{1}{\mu} b(x,\gamma+\mu w,\nabla\,(\gamma+\mu w)),(v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\langle \mu_4(x)|u-v| + \mu_5(x)|\nabla(u-v)|,(v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \left\langle \mu_4(x)\,(v-w)\,,(v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle + \left\langle \mu_5(x)|\nabla\,(u-v)\,|,(u-v)\,|u-v|^{p-2}\right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{p}||\nabla W||_2||\mu_5 W||_2 + ||\mu_4 W||_2||W||_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{p}||\nabla W||\left(\beta||\nabla W||_2^2 + c(\beta)||W||_2^2\right)^{\frac{1}{2}} + ||W||_2\left(\beta||\nabla W||_2^2 + c(\beta)||W||_2^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\leqslant \frac{1}{p}\left(\varepsilon_1^2||\nabla W||_2^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2}\left(\beta\;||\nabla W||_2^2 + c(\beta)\;||W||_2^2\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sigma^2||W||_2^2 + \frac{1}{\sigma^2}\left(\beta\;||\nabla W||_2^2 + c(\beta)\;||W||_2^2\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{p}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\beta}||\nabla W||_2^2 + \left(\frac{1}{p}\frac{c(\beta)}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{2} + \frac{1}{2}\frac{c(\beta)}{\sqrt{\beta}}\right)||W||_2^2.$$

Використовуючи ці оцінки доводимо лему.

Означення. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ визначає хемінеперервне відображення, якщо справджується властивість:

$\omega - \lim\limits_{t\to 0} \mathrm{A}_\lambda^p\,(v+tw) = \mathrm{A}_\lambda^p\,(v)$, $\forall v,w \in W_{1,0}^p\left(R^l,d^lx\right)$ в нормі $W_{-1}^p\left(R^l,d^lx\right)$.

Лема 4. *Нелінійний оператор* $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ *визначає хемінеперервне відображення.*

У випадку просторів $L^p(R^l,d^lx), p \geqslant 2, l \geqslant 3$ потрібно застосовувати аналог леми 3, а саме:

Лема 5 (про гострий кут). *Нехай на сфері* $S_R = \left(\bar{C} : |\,\bar{C}\,| = R\right)$, *де* $R > 0$ – *деяке відповідним чином вибране число, задано неперервне відображення* $\vec{B} : R^n \to R^n$ *для якого виконується аналог умови про гострий кут, тобто* $\left\langle \bar{B}\left(\bar{C}\right), \bar{C}^*\right\rangle \geqslant 0$. *Тоді існує принаймні одна така точка* $\vec{C}:\quad |\,\vec{C}\,| \leqslant R$, *що* $\vec{B}\left(\vec{C}\right) = 0$. Ця лема доводиться від супротивного.

Для того щоб показати, що еліптичне рівняння має розв'язок використаємо модифікацію метода Гальоркіна. Нехай $\{w_i\}$ і $\{w_i^*\}$ – гладкі базиси просторів $W_{1,0}^p(R^l,d^lx)$, $\quad W_{1,0}^q(R^l,d^lx)$, відповідно, і нехай $[w_1,...w_k]$ – лінійна оболонка базисних елементів, така що виконується властивість: $\langle v_k,v_k^*\rangle = \|v_k\|_p^p$. Покладемо за визначенням $v_k = \sum_{i=1}^{k} c_i w_i$, $v_k^* = \sum_{i=1}^{k} c_i^* w_i^*$. Для знаходження послідовності Гальоркіна складемо систему рівнянь:

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p \left(w_k\right) - \psi, w_i^* \rangle = 0, i = 1,...,k.$$

Ця система визначає неперервне відображення $\overrightarrow{B} : R^k \to R^k$, а отже має місце аналог леми про гострий кут.

Скористаємося аналогом методу Гальоркіна. Покажемо, що система ця має розв'язок в лінійній оболонці перших k елементів базису $\{w_i\}$. Дійсно, відображення $\overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{C}\right) : 0 \subset B_i\left(\overrightarrow{C}\right) = \langle \mathrm{A}_\lambda^p \left(v_k\right) - \psi, w_i^* \rangle$, $i = 1,...,k$, внаслідок коерцитивності оператора $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$, задовольняє умови аналога леми про гострий кут:

$$\left\langle \overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{C}\right), \overrightarrow{C}^* \right\rangle = \left\langle \mathrm{A}_\lambda^p \left(\sum_{i=1}^{k} c_i w_i\right) - \psi, \sum_{i=1}^{k} c_i^* w_i^* \right\rangle = \left\langle \mathrm{A}_\lambda^p \left(v_k\right) - \psi, v_k |v_k|^{p-2} \right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{h_\lambda^p \left(v_k, v_k |v_k|^{p-2}\right)}{||v_k |v_k|^{p-2}||_{W_1^q}} - ||\psi||_{W_{-1}^p} \right) ||v_k |v_k|^{p-2}||_{W_1^q} \geqslant 0.$$

Оскільки $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$ – неперервне відображення на скінчених підпросторах простору $W_{1,0}^p$, то внаслідок аналога леми про гострий кут для достатньо великих значень $R > 0$ існує такий елемент $\overrightarrow{C}, |\overrightarrow{C}| = R$, що $\overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{C}\right) = 0$.

Отже, вище вказано спосіб побудови послідовності $\{v_k(x)\}$, елементи якої є розв'язками рівняння. Далі покажемо, що послідовність $\{v_k(x)\}$ збігається до розв'язку даного рівняння.

Використавши коерцитивність оператора $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$, одержимо нерівність $||\mathrm{A}_\lambda^p \left(v_k\right)||_{W_{-1}^p} \leqslant ||\psi||_{W_1^p}$.

Якщо доведемо нерівність $||v_k||_{W_1^p} < C$, де стала C залежить лише від функцій μ (структури рівняння), то тоді внаслідок слабкої компактності простору $W_1^p(R^l, d^l x)$ отримаємо, що існує така підпослідовність $\{v_{k'}\left(x\right)\}$, що має місце властивість: $v_{k'} \xrightarrow[W_1^p]{} v_0$ слабко і $\mathrm{A}_\lambda^p(v_{k'}) \xrightarrow[W_1^p]{} y$ слабко.

Покажемо, що $y = \mathrm{A}_\lambda^p\left(v_0\right) = \psi$. Звідси випливатиме, що відображення $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$ є сюр'єктивним відображенням, тобто відображенням «на». Складемо інтегральні тотожності:

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p \left(v_{k'}\right), w_i^* \rangle = \langle \psi, v_i^* \rangle, i = 1,...,k',$$

і перейдемо до границі при $k' \to +\infty$. Тоді одержимо:

$$\lim_{k' \to \infty} \mathrm{A}_\lambda^p \left(v_{k'}\right) = y = \psi,$$

де границя береться за нормою простору $W_{-1}^p(R^l, d^l x)$.

Оскільки оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$ є акретивним в $L^p(R^l, d^l x)$, то має місце нерівність:

$$\left\langle \mathrm{A}_\lambda^p \left(v_{k'}\right) - \mathrm{A}_\lambda^p \left(w\right), \left(v_{k'} - w\right) |v_{k'} - w|^{p-2} \right\rangle \geqslant 0.$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $k' \to \infty$,одержимо нерівність:

$$\left\langle y - \mathrm{A}_{\lambda}^{p}\left(w\right), \left(v_0 - w\right)\left|v_0 - w\right|^{p-2}\right\rangle \geqslant 0.$$

Поклавши $w = v_0 - tz, t > 0, \quad z \in W_{1,0}^{p}(R^l,d^l x)$, і скоротивши обидві частини одержаної нерівності на t^{p-1}, отримаємо:

$$\left\langle y - \mathrm{A}_{\lambda}^{p}\left(v_0 - tz\right), z|z|^{p-2}\right\rangle \geqslant 0.$$

З хемінеперервності оператора $\mathrm{A}_{\lambda}^{p} : W_1^p\left(R^l,d^l x\right) \to W_{-1}^{p}\left(R^l,d^l x\right)$, враховуючи довільність елемента $z \in W_{1,0}^{p}(R^l,d^l x)$, одержимо $y = \mathrm{A}_{\lambda}^{p}\left(v_0\right) = \psi$, тобто для заданих початкових даних побудовано послідовність $\{v_{k'}\}$ і доведено її збіжність до елементу $v_0 \in W_1^p(R^l,d^l x)$, що реалізує розв'язок рівняння за даних умов.

Єдиність цього розв'язку випливає з властивості акретивності оператора $A_{\lambda}^{p}(\cdot)$. Отже, функції $u = \gamma + \mu v$ і $v = \eta + \mu \mathrm{A}u$ є шуканими і такими, що задовольняють систему $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$.

Зауваження. *Має місце оцінка для*$\{u,v\} \subset W_1^p\left(R^l,d^l x\right)\bigcap C^{\infty}\left(R^l\right)$ *, які задовольняють наступну нерівність:*

$$\left\langle u - \lambda_0 \mathrm{A}u, u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle + \lambda_0 \left\|v\right\|_p^p \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + o\left(\mu\right)\right)\left(\left\langle \gamma - \lambda_0 \mathrm{A}\gamma, \gamma\left|\gamma\right|^{p-2}\right\rangle + \lambda_0 \left\|\eta\right\|_p^p\right),$$

причому додання стала λ_0 не залежать від числа μ і елементів $\{\gamma,\eta\}$.

Доведемо оцінку. Оскільки :

$\mathrm{A}u = \frac{1}{\mu}\left(v - \eta\right)$, то $\mathrm{A}v = \mathrm{A}\frac{(u-\gamma)}{\mu}$,

а отже для $\{u,v\} \subset W_1^p\left(R^l,d^l x\right)\bigcap C^{\infty}\left(R^l\right)$:

$$\left\langle \gamma - \lambda_0 \mathrm{A}\gamma, \gamma\left|\gamma\right|^{p-2}\right\rangle + \lambda_0 \left\|\eta\right\|_p^p$$

$$= \left\langle \gamma - \lambda_0 \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma\right) + \lambda_0 b(x,\gamma,\nabla\gamma), \gamma\left|\gamma\right|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \left(\left\langle u - \lambda_0 \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\right)\right) + \lambda_0 b(x,\left(u\right),\nabla\left(u\right)), u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle + \lambda_0 \left\|v\right\|_p^p\right) +$$

$$+ \left(\left\langle u - \mu v - \lambda_0 \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u - \mu v\right)\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \ \lambda_0 b(x,\left(u - \mu v\right),\nabla\left(u - \mu v\right)), \left(u - \mu v\right)\left|u - \mu v\right|^{p-2}\right\rangle -$$

$$\left.- \left\langle u - \lambda_0 \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\right)\right) + \lambda_0 b(x,\left(u\right),\nabla\left(u\right)), u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle\right) +$$

$$+\lambda_0\left(\left\langle v-\mu \mathrm{A}u,(v-\mu \mathrm{A}u)\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^{p-2}\right\rangle-\left\langle v,v\left|v\right|^{p-2}\right\rangle\right).$$

$$\left\langle\gamma-\lambda_0 \mathrm{A}\gamma,\gamma\left|\gamma\right|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\left\|\eta\right\|_p^p=$$

$$\left\langle\gamma-\lambda_0\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma\right)+\lambda_0 b(x,\gamma,\nabla\gamma),\gamma\left|\gamma\right|^{p-2}\right\rangle=$$

$$=\left(\left\langle u-\lambda_0 Au,u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\left\|v\right\|_p^p\right)+$$

$$+\left(\left\langle u-\mu v-\lambda_0 A(u-\mu v),(u-\mu v)\left|u-\mu v\right|^{p-2}\right\rangle-\left\langle u-\lambda_0 Au,u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle\right)+$$

$$+\lambda_0\left(\left\langle v-\mu \mathrm{A}u,(v-\mu \mathrm{A}u)\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^{p-2}\right\rangle-\left\langle v,v\left|v\right|^{p-2}\right\rangle\right)=$$

$$=\left(\left\langle u-\lambda_0 Au,u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\left\|v\right\|_p^p\right)+$$

$$+\left\langle u,(u-\mu v)\left|u-\mu v\right|^{p-2}-u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle-$$

$$+\left\langle v,\lambda_0\left(v-\mu \mathrm{A}u\right)\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^{p-2}-\lambda_0 v\left|v\right|^{p-2}-\mu\left(u-\mu v\right)\left|u-\mu v\right|^{p-2}\right\rangle+$$

$$+\lambda_0\left(\left\langle \mathrm{A}u,u\left|u\right|^{p-2}-\mu\left(v-\mu \mathrm{A}u\right)\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^{p-2}\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\left\langle A(u-\mu v),(u-\mu v)\left|u-\mu v\right|^{p-2}\right\rangle\right).$$

Звідси випливає наведена вище нерівність.

Зауваження. Для $\{u,v\}\subset W_1^p\left(R^l,d^l x\right)\bigcap C^\infty\left(R^l\right)$можна використати наступні міркування:

$$\left|\left\langle v-\mu \mathrm{A}u,(v-\mu \mathrm{A}u)\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^{p-2}\right\rangle-\left\langle v,v\left|v\right|^{p-2}\right\rangle\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{R^l}\left|\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^p-\left|v\right|^p\right|dx^l=\int_{R^l}\left|v\right|^p\left|\left|1-\mu\tfrac{\mathrm{A}u}{\left|v\right|^p}\right|^p-\left|1\right|\right|dx^l\leqslant\mu p\left\|\mathrm{A}u\right\|_{L^1}+o(\mu^2).$$

Теорема 2. *Гіперболічне рівняння* $\frac{d^2u(t)}{dt^2}\in \mathrm{A}u(t)$, *за початкових умов* $t\in[0,T]$, $\quad u(0)=u_0\in D(\mathrm{A})$, $\quad \frac{du(0)}{dt}=v_0\in D(\mathrm{A})$, *має розв'язок.*

Доведення. Для доведення цього розглянемо прямий добуток просторів $W_1^p\times L^p$ елементами якого є вектори

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\quad u\in W_1^p(R^l,d^l x),v\in L^p(R^l,d^l x).$$

В цьому просторі можна ввести функцію, що буде норму за наступним правилом:

$$\left\|\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right\|=\left(\left\langle u-\lambda_0 \mathrm{A}u,u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\left\langle v,v\left|v\right|^{p-2}\right\rangle\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Область визначення оператора $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ є множина таких елементів $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\quad u\in W_1^p(R^l,d^l x),v\in L^p(R^l,d^l x)$, , що елементи u,v задаються формулами $u=\gamma+\mu v$ і $v=\eta+\mu \mathrm{A}u$ і є такими, що задовольняють систему:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Тоді коли додатне число μ достатньо мале область значень оператора $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ містить всі елементи $\begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$, $\gamma,\eta \in \hat{W}_1^p(R^l,d^lx)$, отже для мінімального замкнутого розширення оператора $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ в просторі $W_1^p(R^l,d^lx) \times L^p(R^l,d^lx)$, оператор $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ має розв'язний, якій всюди визначений на добутку просторів $W_1^p(R^l,d^lx) \times L^p(R^l,d^lx)$.

А отже, випливає, що відповідне розширення оператора $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ є локальним генератором деякої напівгрупи T_t в $W_1^p(R^l,d^lx) \times L^p(R^l,d^lx)$ і $W_1^p(R^l,d^lx) \subset L^p(R^l,d^lx)$. Звідси слідує твердження теореми 1.

2. Випадок вимірних коефіцієнтів в просторах $L^p(R^l,d^lx)$, $\quad p \geqslant 2, \quad l \geqslant 3$. Розглянемо випадок коли коефіцієнти в хвильовому рівнянні вигляду: $\frac{d^2u(t)}{dt^2} \in \mathrm{A}u(t)$ є вимірними, взагалі кажучи, не гладкими функціями.

В цьому випадку дослідження проводиться наступним чином: від гіперболічного рівняння перейдемо до системи параболічних рівнянь за допомогою наступної підстановки: $v = \frac{du}{dt}$.

Тоді задача набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, t \in [0,T], \quad u(0) = u_0 \in D(\mathrm{A}),$$

$$v(0) = v_0 \in D(\mathrm{A}).$$

Отже, як і у випадку дослідження рівняння з гладкими коефіцієнтами хвильове рівняння звилося до еволюційної системи рівнянь .

Досліджуємо розв'язуваність наступної системи і доводимо, що для довільних елементів $\{\gamma,\eta\} \subset W_1^p$ існує таке дійсне число $\tilde{\mu} > 0$, що для всіх малих $0 < \mu < \tilde{\mu}$ система нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$$

має єдиний розв'язок $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Доведення. Для доведення існування розв'язку перепишемо цю систему у наступному вигляді:

$$u = \gamma + \mu v,$$

$$v - \mu \mathrm{A} u = \eta,$$

і підставимо $u = \gamma + \mu v$ в $v - \mu \mathrm{A} u = \eta$, тоді маємо:

$$v - \mu \mathrm{A}\left(\gamma + \mu v\right) = \eta.$$

Або в розгорнутому вигляді:

$$v - \mu \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\gamma + \mu v\right)\right) + \mu b(x, \left(\gamma + \mu v\right), \nabla\left(\gamma + \mu v\right)) = \eta$$

Розпишемо лінійний доданок:

$$\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma-\mu v)\right)=\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma\right)+\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\mu v\right),$$

тоді останнє рівняння набуде вигляду:

$$v-\mu^2\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)+\mu b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v))=$$

$$=\eta+\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma\right).$$

Далі зауважимо, що доданок елементу γ в нелінійній складові рівняння $b(x,(\gamma+\mu v),$ $\nabla(\gamma+\mu v))$ не впливає на характер умов тобто умови на не лінійність матимуть той самий вигляд (з іншими функціями $\mu_i(x)$, а отже з іншою форм — гранью), а саме:

$$|b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v))|\leqslant\mu\left(\mu_1(x)|\nabla u|+\mu_2(x)|u|+\mu_3(x)\right),$$

$$|b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v))-b(x,(\gamma+\mu w),\nabla(\gamma+\mu w))|\leqslant$$

$$\leqslant\mu\left(\mu_4(x)|v-w|+\mu_5(x)|\nabla(v-w)|\right).$$

Поділимо його на μ^2, при цьому $\frac{1}{\mu^2}$ позначимо через λ, оскільки $\mu^2>0$, а праву частину через ψ, при цьому зміняться лише позначення, а рівняння залишиться тим же, в спрощеному записі зміняться лише числові сталі форм – грані, що не суттєво, оскільки $\mu^2\to 0$ залежить лише від початкових даних. Отже маємо рівняння:

$$\lambda v-\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)+\frac{1}{\mu}b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v))=\psi.$$

Це квазілінійне еліптичне диференційне рівняння в частинних з повільно зростаючими вимірними коефіцієнтами. Досліджуємо його за допомогою методу акретивних слабко компактних операторів із застосуванням $L^p(R^l,d^lx)$ – форм. Еліптичне рівняння з вимірними повільно зростаючими коефіцієнтами наближається (апроксимується) рівняннями з обмеженими (зрізаними) вимірними коефіцієнтами, наступним чином.

Означення. *Нехай $f(x)$ – вимірна за Лебегом функція на R^l. Тоді, визначимо зрізку f_n функції f за правилом:*

$$f_n=\begin{cases} n, & f>n,\\ f, & |f|\leqslant n,\\ -n, & f<-n;\end{cases}$$

Наступним кроком є згладжування уже обмежених коефіцієнтів еліптичного рівняння.

Означення. *Нехай $f(x)$ – вимірна за Лебегом функція на R^l. Тоді, функція $f^m(x)$ є* "гладкою"апроксимацію функції $f(x)$, за аргументом x:

$$f^m(x) = \int_{R^l} \rho_m(x-t)f(t)dt = \rho_m * f,$$

де $\rho_n(t)$ – гладка невід'ємна апроксимація 1 в R^l.

Тобто, отримано множину еліптичних рівнянь, що залежать від двох натуральних параметрів, які виникають під час «зрізання» та «згладжування». Зауважимо, що послідовність проведення операцій «зрізання» та «згладжування» важлива, тобто спочатку отримуємо коефіцієнти у вигляді обмежених функцій, а вже потім їх наближаємо гладкими функціями.

Далі досліджуємо множину рівнянь з гладкими коефіцієнтами за допомогою методів, що були розроблені вище. Доведення проводяться дослівно аналогічно, з урахуванням того моменту, що замість одного рівняння розглядається сукупність при двох фіксованих натуральних параметрах, так наприклад, форма буде визначатися наступним чином:

$$h_\lambda^{p,mn}(v,w) \equiv \lambda \langle v,w\rangle +$$

$$+ \langle dw \circ a^{m,n} \circ dv\rangle + \left\langle \frac{1}{\mu} b^{m,n}(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)),w \right\rangle,$$

де $w \in W_{1,0}^q(R^l,d^lx)$. При цьому оцінки при доведенні лем не зміняться, оскільки там використовувались лише норми функцій коефіцієнтів та властивість форм – обмеженості. Отже отримана множина розв'язків $v^{m,n}$, що залежить від двох натуральних параметрів згладжування m і зрізання n, далі потрібно зняти обмеження на згладжування та зрізання, тобто перейти до границі по цим натуральним параметрам. Важливим моментом доведення є те, що спочатку знімаються обмеження на згладжування, перехід до границі за параметром mа потім, обмеженість коефіцієнтів, перехід до границі за параметром n.

Переходимо до границі за параметром m. Переходимо до границі за параметром n. А отже, існують функції u і v є шуканими і такими, що задовольняють систему:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Зауваження. *Якщо елементи $\{u,v\} \subset W_1^p(R^l,d^lx) \bigcap C^\infty(R^l)$, тоді є вірною наступна оцінка:*

$$\left\langle u - \lambda_0 \mathrm{A}u, u\,|u|^{p-2} \right\rangle + \lambda_0 \|v\|_p^p \leqslant (1+o(\mu)) \left(\left\langle \gamma - \lambda_0 \mathrm{A}\gamma, \gamma\,|\gamma|^{p-2} \right\rangle + \lambda_0 \|\eta\|_p^p \right),$$

причому додання стала λ_0 не залежать від числа μ і елементів $\{\gamma,\eta\}$.

1. Область визначення оператора $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ є множина таких елементів $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $u \in W_1^p(R^l,d^lx), v \in L^p(R^l,d^lx)$, що елементи u,v є розв'язками системи:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Тоді, коли додатне число μ достатньо мале область значень оператора $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ містить всі елементи $\begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$, $\gamma,\eta \in \hat{W}_1^p(R^l,d^lx) \subset L^p(R^l,d^lx)$, отже для мінімального замкнутого розширення оператора $\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ в просторі $W_1^p(R^l,d^lx) \times L^p(R^l,d^lx)$, оператор $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ має розв'язний, якій всюди визначений на добутку просторів $W_1^p(R^l,d^lx) \times L^p(R^l,d^lx)$.

А отже, випливає, що відповідне розширення оператора $\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ є локальним генератором деякої нелінійної напівгрупи T_t в $W_1^p(R^l,d^lx) \times L^p(R^l,d^lx)$ і $W_1^p(R^l,d^lx) \subset L^p(R^l,d^lx)$.

3. Дослідження гладкості розв'язку рівняння гіперболічного типу у випадку коли коефіцієнти не залежать від часової змінної. Досліджується гладкість розв'язків рівняння:

$$\frac{d^2}{dt^2}u - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right) + \sum_{i=1}^{l} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u + c(x)u + u|u|^{\rho} = f(x,t),$$

де коефіцієнти $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ - гладкі не залежні від часу функції.

Теорема 4.

1. *Якщо* $u_0 \in W_1^2(R^l,d^lx)$, $v_0 \in L^2(R^l,d^lx)$, $f \in L^2\left(0,T;L^2(R^l,d^lx)\right)$, $\rho \leqslant \frac{2}{l-2}$, $l \geqslant 3$, *і*

$u \in L^2\left(0,T;W_1^2(R^l,d^lx)\right)$ $u' \in L^2\left(0,T;L^2(R^l,d^lx)\right)$,
$u'' \in L^2\left(0,T;W_{-1}^2(R^l,d^lx)\right)$ *де функція* u *є слабкий розв'язок Задачі Коші:*

$$\frac{d^2}{dt^2}u - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right) + \sum_{i=1}^{l} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u + c(x)u + u|u|^{\rho} = f(x,t),$$

$$u(0) = u_0, \quad \frac{d}{dt}u(0) = v_0.$$

Тоді $u \in L^\infty\left(0,T;W_1^2(R^l,d^lx)\right)$, $u' \in L^\infty\left(0,T;L^2(R^l,d^lx)\right)$ *і є вірною оцінка:*

$$\begin{aligned} &ess \sup_{t\in[0,T]}\left(\|u'(t)\|_{L^2(R^l,d_lx)} + \|u(t)\|_{W_1^2(R^l,d_lx)}\right) \leqslant \\ &\leqslant C\left(\|u_0\|_{W_1^2(R^l,d_lx)} + \|v_0\|_{L^2(R^l,d_lx)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(R^l,d_lx))}\right). \end{aligned}$$

1. *Якщо* $u_0 \in W_2^2(R^l,d^lx)$, $v_0 \in W_1^2(R^l,d^lx)$, $f' \in L^2\left(0,T;L^2(R^l,d^lx)\right)$, $\rho \leqslant \frac{2}{l-2}$, $l \geqslant 3$,

тоді $u \in L^\infty\left(0,T;W_2^2(R^l,d^lx)\right)$,$u' \in L^\infty\left(0,T;W_1^2(R^l,d^lx)\right)$,
$u'' \in L^\infty\left(0,T;L^2(R^l,d^lx)\right)$,

$u''' \in L^{\infty}\left(0,T; W^2_{-1}(R^l,d^l x)\right)$ *і є вірною оцінка:*

$$ess \sup_{t\in[0,T]}\left(\|u(t)\|_{W_2^2(R^l,d_l x)}+\|u'(t)\|_{W_1^2(R^l,d_l x)}+\right.$$

$$\left.\|u''(t)\|_{L^2(R^l,d_l x)}+\|u'''(t)\|_{L^2(0,T;W^2_{-1}(R^l,d_l x))}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|u_0\|_{W_2^2(R^l,d_l x)}+\|v_0\|_{W_1^2(R^l,d_l x)}+\|f\|_{W_1^2(0,T;L^2(R^l,d_l x))}\right).$$

Доведення. Перше твердження випливає з оцінки «енергії», якщо спрямувати індекс послідовності до нескінченності і перейти до границі у підпослідовності, тобто

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u_k'(t)\|_{L^2(R^l,d_l x)}+\|u_k(t)\|_{W_1^2(R^l,d_l x)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|u_0\|_{W_1^2(R^l,d_l x)}+\|v_0\|_{L^2(R^l,d_l x)}+\|f\|_{L^2(0,T;L^2(R^l,d_l x))}\right).$$

Перше твердження доведено.
Нехай множина $\{w_i\}$є послідовність власних елементів оператора $-\Delta$ в просторі $W^2_{1,0}(R^l,d^l x)$. Складемо інтегральні тотожності $u_k=\sum_{i=1}^k c_i\,(t)\,w_i\ \ i=1,k$:

$$\left\langle\frac{d^2}{dt^2}u_k-\sum_{r,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{rj}\,(x)\,\frac{\partial}{\partial x_r}u_k\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{l}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u_k+c\,(x)\,u_k+u_k\,|u_k|^{\rho},w_i\right\rangle=$$

$$=\langle f(x,t),w_i\rangle\,,$$

і про диференціюємо останню рівність за змінною t, маємо:

$$\left\langle\frac{d^3}{dt^3}u_k,w_i\right\rangle-\left\langle\sum_{r,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{rj}\,(x)\,\frac{\partial}{\partial x_r}u_k'\right),w_i\right\rangle+$$

$$+\left\langle\sum_{j=1}^{l}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u_k',w_i\right\rangle+$$

$$+\langle c\,(x)\,u_k',w_i\rangle+\langle(\rho+1)\,|u_k|^{\rho}\,u_k',w_i\rangle=\langle f'(x,t),w_i\rangle\,,\quad i=1,k.$$

Множимо на $c_i''\,(t)$ і сумуємо за індексом $i=1,k$, маємо:

$$\left\langle\frac{d^3}{dt^3}u_k,u_k''\right\rangle-\left\langle\sum_{r,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{rj}\,(x)\,\frac{\partial}{\partial x_r}u_k'\right),u_k''\right\rangle+$$

$$+\left\langle\sum_{j=1}^{l}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u_k',u_k''\right\rangle+$$

$$+\left\langle c\left(x\right)u_k',u_k''\right\rangle+\left(\rho+1\right)\left\langle\left|u_k\right|^{\rho}u_k',u_k''\right\rangle=\left\langle f'(x,t),u_k''\right\rangle.$$

Позначимо $v_k = u_k'$, отже, в нових позначеннях, за виключенням не лінійного доданку останнє рівняння має той самий вигляд, для якого була доведена оцінка «енергії» і для нього справедлива оцінка:

$$\frac{d}{dt}\left(\|v_k'\|_2^2+\langle dv_k\circ a\circ dv_k\rangle+\|v_k\|_q^q\right)\leqslant$$

$$\leqslant const\left(\|v_{kk}'\|_2^2+\langle dv_k\circ a\circ dv_k\rangle+\|v_k\|_q^q+\|f\|_2^2\right),t\in[0,T].$$

Отже, потрібно оцінити нелінійний доданок, використовуючи нерівність Гельдера, маємо:

$$\left|\left\langle\left|u_k\right|^{\rho}u_k',u_{kk}''\right\rangle\right|\leqslant\left\|\left|u_k\right|^{\rho}\right\|_r\left\|u_k'\right\|_q\left\|u_k''\right\|_2,\ \frac{1}{r}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1.$$

Оскільки $\rho l=(p-2)l\leqslant q$, то маємо $\left\||u_k|^{\rho}\right\|_r\leqslant\|u_k\|^{\rho}\leqslant const$, а отже:

$$\left|\left\langle\left|u_k\right|^{\rho}u_k',u_{kk}''\right\rangle\right|\leqslant const\left\|u_k'\right\|_q\left\|u_k''\right\|_2,$$

тобто можна застосовувати нерівність Гронуола.
Далі запишемо:

$$-\left\langle\sum_{r,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{rj}\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_r}u_k\right),w_i\right\rangle+\left\langle\sum_{j=1}^{l}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u_k,w_i\right\rangle+$$
$$+\left\langle c\left(x\right)u_k,w_i\right\rangle+\left\langle u_k\left|u_k\right|^{\rho},w_i\right\rangle=\left\langle f(x,t),w_i\right\rangle-\left\langle\frac{d^2}{dt^2}u_k,w_i\right\rangle.$$

Помножимо на $\lambda_i c_i(t)$ - де λ_iвідповідні власні числа і сумуємо, маємо:

$$\begin{aligned}&\left\langle u_k'',\Delta u_k\right\rangle=\\&=\left\langle\sum_{r,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{rj}\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_r}u_k\right),\Delta u_k\right\rangle-\left\langle\sum_{j=1}^{l}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u_k,\Delta u_k\right\rangle-\\&-\left\langle c\left(x\right)u_k,\Delta u_k\right\rangle+\left\langle u_k\left|u_k\right|^{\rho},\Delta u_k\right\rangle+\left\langle f(x,t),\Delta u_k\right\rangle.\end{aligned}$$

Отже, аналогічно, маємо:

$$\|u_k''(0)\|_2^2\leqslant const\left(\|u_0\|^2_{W_2^2(R^l,d_lx)}+\|v_0\|^2_{W_1^2(R^l,d_lx)}+\|f\|_2^2\right).$$

Використовуючи нерівність Гронуола і позначення $v_k=u_k'$, отримуємо:

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u_k(t)\|^2_{W_2^2(R^l,d_lx)}+\|u_k'(t)\|^2_{W_1^2(R^l,d_lx)}+\|u_k''(t)\|^2_{L^2(R^l,d_lx)}\right)\leqslant\\&\leqslant C\left(\|u_0\|^2_{W_2^2(R^l,d_lx)}+\|v_0\|^2_{W_1^2(R^l,d_lx)}+\|f\|^2_{W_1^2(0,T;L^2(R^l,d_lx))}\right).\end{aligned}$$

Для завершення доведення перейдемо до границі по підпослідовності при $k_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$. Теорема 4 доведена.

Розглянемо приклад . Рівняння телеграфного типу:
$\vartheta u_{tt}-\left(\rho u_x\right)_x-\sigma u_t+\zeta u=0$, де $\vartheta>0$, $\rho>0$, $\sigma\geqslant 0$, $\zeta>0$, при всіх $x\in(a,b)$.

Введемо заміну $\upsilon_1 = u$, $\upsilon_2 = u_x$, $\upsilon_3 = u_t$,тоді телеграфне рівняння буде записане у вигляді системи:

$$\begin{cases} \upsilon_1 = \upsilon_3, \\ \rho\upsilon_2 = (\rho\upsilon_3)_x - \rho_x\upsilon_3, \\ \vartheta\upsilon_3 = (\rho\upsilon_2)_x - \zeta\upsilon_1 - \sigma\upsilon_3. \end{cases}$$

Отже, якщо вектор $(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ задовольняє дану систему і початкові дані у вигляді $\upsilon_2(x,0) = \upsilon_{1x}(x,0)$, оскільки, $\upsilon_{2t} = \upsilon_{1tx} = \upsilon_{3x}$, тоді для всіх $t > 0$ виконується рівність $\upsilon_2(x,t) = \upsilon_{1x}(x,t)$, для всіх розв'язків системи. Дана система є диссипативною і її можна досліджувати за допомогою теорії напівгруп стиску.

Висновки. Доведено існування слабкого розв'язку квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу з сингулярними коефіцієнтами. Результати даної роботи можуть бути узагальнені на більш широкі класи рівнянь.

1. **Ахиезер Н.И.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер. – М.: Гостехиздат, 1950. – 543 с.
2. **Вишик М.Й.** О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений / М.Й. Вишик // Матем. сб. – 1951. – Т. , №3. – С. 615–676.
3. **Вишик М.Й., Чепыжов В.В.** Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами / М.Й.Вишик, В.В. Чепыжов // Матем. сб. – 2001. – Т. 192, №1. – С.13–50.
4. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В.Скороход. – М.: Наука, 1965. – 510 с.
5. **Дубинский Ю.А.** Нелинейные параболические и эллиптические уравнения / Ю.А. Дубинский // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1976. – Т. 9. – С. 5 – 130.
6. **Иосида К.** Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
7. **Кухарчук М.М., Яременко М.І.** Про розв'язність одного класичного лінійного еліптичного диференціального рівняння другого порядку / М.М.Кухарчук, М.І.Яременко // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – №5. – С. 137–141.
8. **Кухарчук М.М., Яременко М.І.** Про аналог теореми Лакса / М.М.Кухарчук, М.І.Яременко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2008. – №3. – С. 183–185.

Яременко Н. И.

Гиперболические уравнения с сингулярными коэффициентами

Резюме

Работа посвящена доказательству существования слабого решения квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных в пространствах W_1^p с измеримыми коэффициентами. Исследование проводится с использованием метода Галеркина и метода форм и нелинейных монотонных операторов. Условия на коэффициенты уточняются в процессе исследования свойств нелинейных операторов, порожденных формой,

составленной по левым частям заданного уравнения.
Ключевые слова: гиперболическое уравнение, сингулярные коэффициенты, метод форм

Yaremenko M. I.
HYPERBOLIC EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENT

Summary

Dedicated to research existence conditions of quasi-linear differential equations with measurable coefficients, ie the study limitations imposed by the non linearity in which the system will have to research a solution and uniqueness of the solution of a certain class of functions. We consider weak solvability of quasi-linear differential partial differential equations of hyperbolic type with smooth and measurable singular coefficients, research methods based on the theory of semigroups using the method of differential forms. A new class of operators $A_\lambda^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ associated with a given differential equation and investigate the properties of these operators.
Key words: hyperbolic equation, singular coefficient, metod form.

REFERENCES

1. Ahiezer, N. I. (1950). *Teoriya lineynyih operatorov v gilbertovom prostranstve*, Moscow: Gostehizdat, 543 p.
2. Vishik, M. Y. (1951). O silno ellipticheskih sistemah differentsialnyih uravneniy, *Matem. sb.*, vol. 29(71), no. 3, pp. 615–676.
3. Vishik, M. Y. & Chepyizhov, V. V. (2001). Usrednenie traektornyih attraktorov evolyutsionnyih uravneniy s byistro ostsilliruyuschimi chlenami, *Matem. sb.*, vol. 192, no. 1, pp. 13–50.
4. Gihman, I. I. & Skorohod, A. V. (1965). *Vvedenie v teoriyu sluchaynyih protsessov*, Moscow: Nauka, 510 p.
5. Dubinskiy, Yu. A. (1976). Nelineynyie parabolicheskie i ellipticheskie uravneniya, *Itogi nauki i tehniki. Seriya: Sovremennyie problemyi matematiki*, Moscow: VINITI, vol. 9, pp. 5–130.
6. Iosida, K. (1967). *Funktsionalnyiy analiz*, Moscow: Mir, 624 p.
7. Kukharchuk, M. M. & Yaremenko, M. I. (2008). Pro rozviaznist odnoho klasychnoho liniinoho eliptychnoho dyferentsialnoho rivniannia druhoho poriadku, *Naukovi visti NTUU KPI*, no. 5, pp. 137–141.
8. Kukharchuk, M. M. & Yaremenko, M. I. (2008). Pro analoh teoremy Laksa, *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriia: fizyko-matematychni nauky*, no. 3, pp. 183–185.