

УДК 517.928

**В. В. Платонов<sup>1</sup>, Е. В. Платонова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ТОВ НЕТКРЕКЕР, Одеса

<sup>2</sup> Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

## **УСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СУДОВОГО КОМПЛЕКСА ПРИ ПРЯМОМ КУРСЕ СУДНА**

В статье рассматривается возможность применения схемы полного усреднения к задаче управления судовым комплексом. Впервые модель этой задачи была описана Небесновым В. И., Плотниковым В. А. и Кузюшиным Ф. Я для судна с винтом регулируемого шага, позволяющим управлять движением судна только с помощью изменения степени разворота лопасти, не изменяя работы двигателя. В статье применена схема полного усреднения для задачи управления судовым комплексом при прямом движении судна с некоторой угловой и линейной скоростью в условиях регулярного волнения. Построено множество оптимальных управлений усреднённой задачи. Применяя схему усреднения, удалось аппроксимировать множество допустимых управлений усреднённой системы множеством меньшей размерности с описанием его в явном виде, что значительно уменьшает объем вычислений.

*MSC:34C29, 34A60 .*

*Ключевые слова: усреднение, дифференциальные включения, ВРШ, множество допустимых управлений .*

**ВВЕДЕНИЕ.** При исследовании динамики механических систем часто получают модели, содержащие системы дифференциальных уравнений с малыми параметрами. Для их решения используются различные асимптотические методы, в частности, метод усреднений. Метод усреднения связан с существованием некоторой замены переменных, позволяющей исключить время  $t$  из правых частей рассматриваемых уравнений с наперед заданной степенью точности относительно малого параметра. Метод усреднений значительно сокращает объем вычислений, необходимый для решения задач. Поэтому метод часто используется для решения прикладных задач управления [3].

В статье приведены результаты применения одной из схем метода усреднения к дифференциальным уравнениям движения комплекса при прямом курсе судна.

### **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**

**1. Общая постановка задачи и необходимые теоретические сведения.** Пусть движение объекта описывается системой вида:

$$\dot{x} = \varepsilon [f(t, x) + A(x) \phi(t, u)], \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

где  $x$ - $n$ -мерный фазовый вектор,  $\varepsilon$ -малый параметр,  $f(t, x)$  и  $\phi(t, x)$ -вектор функции,  $2\pi$ -периодические по времени  $t$ ,  $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ ,  $A(x)$  –  $n \times m$  матрица;  $u \in U$ -вектор управления,  $U \subset \text{comp}(R^m)$ . Все функции измеримы, ограничены и удовлетворяют условию Липшица по  $x$  и  $u$ .

Применим схему полного усреднения [2] к системе (1). Системе (1) поставим в соответствие следующую усреднённую систему

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} = \bar{f}(\bar{x}) + A(\bar{x}) \varsigma(z), \quad \bar{x}(0) = x_0 \quad (2)$$

где  $z \in R^m$ - новый вектор управления,  $\|z\| = 1$ ,  $\varsigma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(t, y(t, z)) dt$  — функция, которая ставит в соответствие новому единичному вектору управления точку на границе множества

$V = \left\{ \varsigma \in R^m \mid \varsigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(t, u(t)) dt, u(t) \in U \right\}$  функция  $y(t, z)$  определяется из условия  $(\phi(t, y(t, z)), z) = \max_{u \in U} (\phi(t, u), z)$

Уравнения (1) и (2) можно переписать в виде дифференциальных включений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), u \in U, x(t_0) = x_0 \\ \dot{x} &\in f(t, x, U) \\ \dot{x} &\in F(t, x) \\ \dot{\bar{x}} &\in \bar{F}(t, \bar{x}) \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \{f(t, x, u) \mid u(t) \in U\} \\ \bar{F}(t, x) &= \left\{ \bar{f}(x) \in R^n \mid \bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, x, u(t)) dt, u(t) \in U \right\} \end{aligned}$$

Теорема [2]. Пусть в области  $Q\{t \geq 0, x \in D \subset R^n\}$  выполнены следующие условия:

- 1) отображение  $F(t, x)$  является непустым компактом при всех допустимых значениях аргументов, непрерывно, равномерно ограничено, удовлетворяет условию Липшица по  $x$  с постоянной  $\lambda$ ;
- 2) отображение  $F(t, x)$   $2\pi$ -периодично по  $t$ ;
- 3) для всех  $x_0 \in D' \subset D$  и  $t \geq 0$  решения включения (4) вместе с некоторой  $\rho$ -окрестностью лежат в области  $D$ .

Тогда для любого  $L > 0$  найдутся такие  $\varepsilon^0(L) > 0$  и  $L > 0$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$  и  $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$  справедлива оценка

$$h(\dot{R}(t), R^1(t)) \leq C\varepsilon$$

где  $\dot{R}(t)$  — сечение семейства решений усреднённого включения (4),  $R^1(t)$ -замыкание семейства решений исходного включения (3).

Рассмотрим применение этой схемы усреднений для задачи управления судовым комплексом.

**2. Построение моделей движения судна.** Пусть судно движется прямым курсом, и все его главные двигатели работают на одинаковых режимах на гребные винты непосредственно или через зубчатые редукторы. Тогда, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dT} &= \bar{P} - \bar{R} \\ \frac{d\bar{\omega}}{dT} &= N(\bar{M}_D - \bar{M}_C), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$v = \frac{v}{v_0}, T = \frac{z_B P_0}{m v_0} t, \bar{P} = \frac{P}{P_0}, \bar{R} = \frac{R}{R_0}, \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$N = \frac{m v_0 M_{C0}}{\bar{I} \omega_0 z_B P_0}, \bar{M}_D = \frac{M_D}{M_{D0}}, M_C = \frac{M_C}{M_{C0}};$$

$v, P, R, \omega, M_D$  и  $M_C$  — текущие значения соответственно скорости движения судна, тяги винта, силы сопротивления корпуса, угловой скорости винта, эффективного движущего момента, приведенного к гребному валу, и момента сопротивления винта; индекс «0» означает, что взято начальное значение параметра, соответствующее некоторому установившемуся режиму;  $z_B$  — число винтов;  $m$  — масса судна, включая присоединенную массу;  $t$  — время;  $z_B$  — число винтов;  $\bar{I}$  — приведенный к гребному валу момент инерции движущихся частей, включая массу воды.

Для случая движения в спокойной воде судна с винтами регулируемого шага уравнения (5) приводится к виду [1]:

$$\frac{d\bar{v}}{d\tau} = \left[ \bar{\varphi} \left( a_1 \bar{\omega}^2 + b_1 \frac{\lambda_0}{\lambda_{1 \max}} \bar{v} \bar{\omega} + c_1 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1 \max}^2} \bar{v}^2 \right) + e_1 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1 \max}^2} \bar{v}^2 \right] -$$

$$- \chi \left[ \frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}} \left( a_1^0 + b_1^0 \frac{\lambda_0}{\lambda_{1 \max}} + c_1^0 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1 \max}^2} \right) + e_1^0 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1 \max}^2} \right] \bar{v}^2; \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\tau} = N \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}} \left[ \frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}} \left( a_2^0 + b_2^0 \frac{\lambda_0}{\lambda_{2 \max}} + c_2^0 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2 \max}^2} \right) + e_2^0 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2 \max}^2} \right] M^0 - \\ - \bar{\varphi} \left[ \bar{\varphi} \left( a_2 \bar{\omega}^2 + b_2 \frac{\lambda_0}{\lambda_{2 \max}} \bar{v} \bar{\omega} + c_2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2 \max}^2} \bar{v}^2 \right) + e_2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2 \max}^2} \bar{v}^2 \right] \end{array} \right\}.$$

здесь

$$\tau = z_B K_{1 \max}^0 \frac{\rho D^4}{(2\pi)^2} \frac{\omega_0^2}{m v_0} t;$$

$$\chi = \begin{cases} \chi_1, & \text{если } \bar{v} \geq 0 \\ -1.35\chi_1, & \text{если } \bar{v} < 0 \end{cases}; \quad (7)$$

$$N = \frac{m v_0 K_{2 \max}^0 D}{\bar{I} \omega_0 z_B K_{1 \max}^0};$$

$a_1^0, b_1^0, c_1^0, e_1^0, a_2^0, b_2^0, c_2^0, e_2^0, \chi_1$  — значения соответствующих коэффициентов на исходном режиме;  $D$  — диаметр гребного винта;  $\rho$  — плотность воды;  $\varphi_i$  — текущее значение шагового отношения;  $\lambda_i$  — присоединенный момент инерции  $i$ -го винта;  $\lambda_0$  — относительная поступь винта на исходном режиме;  $K_{10}$  — начальное значения коэффициентов гидромеханических сил, действующих на корпус судна.

Для различных комбинаций знака  $\bar{\varphi}$  и  $\bar{v}$  коэффициенты  $a_1, b_1, c_1, e_1, a_2, b_2, c_2$  и  $e_2$  имеют различные значения. В частности:

Случай 1.  $\bar{\varphi} \geq 0$  и  $\bar{v} \geq 0$  задано  $a_1 = 1, b_1 = -0.60, c_1 = 1.20, e_1 = -1.6, a_2 = 1, b_2 = -0.65, c_2 = 1.45, e_2 = -1.8$ .

Случай 2.  $\bar{\varphi} \leq 0$  и  $\bar{v} \geq 0$  задано  $a_1 = 0.75, b_1 = -1.40, c_1 = 2.05, e_1 = -1.6, a_2 = 0.90, b_2 = -1.60, c_2 = 2.30, e_2 = -1.8$ .

Случай 3.  $\bar{\varphi} \leq 0$  и  $\bar{v} \leq 0$  задано  $a_1 = 0.75, b_1 = 0.32, c_1 = 1.6, e_1 = 2.5, a_2 = 0.90, b_2 = 0.34, c_2 = 1.8, e_2 = 2.7$ .

В статье рассматривается случай 1, т. е. когда судно движется вперёд с некоторой угловой и линейной скоростью. Здесь

$$P_{e0} = \frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}} \left( a_1^0 + b_1^0 \frac{\lambda_0}{\lambda_{1\max}} + c_1^0 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2} \right) + e_1^0 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}; \quad (8)$$

$$M_{C0} = \frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}} \left[ \frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}} \left( a_2^0 + b_2^0 \frac{\lambda_0}{\lambda_{2\max}} + c_2^0 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2} \right) + e_2^0 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2} \right],$$

Тогда получим

$$\frac{d\bar{v}}{d\tau} = \left[ \bar{\varphi} \left( a_1 \bar{\omega}^2 + b_1 \frac{\lambda_0}{\lambda_{1\max}} \bar{v} \bar{\omega} + c_1 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2} \bar{v}^2 \right) + e_1 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2} \bar{v}^2 \right] - \chi P_{e0} \bar{v}^2; \quad (9)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\tau} = N \left\{ M_{C0} M^0 - \bar{\varphi} \left[ \bar{\varphi} \left( a_2 \bar{\omega}^2 + b_2 \frac{\lambda_0}{\lambda_{2\max}} \bar{v} \bar{\omega} + c_2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2} \bar{v}^2 \right) + e_2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2} \bar{v}^2 \right] \right\}$$

При движении судна с винтами регулируемого шага в условиях регулярного волнения уравнения движения (5) имеют вид[1]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{d\tau} &= \frac{1}{A} \left\{ \left[ \bar{\varphi} \left( a_1 \bar{\omega}^2 + b_1 \frac{\lambda_0}{\lambda_{1\max}} \bar{v} \bar{\omega} + c_1 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2} \bar{v}^2 \right) + e_1 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2} \bar{v}^2 \right] c_1(\tau) - \chi P_{e0} c_{10} \bar{v}^2 \right\}; \\ \frac{d\bar{\omega}}{d\tau} &= \frac{N}{A} \left\{ M_{C0} c_{20} M^0 - \bar{\varphi} \left[ \bar{\varphi} \left( a_2 \bar{\omega}^2 + b_2 \frac{\lambda_0}{\lambda_{2\max}} \bar{v} \bar{\omega} + c_2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2} \bar{v}^2 \right) + e_2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2} \bar{v}^2 \right] c_2(\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$c_1(\tau) = \begin{cases} 0.4 + 1.2\alpha(\tau) & \text{при } \alpha(\tau) \leq 0,5 \\ 1 & \text{при } \alpha(\tau) > 0,5 \end{cases}; \quad (11)$$

$$c_2(\tau) = \begin{cases} 0.5 + \alpha(\tau) & \text{при } \alpha(\tau) \leq 0,5 \\ 1 & \text{при } \alpha(\tau) > 0,5 \end{cases}$$

$$\alpha(\tau) = \frac{h_0}{2.4R} - \frac{e\psi_0}{2.4R} \sin \tau; \quad (12)$$

$\tau = pt$ ,  $P$ - частота качки,

$$A = \frac{mv_0 P}{z_B K_{1max}^0 \frac{\rho D^4}{(2\pi)^2} \omega_0^2}$$

$h_0$  - погружение винта при  $\psi = 0$ ;  $R$  - радиус винта;  $e\psi_0$  - амплитуда колебаний винта в вертикальной плоскости.

Рассмотрим случай, когда  $\alpha(\tau) = 0.5 - 0.4 \sin(\tau)$ . В этом случае функции  $c_1(\tau) > 0$  и  $c_2(\tau) > 0$ , для любого  $\tau$ .

**3. Применение схемы усреднения к задаче управления судовым комплексом.** Построим усреднённую систему к системе (10)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \frac{1}{A} \left\{ e_1 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2} v^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_1(\tau) d\tau - \chi P_{e0} c_{10} v^2 + \left( a_1 \omega^2 + b_1 \frac{\lambda_0}{\lambda_{1\max}} v \omega + c_1 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2} v^2 \right) x_1(z) \right\} \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \frac{N}{A} \left\{ M_{C0} c_{20} M^0 - \left( a_2 \omega^2 + b_2 \frac{\lambda_0}{\lambda_{2\max}} v \omega + c_2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2} v^2 \right) x_2(z) - \right. \\ &\quad \left. - e_2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2} v^2 x_3(z) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\zeta(z) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\tau, z) c_1(\tau) d\tau; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\tau, z) c_2(\tau) d\tau; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\tau, z)^2 c_2(\tau) d\tau \right)^T \quad (14)$$

$z(\tau) \in R^3$  - новый вектор управления,  $\|z\| = 1$ ,  $\varsigma(z)$  - функция, ставящая в соответствие вектору  $z$ , некоторую точку граничного множества  $V$ . Функцию  $p(\tau, z)$  ищем из условия максимума функции Гамильтона:

$$H(\tau, p(\tau, z), z) = \max_{u \in U} H(\tau, u, z) = \max_{u \in U} (c_1(\tau)uz_1 + c_2(\tau)uz_2 + c_2(\tau)u^2z_3).$$

Тогда из условия  $\frac{dH(\tau, u, z)}{du} = 0$  и  $\frac{d^2H(\tau, u, z)}{du^2} < 0$  получим

$$p(\tau, z) = \begin{cases} \frac{c_1(\tau)}{c_2(\tau)} \left( -\frac{z_1}{2z_3} \right) + \left( -\frac{z_2}{2z_3} \right), & \text{если } c_2(\tau)z_3 < 0 \\ \text{sign}(c_1(\tau)z_1 + c_2(\tau)z_2), & \text{если } c_2(\tau)z_3 \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

Рассмотрим случай, когда коэффициенты в функции  $c_2(\tau)$  таковы, что  $c_2(\tau) > 0$ , для любого  $\tau$ .

Тогда

$$p(\tau, z) = \begin{cases} \frac{c_1(\tau)}{c_2(\tau)} \left( -\frac{z_1}{2z_3} \right) + \left( -\frac{z_2}{2z_3} \right), & \text{если } z_3 < 0 \\ \text{sign}(c_1(\tau)z_1 + c_2(\tau)z_2), & \text{если } z_3 \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

Вектор  $\varsigma(z)$  находим по формуле (14). Зададим

$$z = (z_1, z_2, z_3)^T = (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \sin \varphi_2)^T \quad (17)$$

где  $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ ,  $\varphi_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2, \quad \frac{z_2}{z_3} = \sin \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2$$

В случае  $z_3 < 0$  ( $\varphi_2 \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ ), учитывая (17), координаты точек множества  $V = \{\varsigma = \varsigma(z) \mid \|z\| = 1\}$  будут заданы формулами:

$$\varsigma_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{c_1^2(t)}{c_2(t)} dt (-0.5 \cos \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_1(t) dt (-0.5 \sin \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2) \quad (18)$$

$$\varsigma_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_2(t) dt (-0.5 \cos \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_2(t) dt (-0.5 \sin \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \varsigma_3(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{c_1^2(t)}{c_2(t)} dt (-0.5 \cos \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2)^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_1(t) dt (0.5 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \text{ctg}^2 \varphi_2) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_2(t) dt (-0.5 \sin \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2)^2 \end{aligned} \quad (20)$$

В случае  $z_3 \geq 0$  ( $\varphi_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ), учитывая (17), координаты точек множества  $V = \{\varsigma = \varsigma(z) \mid \|z\| = 1\}$  будут заданы формулами:

$$\varsigma_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_1(t) \text{sign}(2c_2(t) \cos \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2 + 2c_2(t) \sin \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2) dt \quad (21)$$

$$\varsigma_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_2(t) \text{sign}(c_1(t) \cos \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2 + c_2(t) \sin \varphi_1 \text{ctg} \varphi_2) dt \quad (22)$$

$$\varsigma_3(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_2(t) dt \quad (23)$$

**4. Построение множества управлений усреднённой задачи.** Множество  $V$ , построенное по формулам (18)–(23), имеет вид, представленный на рисунке 1.

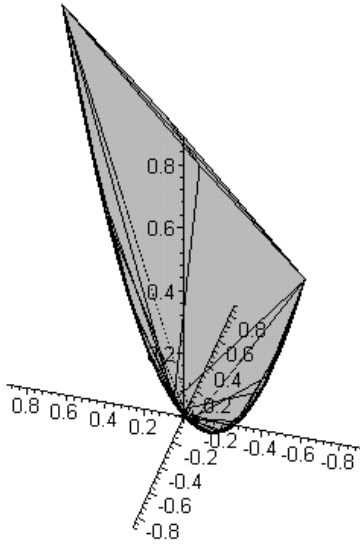


Рис 1. Множество  $V$  при  $\alpha(\tau) = 0.5 - 0.4 \sin(\tau)$ ,  $\varepsilon = 0.1$ .

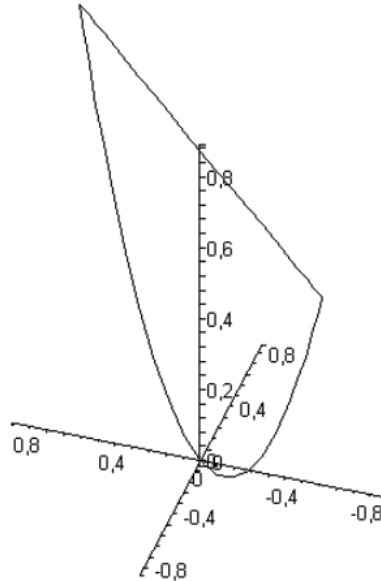


Рис 2. Множество  $Y$ .

Множество  $V$  является множеством допустимых управлений усреднённой задачи. Было получено задание точек множества  $V$  явном виде. Из выражений задающих множество  $V$  и изображения множества видно, что с некоторой погрешностью  $V$  можно приблизить некоторым множеством  $Y$  плоским в пространстве  $R^3$ , что позволяет осуществить переход к новому двумерному управлению. Граница множества  $Y$  может быть задана в виде:

$$\partial Y = \left\{ \begin{array}{l} y = (y_1, y_2, y_3) \mid y_1 = \beta_1 t, y_2 = \beta_2 t, y_3 = \beta_3 t^2, \text{ при } t \in (-1, 1) \\ y_1 \in [-1, 1], y_2 = y_1, y_3 = \beta_3, \text{ при } t = 1, t = -1 \end{array} \right\} \quad (24)$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{c_1^2(t)}{c_2(t)} dt = 0.82419, \quad \beta_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_1(t) dt = 0.8472,$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_2(t) dt = 0.8727.$$

График множества  $Y$  представлен на рисунке 2.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Таким образом, в статье применён метод усреднения для задачи управления движением судном с винтом регулируемого шага. Так как в задаче управление входит линейно, то принцип максимума Понтрягина является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности управления. Поэтому построенное множество управлений  $V$  усреднённой задачи будет множеством оптимальных допустимых управлений. Метод усреднения позволил также уменьшить размерность пространства управлений и уменьшить объем вычислений.

1. **Небеснов В. И.**, Плотников В. А., Кузюшин Ф. Я. Оптимальное управление ВРШ на волнении. – М.: Пищевая промышленность, 1974. – 87 с.
2. **Плотников В. А.**, Плотников А. В., Витюк О. Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.
3. **Салмин В. В.**, Ишков С. А., Старинова О. Л. Методы решения вариационных задач механики космического полета с малой тягой. – Изд-во СНЦ, 2006.

*Платонов В. В., Платонова Е. В.*

УСЕРЕДНЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ РУХУ СУДНОВОГО КОМПЛЕКСУ ПРИ ПРЯМОМУ КУРСІ СУДНА

*Резюме*

У статті розглядається можливість застосування схеми повного усереднення до задачі керування судновим комплексом. Вперше модель цього типу була описана Небесновим В. І., Плотниковим В. А. і Кузюшином Ф. Я. для судна з гвинтом регульованого кроку, що дозволяє управляти рухом судна тільки за допомогою зміни ступеня розвороту лопаті, не змінюючи режим роботи двигуна. У статті застосована схема повного усереднення для задачі управління судновим комплексом при прямому русі судна з деякою кутовою та лінійною швидкістю в умовах регулярного хвилювання. Побудовано множина оптимальних керувань усередненої задачі. Застосовуючи схему усереднення, вдалося апроксимувати множину допустимих керувань усередненої системи множиною меншої розмірності з описом його в явному вигляді, що значно зменшує обсяг обчислень  
*Ключові слова:* усереднення, диференціальні включення, ГПК, множина допустимих керувань .

*Platonov V. V., Platonova E. V.*

AVERAGING OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MOVEMENT FOR THE SHIP ON THE DIRECT COURSE

*Summary*

The possibility of applying the full averaging scheme to the ship complex control problem is considered in the article. The model of this problem was first described by V. I. Nebesnov and V. A. Plotnikov and F. Y. Kuzyushin. In the paper we considered a full averaging scheme for the problem of controlling a ship complex in the direct movement with a certain angular and linear velocity under conditions of regular waves. A set of optimal controls for the averaged problem is constructed. By applying the averaging scheme it is possible to approximate the set of admissible controls of the averaged system by a set of smaller dimension with an

explicit description of it, which significantly reduces the amount of computation.

*Key words:* Averaging, differential inclusions, VPP, the set of admissible controls.

## REFERENCES

1. Nebesnov, V. I., Plotnikov, V. A. & Kuzyushin, F. Ya. (1974). *Optimalnoe upravlenie VRSh na volnenii*, Moscow: Pischevaya promyshlennost, 87 p.
2. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V. & Vityuk, O. N. (1999). *Differentsialnyie uravneniya s mnogoznachnoy pravoy chastyu*, Odessa: Astroprint, 356 p.
3. Salmin, V. V., Ishkov, S. A. & Starinova, O. L. (2006). *Metodyi resheniya variatsionnyih zadach mehaniki kosmicheskogo poleta s maloy tyagoy*, Moscow: Izd-vo SNTs.