

УДК 517.5

Н. В. Парфінович

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ОЦІНКИ НОРМ ПОХІДНИХ ЗА РІССОМ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Нехай $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ – оператор Лапласа. Позначимо через $L_s(\mathbb{R}^m)$ ($1 \leq s \leq \infty$) простори вимірних функцій $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ зі скінченною нормою $\|f\|_s$. Нехай F і E – ідеальні решітки на \mathbb{R}^m зі скінченими нормами $\|\cdot\|_F$ і $\|\cdot\|_E$. Через $L_{F,E}^\Delta(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in F$ таких, що $\Delta f \in E$. Якщо $F = L_s(\mathbb{R}^m)$ ($1 \leq s \leq \infty$), то будемо використовувати позначення $L_{s,E}^\Delta$, або $L_{s,s}^\Delta$ якщо, крім цього, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$. В роботі отримано нові нерівності типу Колмогорова для норм похідних за Ріссом $D^\alpha f$ функцій $f \in L_{\infty,E}^\Delta(\mathbb{R}^m)$. Як наслідок, отримані такі нерівності для функцій $f \in L_{s,s}^\Delta(\mathbb{R}^m)$. Розв'язано задачу про наближення необмеженого оператора D^α обмеженими на класі функцій f таких, що $\|\Delta f\|_E \leq 1$.

MSC: 26D10, 35A23, 41A17, 41A35, 41A65.

Ключові слова: дробова похідна, нерівності для похідних, наближення необмежених операторів обмеженими, ідеальні решітки.

ВСТУП. Нерівності типу Ландау–Колмогорова відіграють важливу роль в багатьох галузях математики і її застосувань. На теперішній час відомо багато точних нерівностей такого типу для функцій однієї змінної (див. [1], а також [2]–[4] і монографії [5, 6]). Значно менше точних нерівностей отримано для функцій багатьох змінних (див., напр., [7]–[12]), а також для похідних нецілого порядку (див., напр., [13]–[22], [23, гл. 2] і відповідну бібліографію).

Задача про точні нерівності типу Колмогорова тісно пов'язана із задачею Стечкіна про наближення необмеженого оператора на класі Q обмеженими (див. [3, 4], а також [5, § 7.1]).

В даній роботі розглядаються вказані задачі для функцій, заданих на \mathbb{R}^m , у випадках, коли лапласіани вказаних функцій (або і самі функції також) належать ідеальним решіткам. При цьому оцінюються норми похідних Рісса цих функцій. Представлені в роботі результати є продовженням досліджень, розпочатих в [20]–[22].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Означення. Нехай \mathbb{R}^m ($m \in \mathbb{N}$) – евклідів простір точок $x = (x_1, \dots, x_m)$, $|x| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$, $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ – простір вимірних функцій $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Через $L_s = L_s(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq s \leq \infty$, позначимо простори функцій $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_s = \|f\|_{L_s(\mathbb{R}^m)} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(t)|^s dt\right)^{1/s}, & 1 \leq s < \infty, \\ \text{ess sup}\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}^m\}, & s = \infty, \end{cases}$$

а через $C = C(\mathbb{R}^m)$ – простір неперервних, обмежених функцій $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_C = \|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} := \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}^m\}.$$

Нехай

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

– оператор Лапласа. Для локально інтегровних на \mathbb{R}^m функцій f і g будемо писати

$$\Delta f = g,$$

якщо для будь-якої фінітної нескінченно диференційовної функції φ

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Delta \varphi(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) g(x) dx.$$

Через $L_{p,s}^\Delta = L_{p,s}^\Delta(\mathbb{R}^m)$ ($1 \leq p, s \leq \infty$) позначимо сукупність функцій $f \in L_p$ таких, що $\Delta f \in L_s$. Через $W_{p,s}^\Delta = W_{p,s}^\Delta(\mathbb{R}^m)$ позначимо клас функцій f із $L_{p,s}^\Delta$ таких, що $\|\Delta f\|_s \leq 1$.

Похідна Рісса порядку α ($0 < \alpha < 2$) функції $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ означається рівністю (див. [24, с. 367–368])

$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}} dt,$$

де

$$d_{m,2}(\alpha) = \frac{2^{1-\alpha} \pi^{1+\frac{m}{2}}}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)}$$

– нормуючий множник [24, с. 373]. Відзначимо, що похідна Рісса D^α реалізує [24, с. 368] дробовий степенінь $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

Для $h > 0$ зрізаною похідною Рісса порядку $\alpha \in (0,2)$ функції $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ називається

$$(D_h^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}} dt$$

(тут і скрізь нижче $B_h = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq h\}$ – куля радіуса h з центром в початку координат).

Лінійний простір $E = \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ з нормою $\|\cdot\|_E$ називається ідеальною решіткою на \mathbb{R}^m (див. [25, розд. 2, §2]), якщо для кожної функції $f \in E$ і $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ таких, що $|g(x)| \leq |f(x)|$ майже скрізь на \mathbb{R}^m , випливає, що $g \in E$ і $\|g\|_E \leq \|f\|_E$.

Множина $A(E) \subset \mathbb{R}^m$ називається носієм ідеальної решітки E , якщо $f(x) = 0$ для всіх $f \in E$ і $x \notin A(E)$.

Через E^1 позначимо асоційований підпростір до E (див. [25, розд. 2, §3]), тобто простір функцій $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$, такий що $\text{supp } g \subset A(E)$ і

$$\|g\|_{E^1} := \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|_E \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)g(x) dx < \infty.$$

Зрозуміло, що E^1 є ідеальною решіткою на \mathbb{R}^m і підпростором в просторі, спряженому до E .

Ідеальні решітки утворюють багато важливих просторів, таких як простір $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p \leq \infty$, простір Орліча [26], простір Лоренца [25], простір Марцинкевича [25] та ін.

В подальшому ми будемо також говорити, що ідеальна решітка E є напівінваріантною відносно зсуву, якщо для кожної $f \in E$ і $x \in \mathbb{R}^m$ виконується $f(\cdot + x) \in E$, а також $\|f(\cdot + x)\|_E = \|f\|_E$.

Нехай F і E – ідеальні решітки. Через $L_{F,E}^\Delta = L_{F,E}^\Delta(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in F$ таких, що $\Delta f \in E$. Через $W_{F,E}^\Delta$ позначимо клас функцій f із $L_{F,E}^\Delta$, для яких $\|\Delta f\|_E \leq 1$.

Якщо $F = L_p(\mathbb{R}^m)$, то будемо використовувати позначення $L_{p,E}^\Delta$ і $W_{p,E}^\Delta$ відповідно.

Нехай X і Y – банахові простори, $A : X \rightarrow Y$ – оператор (не обов'язково лінійний) з областю визначення $D_A \subset X$, $Q \subset D_A$ – деяка множина. Через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, Y)$ будемо позначати простір лінійних обмежених операторів $S : X \rightarrow Y$. Для $N > 0$ покладемо

$$E_N(A, Q) = \inf_{\substack{S \in \mathcal{L}(X, Y) \\ \|S\| \leq N}} \sup_{f \in Q} \|Af - Sf\|_Y. \quad (1)$$

Задача С.Б. Стечкина про найкраще наближення оператора A на множині Q лінійними обмеженими операторами полягає в тому, щоб при довільному $N > 0$ знайти величину (1), а також вказати екстремальний оператор, тобто оператор, що реалізує точну нижню межу в правій частині (1). Постановка цієї задачі і її розв'язання для диференціальних операторів малих порядків представлені в [27]. Огляд подальших результатів і відповідні посилання можна знайти в [3, 4].

2. Оцінка норми і відхилення від D^α оператора U_h^α на класі $W_{\infty, E}^\Delta$.

Нехай $h > 0$. Через $\tilde{G}_h(x, y)$ будемо позначати функцію Гріна кулі B_h (див., [28, с. 265]), тобто для $x, y \in B_h$, $x \neq y$, у випадку $m \geq 3$

$$\tilde{G}_h(x, y) = \frac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)} \left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}} - \frac{h^{m-2}|y|^{m-2}}{|x|y|^2 - h^2y|^{m-2}} \right),$$

і у випадку $m = 2$

$$\tilde{G}_h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{h^2 - xy}{h(x-y)} \right|$$

(тут і скрізь нижче σ_{m-1} – площа поверхні одиничної сфери S^{m-1} простору \mathbb{R}^m).

Для $\rho > 0$ покладемо

$$G_h(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)} \left(\frac{1}{\rho^{m-2}} - \frac{1}{h^{m-2}} \right)_+, & m \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{h}{\rho} \right)_+, & m = 2, \end{cases}$$

($a_+ := \max\{a, 0\}$).

Відзначимо, що для $y \in B_h$, $y \neq 0$,

$$\tilde{G}_h(0, y) = G_h(|y|).$$

Усредненням функції f в точці x по сфері радіуса h назвемо величину

$$\tilde{f}(x, h) = \frac{1}{\sigma_{m-1}} \int_{S^{m-1}} f(x + hy) ds_y$$

де ds_y – елемент площі поверхні сфери S^{m-1} .

Відомо (див., напр., [28, с. 289]), що для будь-якої двічі неперервно диференційовної функції f справедливе зображення

$$f(x) = \tilde{f}(x, h) + \int_{B_h} \tilde{G}_h(x, y) (-\Delta f(y)) dy. \quad (2)$$

В [22] показано, що для довільної двічі неперервно диференційовної функції f :

$$f(x) = \tilde{f}(x, h) + \int_{B_h} G_h(|y|) (-\Delta f(x \pm y)) dy.$$

Для будь-якої функції $f \in L_{\infty, E}^{\Delta}$ і будь-якої фінітної нескінченно диференційовної функції φ маємо:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \left[\tilde{\varphi}(x, h) + \int_{B_h} G_h(|y|) (-\Delta \varphi(x \mp y)) dy \right] dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \left[\tilde{f}(x, h) + \int_{B_h} G_h(|y|) (-\Delta f(x \pm y)) dy \right] dx. \end{aligned}$$

Тобто для $f \in L_{\infty, E}^{\Delta}$ і майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$ буде

$$f(x) = \tilde{f}(x, h) + \int_{B_h} G_h(|y|) (-\Delta f(x \pm y)) dy. \quad (3)$$

Введемо також функцію

$$F_h(t) = \begin{cases} \int_t^h G_\rho(t) \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}, & t \in (0, h], \\ 0, & t > h. \end{cases}$$

Неважко бачити, що для функцій $G_h(|y|)$ і $F_h(|y|)$ мають місце співвідношення (див. [22])

$$G_h(|y|) = h^{2-m} G_1(|y|/h)$$

і

$$F_h(|y|) = h^{2-\alpha-m} F_1(|y|/h).$$

Для $t > 0$ покладемо

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{m+\alpha-2}}, & m \geq 3 \\ \frac{\ln t}{t^\alpha}, & m = 2 \end{cases}$$

Скрізь нижче ми припускаємо, що

$$G(|t|)\chi_{[-1,1]} \in E^1 \quad (4)$$

і

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|G(|t|)\chi_{[-h,h]}\|_{E^1} = 0. \quad (5)$$

Зазначимо, що при виконанні цих умов при будь-якому $c \in \mathbb{R}$ функція $F_h(|y|) - cG_h(|y|)$ належить простору E^1 .

Оберемо $c = c_h$ з умови

$$\int_{B_h} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy = 0. \quad (6)$$

Як неважко зрозуміти, для будь-якого $h > 0$ буде

$$c_h = h^{-\alpha} c_1. \quad (7)$$

Нехай $h > 0$ і $\tilde{\psi}_h(\rho)$ – деяка функція однієї змінної з $\text{supp} \tilde{\psi}_h = [0, h]$, в середньому рівна нулю. Припустимо, що існує функція $\psi_h \in E$ ($\text{supp} \psi_h = B_h$, $\psi_h(y) = \tilde{\psi}_h(|y|)$, $\|\psi_h\|_E = 1$) така, що справджується рівність:

$$\int_{\mathbb{R}^m} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) \tilde{\psi}_h(|y|) dy = \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}. \quad (8)$$

Означимо функцію $\tilde{\varphi}_{h,2}(\rho)$ в такий спосіб. Для $\rho \in (0, h]$ покладемо

$$\tilde{\varphi}_{h,2}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\int_0^\rho - \int_\rho^h \right) \int_t^h u^{m-1} \tilde{\psi}_h(u) du \frac{dt}{t^{m-1}}, & \rho \in [0, h] \\ \frac{1}{2} \int_0^h \int_t^h u^{m-1} \tilde{\psi}_h(u) du \frac{dt}{t^{m-1}}, & \rho > h. \end{cases} \quad (9)$$

Для $y \in \mathbb{R}^m$ покладемо

$$\varphi_{h,2}(y) = \tilde{\varphi}_{h,2}(|y|). \quad (10)$$

Враховуючи зображення оператора Лапласа для радіальних функцій

$$\Delta \varphi(\rho) = \varphi''(\rho) + \frac{m-1}{\rho} \varphi'(\rho),$$

неважко перевірити, що $\varphi_{h,2} \in W_{\infty,E}^\Delta \cap C(\mathbb{R}^m)$ і $\Delta \varphi_{h,2}(y) = \psi_h(y)$. Крім того,

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} \varphi_{h,2}(y) = - \min_{y \in \mathbb{R}^m} \varphi_{h,2}(y).$$

Для заданого $h > 0$ розглянемо оператор

$$U_h^\alpha f(x) = D_h^\alpha f(x) + \frac{2c_h \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} (f(x) - \tilde{f}(x, h)), \quad (11)$$

де c_h обрано з умови (6). Так само, як в [22] доводиться твердження

Лема 1. Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на \mathbb{R}^m , що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E . Тоді при виконанні умов (8)–(10) для довільного $h > 0$

$$\|U_h^\alpha\| = \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h \right) = \frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty} = h^{-\alpha} \frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}.$$

Тепер для функцій $f \in L_{\infty,E}^\Delta$ ми отримуємо оцінку величини $\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty$.

В [22] показано, що для довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ і довільного $x \in \mathbb{R}^m$

$$D^\alpha \varphi(x) - U_h^\alpha \varphi(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{B_h} (-\Delta \varphi(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy. \quad (12)$$

Враховуючи (8), легко бачити, що для будь-якої функції $f \in L_{\infty,E}^\Delta$ і довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)(D^\alpha \varphi(x) - U_h^\alpha \varphi(x)) dx.$$

Звідси і із (8) виводимо, що для $f \in L_{\infty,E}^\Delta$ при майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$ має місце зображення

$$D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{B_h} (-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy. \quad (13)$$

Використовуючи (13) і нерівність Гельдера, отримуємо, що для майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$

$$|D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x)| \leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|\Delta f\|_E \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}$$

і, значить,

$$\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty \leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|\Delta f\|_E \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}. \quad (14)$$

В силу (14) маємо

$$\|D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty \leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}. \quad (15)$$

Враховуючи, що для функції $\varphi_{h,2}$ зображення (3) має місце в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$, аналогічно (8), встановлюємо, що для $\varphi_{h,2}$ при всіх $x \in \mathbb{R}^m$ справедлива рівність

$$D^\alpha \varphi_{h,2}(x) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{B_h} (-\Delta \varphi_{h,2}(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy.$$

Як згортка функцій $\Delta\varphi_{h,2} \in E$ і $F_h(|y|) - c_h G_h(|y|) \in E^1$ функція $D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}$ неперервна в будь-якій точці $x \in \mathbb{R}^m$. Функція $U_h^\alpha\varphi_{h,2}(x)$ також буде неперервною в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$. Значить, неперервною буде і $D^\alpha\varphi_{h,2}(x)$.

Враховуючи неперервність функції $D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}$ і означення функції ψ_h , отримаємо

$$\begin{aligned} & \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \geq |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| = \\ & = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left| \int_{B_h} \psi_h(|y|)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy \right| = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}. \end{aligned}$$

Звідси і із (15) отримаємо

$$\begin{aligned} & \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty = |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| = \\ & = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)\|_{E^1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Відзначимо, що при виконанні умови (5) $\|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$. Зіставляючи (14) і (16), бачимо, що справедлива

Лема 2. *Нехай виконуються умови лема 1. Тоді при виконанні умов (8)–(10) для довільного $h > 0$ і для будь-якої функції $f \in L_{\infty,E}^\Delta$*

$$\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty \leq \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \|\Delta f\|_E. \quad (17)$$

Нерівність (17) перетворюється на рівність для $f(t) = \varphi_{h,2}(t)$.

Із лем 1 і 2 випливає

Лема 3. *Нехай виконуються умови лема 1 і для $N > 0$*

$$h_N = \left(\frac{\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тоді при виконанні умов (8)–(10) $\|U_{h_N}^\alpha\| = N$ і

$$E_N(D^\alpha, W_{\infty,E}^\Delta) \leq \sup_{f \in W_{\infty,E}^\Delta} \|D^\alpha f - U_{h_N}^\alpha f\|_\infty = \|D^\alpha\varphi_{h_N,2} - U_{h_N}^\alpha\varphi_{h_N,2}\|_\infty.$$

3. Нерівності Колмогорова: оцінка рівномірної норми похідної Рісса. Припустимо, що виконуються умови (8)–(10). Із лем 1 і 2 для $f \in L_{\infty,E}^\Delta$ при умовах (4) і (5) випливає, що для будь-якого $h > 0$

$$\begin{aligned} & \|D^\alpha f\|_\infty \leq \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty + \|U_h^\alpha f\|_\infty \leq \\ & \leq \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \|\Delta f\|_E + \frac{\|U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty} \|f\|_\infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Покажемо, що нерівність (18) перетворюється на рівність для функції $\varphi_{h,2}(y)$. Оскільки функція $D^\alpha\varphi_{h,2}(y)$ неперервна в точці 0, маємо:

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \geq |D^\alpha\varphi_{h,2}(0)| = |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0) + U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)|.$$

Оскільки $D^\alpha \varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)$ і $U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)$ одного знаку, можемо написати, використовуючи (16):

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty &\geq |D^\alpha \varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)| + |U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)| = \\ &= \|D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty + h^{-\alpha} \frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty} \|\varphi_{h,2}\|_\infty. \end{aligned}$$

Отже, нерівність (18) точна, і нами доведена

Теорема 1. *Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на \mathbb{R}^m , що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E . Тоді, якщо виконуються умови (8)–(10), то для довільної $f \in L_{\infty,E}^\Delta$ і $h > 0$*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq h^{-\alpha} \frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty} \cdot \|f\|_\infty + \|D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty \cdot \|\Delta f\|_E. \quad (19)$$

Нерівність (19) є точною і перетворюється на рівність для функції $\varphi_{h,2}(y)$.

Припустимо тепер, що умови (8)–(10) не виконуються. В цьому випадку оцінку для $\|D^\alpha f\|_\infty$ запишемо у вигляді (див. (14) і (2.6) із [22]):

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f\|_\infty &\leq \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty + \|U_h^\alpha f\|_\infty \leq \\ &\leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} \|\Delta f\|_E + \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} h^{-\alpha} (1/\alpha + c_1) \|f\|_\infty = \\ &= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} (2h^{-\alpha} \sigma_{m-1} (1/\alpha + c_1) \|f\|_\infty + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} \|\Delta f\|_E). \end{aligned}$$

Для кожного $\varepsilon > 0$ існує функція $\psi_{h,\varepsilon} \in E$, $\|\psi_{h,\varepsilon}\|_E \leq 1$, така що

$$\int_{B_h} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) \psi_{h,\varepsilon}(y) dy > \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon.$$

і

$$\psi_{h,\varepsilon}(y) = \tilde{\psi}_{h,\varepsilon}(|y|), \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

де $\tilde{\psi}_{h,\varepsilon}(\rho)$ в середньому дорівнює нулю і $\text{supp} \tilde{\psi}_{h,\varepsilon}(\cdot) = [0, h]$.

Далі ми означимо $\tilde{\varphi}_{h,2}(\rho)$ формулою (9) з функцією $\tilde{\psi}_{h,\varepsilon}$ замість $\tilde{\psi}_h$ і покладемо:

$$\varphi_{h,\varepsilon,2}(y) = \tilde{\varphi}_{h,\varepsilon,2}(|y|), \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Зрозуміло, що $\varphi_{h,\varepsilon,2} \in W_{\infty,E}^\Delta(\mathbb{R}^m)$,

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} \varphi_{h,\varepsilon,2}(y) = - \min_{y \in \mathbb{R}^m} \varphi_{h,\varepsilon,2}(y)$$

і

$$\int_{\mathbb{R}^m} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) \Delta \varphi_{h,\varepsilon,2}(y) dy =$$

$$= \int_{B_h} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) \psi_{h,\varepsilon}(y) dy > \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon.$$

Міркуючи, як і в попередньому випадку, в силу неперервності функції $D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(y)$ в точці 0 маємо:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty &\geq |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| = |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) + U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| \\ &= |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| + |U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| = \\ &= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left| \int_{B_h} \psi_{h,\varepsilon}(y) (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy \right| + |U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| > \\ &> \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon + \|U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty = \\ &= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon + \frac{4\sigma_{m-1}h^{-\alpha}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right) \|\varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty. \end{aligned}$$

Рівність

$$\frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty} = \frac{4\sigma_{m-1}h^{-\alpha}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right)$$

встановлюється аналогічно до відповідної рівності в лемі 1. Отже, можемо сформулювати теорему

Теорема 2. Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на \mathbb{R}^m , що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E . Тоді для довільних $f \in L_{\infty,E}^\Delta$ і $h > 0$ виконується точна нерівність

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f\|_\infty &\leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right) h^{-\alpha} \cdot \|f\|_\infty + \right. \\ &\quad \left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} \cdot \|\Delta f\|_E \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Відзначимо, що у випадку $E = L_s(\mathbb{R}^m)$, $\frac{m}{2} < s < \infty$, результати теорем 1 і 2 отримані в [22].

4. Найкраще наближення оператора D^α обмеженими операторами.

Нехай виконуються умови (8) – (10). Покладемо $h_N = \left(\frac{4\sigma_{m-1}(\frac{1}{\alpha} + c_1)}{d_{m,2}(\alpha)N} \right)^{1/\alpha} = \left(\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ для $N > 0$. Із лемі 3 випливає, що

$$E_N(D^\alpha, W_{\infty,E}^\Delta) \leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} = \|D^\alpha \varphi_{h_N,2} - U_1^\alpha \varphi_{h_N,2}\|_\infty,$$

а із точності нерівності (19) випливає, що для оператора D^α виконується умова (7.1.12) теореми 7.1.1 із [5] з оператором $T = U_{h_N}^\alpha$ і функцією $f(t) = \varphi_{h_N,2}$. Отже справедлива

Теорема 3. Нехай $0 < \alpha < 2$, $N > 0$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на \mathbb{R}^m , що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E . Тоді при виконанні умов (8) – (10) справджується рівність:

$$E_N(D^\alpha, W_{\infty, E}^\Delta) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} = \|D^\alpha \varphi_{h_N, 2} - U_1^\alpha \varphi_{h_N, 2}\|_\infty.$$

При цьому оператор U_h^α з $h = h_N$ є екстремальним оператором.

5. Нерівності Колмогорова: оцінка норми похідної Рісса в ідеальній структурі. В цьому розділі ми узагальнимо результат теореми 1 із [21].

Для $h > 0$ і функції $f \in L_{E, E}^\Delta$ розглянемо оператор (11). Застосовуючи узагальнену нерівність Мінковського, маємо:

$$\begin{aligned} \|U_h^\alpha\|_E &= \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \left\| \int_{\mathbb{R}^m} \frac{2f(\cdot) - f(\cdot + t) - f(\cdot - t)}{|t|^{m+\alpha}} dt + 2c_h \sigma_{m-1}(f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot, h)) \right\|_E \leq \\ &\leq \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \cdot 4\|f\|_E \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} \frac{dt}{|t|^{m+\alpha}} + c_h \sigma_{m-1} \right\} = \frac{4\|f\|_E \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h \right). \end{aligned}$$

Тепер для функції $f \in L_{E, E}^\Delta$ отримаємо оцінку ввеличини $\|D^\alpha f(\cdot) - U_h^\alpha f(\cdot)\|_E$. По-перше покажемо, що для $f \in L_{E, E}^\Delta$ має місце зображення

$$D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{B_h} (-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy. \quad (21)$$

Дійсно, оскільки $\Delta f \in E$, то використовуючи нерівність Гельдера, з урахуванням умови (4), відзначимо, що

$$\left| \int_{B_h} (-\Delta f)(x+y)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy \right| \leq \|\Delta f\|_E \|F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)\|_{E^1}. \quad (22)$$

Як в [21], встановлюємо, що для довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ і для $f \in L_{E, E}^\Delta$ має місце зображення

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x)) dx = \\ &= \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \int_{B_h} (-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy dx, \end{aligned}$$

звідки з урахуванням (22), маємо (21).

Використовуючи (21) і узагальнену нерівність Мінковського, одержимо оцінку:

$$\|D^\alpha f(\cdot) - U_h^\alpha f(\cdot)\|_E \leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|\Delta f\|_E \int_{B_h} |F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)| dy.$$

Тепер для $\|D^\alpha f\|_E$ можемо написати

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f\|_E &\leq \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_E + \|U_h^\alpha f\|_E \leq \\ &\leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|\Delta f\|_E \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1} + \frac{4\|f\|_E \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{2} + c_h \right) = \\ &= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left(2\sigma_{m-1} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right) h^{-\alpha} \cdot \|f\|_E + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1} \cdot \|\Delta f\|_E \right). \end{aligned}$$

Таким чином, нами доведена

Теорема 4. *Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на \mathbb{R}^m , що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E . Тоді для довільних $f \in L_{E,E}^\Delta$ і $h > 0$ виконується нерівність*

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f\|_E &\leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left(2\sigma_{m-1} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right) h^{-\alpha} \cdot \|f\|_E + \right. \\ &\quad \left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1} \cdot \|\Delta f\|_E \right). \end{aligned}$$

Із теореми 4 одразу випливає

Наслідок 1. *Нехай $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді для довільних функцій $f \in L_{s,s}^\Delta$ і $h > 0$ виконується нерівність*

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f\|_{L_s} &\leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left(2\sigma_{m-1} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right) h^{-\alpha} \cdot \|f\|_{L_s} + \right. \\ &\quad \left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1} \cdot \|\Delta f\|_{L_s} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

При $s = \infty$ нерівність є точною.

Відзначимо, що нерівність (23) можна переписати у вигляді

$$\|D^\alpha f\|_{L_s} \leq \frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty} h^{-\alpha} \|f\|_{L_s} + \|D^\alpha \varphi_{1,2} - c_1 U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty h^{2-\alpha} \|\Delta f\|_{L_s}. \quad (24)$$

Після мінімізації по h остання нерівність набуває вигляду

$$\|D^\alpha f\|_{L_s} \leq \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \|\Delta f\|_{L_s}^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{L_s}^{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (25)$$

В (24) і (25) функція $\varphi_{1,2}$ означена в такий спосіб (див. [21]). Нехай для $\rho \geq 0$ і $\delta = \frac{m}{\sqrt{2}}$

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2m}(\rho^2 - 1/\delta^2 - \sigma G_1(1/\delta) + 1/2), & 0 \leq \rho \leq 1/\delta \\ \frac{1}{2m}(-\rho^2 - 2\sigma_{m-1} G_1(\rho) + 1/\delta^2 + \sigma_{m-1} G_1(1/\delta) + 1/2), & 1/\delta < \rho \leq 1 \\ \psi(1), & \rho > 1. \end{cases}$$

Для $h > 0$ і $x \in \mathbb{R}^m$ покладемо

$$\varphi_{h,2}(x) = h^{-2} \psi(h|x|).$$

Отже, маємо

Наслідок 2. Нехай $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді для довільних функцій $f \in L_{s,s}^\Delta$ і $h > 0$ виконується нерівність

$$\|D^\alpha f\|_s \leq \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \|\Delta f\|_{L_s}^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{L_s}^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

При $s = \infty$ нерівність є точною.

Відзначимо, що у випадку $s = \infty$ результати наслідків 1 і 2 отримані в [21].

ВИСНОВКИ. В роботі отримані нові нерівності типу Колмогорова для норм дробових похідних за Ріссом порядку $0 < \alpha < 2$ функцій багатьох змінних з лапласіаном, обмеженим за нормою в ідеальній структурі.

1. **Колмогоров А. Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале / А. Н. Колмогоров // Избр. тр.: Математика, механика. М.: Наука. – 1985. – С. 252–263.
2. **Тихомиров В. М.** Неравенства для производных: Комментарии к избранным трудам А. Н. Колмогорова / В. М. Тихомиров, Г. Г. Магарил-Ильяев // М.: Наука, 1985. – С. 387–390.
3. **Арестов В. В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными / В. В. Арестов, В. Н. Габушин // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 42–63.
4. **Арестов В. В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В. В. Арестов // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, № 6. – С. 88–124.
5. **Бабенко В. Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
6. **Mitrinović D. S.** Inequalities involving functions and their integrals and derivatives / D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ, 1991. – 587 p.
7. **Коновалов В. Н.** Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных / В. Н. Коновалов // Мат. заметки. – 1978. – Т. 23, вып. 1. – С. 67–78.
8. **Буслаев А. П.** О неравенствах для производных в многомерном случае / А. П. Буслаев, В. М. Тихомиров // Мат. заметки. – 1979. – Т. 25, вып. 1. – С. 59–74.
9. **Тимошин О. А.** Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков / О. А. Тимошин // Докл. РАН. – 1995. – Т. 344, № 1. – С. 20–22.
10. **Тимофеев В. Г.** Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных / В. Г. Тимофеев // Мат. заметки. – 1985. – Т. 37, вып. 5. – С. 676–689.
11. **Babenko V. F.** Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications / V. F. Babenko, V. A. Kofanov, S. A. Pichugov // Multivariate approximation and splines / Eds. G. Nörberger, J.W. Schmidt, G. Walz. Basel: Birkhuser Verlag. – 1997. – P. 1–12.
12. **Бабенко В. Ф.** О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных / В. Ф. Бабенко // Докл. НАН Украины. – 2000. – № 5. – С. 7–11.

13. **Гейсберг С. П.** Обобщение неравенства Адамара / С. П. Гейсберг // Исследование по некоторым проблемам конструктивной теории функций: сб. науч. тр. ЛОМИ, Ленинград. – 1965. – Т. 50. – С. 42–54.
14. **Arestov V. V.** Inequalities for fractional derivatives on the half-line / V. V. Arestov // Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ. – 1979. – P. 19–34.
15. **Magaril-II'jaev G. G.** On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line / G. G. Magaril-II'jaev, V. M. Tihomirov // Anal. Math. – 1981. – Vol. 7, № 1. – P. 37–47.
16. **Бабенко В. Ф.** Точные оценки для норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условию Гельдера / В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов // Мат. заметки. – 2010. – Т. 87, вып. 1. – С. 26–34.
17. **Бабенко В. Ф.** О неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка / В. Ф. Бабенко, М. С. Чурилова // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. Математика. – 2001. – Т. 6. – С. 16–20.
18. **Babenko V. F.** Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic / V. F. Babenko, M. S. Churilova // Banach J. Math. – 2007. – Vol. 1. – P. 66–77.
19. **Babenko V. F.** Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions / V. F. Babenko, N. V. Parfinovych, S. A. Pichugov // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 3. – С. 301–314.
20. **Бабенко В. Ф.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Труды УроРАН. – 2011. – Т. 17, № 3 – С. 60–70.
21. **Бабенко В. Ф.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, С. А. Пичугов // Мат. заметки. – 2014. – Т. 95, вып. 1. – С. 3–17.
22. **Бабенко В. Ф.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Укр. мат. вісн. – 2012. – Т. 9, № 2 – С. 157–174.
23. **Моторный В. П.** Теория аппроксимации и гармонический анализ / В. П. Моторный, В. Ф. Бабенко, А. А. Довгошей, О. И. Кузнецова. – Киев : Наук. думка, 2010. – 302 с.
24. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
25. **Крейн С.Г.** Интерполяция линейных операторов / С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов. – М., Наука, 1978. – 400 с.
26. **Красносельский М. А.** Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я. Б. Рутецкий. – М., Физматгиз, 1958. – 271 с.
27. **Стечкин С. Б.** Наилучшее приближение ограниченных операторов / С. Б. Стечкин // Мат. заметки. – 1967. – Т. 1, вып. 2. – С. 137–148.
28. **Курант Р.** Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 843 с.

Парфимович Н. В.

ОЦЕНКИ НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ ПО РИССУ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Резюме

Пусть $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ – оператор Лапласа. Обозначим через $L_s(\mathbb{R}^m)$ ($1 \leq s \leq \infty$) пространства измеримых функций $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ с конечной нормой $\|f\|_s$. Пусть F и E – идеальные решетки на \mathbb{R}^m с конечными нормами $\|\cdot\|_F, \|\cdot\|_E$. Через $L_{F,E}^\Delta(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство функций $f \in F$ таких, что $\Delta f \in E$. Если $F = L_s(\mathbb{R}^m)$ ($1 \leq s \leq \infty$), то будем использовать обозначения $L_{s,E}^\Delta$, или $L_{s,s}^\Delta$ если, кроме этого, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$. В работе получены новые неравенства типа Колмогорова для норм производных по Риссу $D^\alpha f$ функций $f \in L_{\infty,E}^\Delta(\mathbb{R}^m)$. В качестве следствия получены такие неравенства для функций $f \in L_{s,s}^\Delta(\mathbb{R}^m)$. Решена задача о приближении неограниченного оператора D^α ограниченными на классе функций f таких, что $\|\Delta f\|_E \leq 1$.

Ключевые слова: дробная производная, неравенства для производных, приближения неограниченных операторов ограниченными, идеальные решетки.

Parfymovych N. V.

ESTIMATES OF THE NORMS OF RIESZ DERIVATIVES OF MULTIVARIATE FUNCTIONS

Summary

Let $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ be the Laplace operator. We denote by $L_s(\mathbb{R}^m)$ ($1 \leq s \leq \infty$) the spaces of measurable functions $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ with a finite norm $\|f\|_s$. Let F and E be ideal lattices on \mathbb{R}^m with finite norms $\|\cdot\|_F$ and $\|\cdot\|_E$. By $L_{F,E}^\Delta(\mathbb{R}^m)$ we denote the space of functions $f \in F$ such that $\Delta f \in E$. If $F = L_s(\mathbb{R}^m)$ ($1 \leq s \leq \infty$), then we use the notation $L_{s,E}^\Delta$, or $L_{s,s}^\Delta$ if, in addition, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$. We obtain new Kolmogorov-type inequalities for the norms of the Riesz derivatives $D^\alpha f$ of functions $f \in L_{\infty,E}^\Delta(\mathbb{R}^m)$. As a corollary, we obtain inequalities for the functions $f \in L_{s,s}^\Delta(\mathbb{R}^m)$. The problem on approximation an unbounded operator D^α by bounded ones on a class of functions f such that $\|\Delta f\|_E \leq 1$ is solved.

Key words: fractional derivative, inequalities for derivatives, approximation of unbounded operator by bounded, ideal lattices.

REFERENCES

1. Kolmogorov, A. N. (1985). O neravenstvakh mezhdu verhnimi granyami posledovatel'nyh proizvodnyh funktsii na beskonechnom intervale [On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of a function on an infinite interval]. *Izbr. tr.: Matematika, mekhanika. M.: Nauka.*, Vol. 52, P. 252–263.
2. Tikhomirov, V. M., Magaril-II'yaev, G. G. (1985). Neravenstva dlya proizvodnyh: Kommentarii k izbrannym trudam A. N. Kolmogorova [Inequalities for derivatives: Comments on selected works of A. N. Kolmogorov]. M. : Nauka, P. 387–390.
3. Arestov, V. V., Gabushin, V. N. (1995). Nailuchsheye priblizheniye neogranichennykh operatorov ograniченными [Best approximation of unbounded operators by bounded ones]. *Izv. vuzov. Matematika*, № 11, P. 42–63.
4. Arestov, V. V. (1996). Priblizheniye neogranichennykh operatorov ograniченными i rodstvennyye ekstremal'nyye zadachi [Approximation of unbounded operators by bounded ones and related extremal problems]. *Uspехи мат. наук*, V. 51, № 6, P. 88–124.
5. Babenko, V. F., Korneychuk, N. P., Kofanov, V. A., Pichugov, S. A. (2003). *Neravenstva dlya proizvodnykh i ikh prilozheniya [Inequalities for derivatives and their applications]*. Kiyev : Nauk. dumka, 590 p.

6. Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M. (1991). *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ, 1991. — 587 p.
7. Kononov, V. N. (1978). Tochnyye neravenstva dlya norm funktsiy, tret'ikh chastnykh i vtorykh smeshannykh proizvodnykh [Exact inequalities for norms of functions, third partial and second mixed derivatives]. *Mat. zametki*, V. 23, № 1, P. 67–78.
8. Buslayev, A. P., Tikhomirov, V. M. (1979). O neravenstvakh dlya proizvodnykh v mnogomernom sluchaye [On inequalities for derivatives in the multidimensional case]. *Mat. zametki*, V. 25, № 1, P. 59–74.
9. Timoshin, O. A. (1995). Tochnyye neravenstva mezhdru normami proizvodnykh vtorogo i tret'yego poryadkov [Exact inequalities between the norms of the derivatives of second and third orders] *Dokl. RAN*, V. 344, № 1, P. 20–22.
10. Timofeyev, V. G. (1985). Neravenstva tipa Landau dlya funktsiy neskol'kikh peremennykh [Landau type inequalities for functions of several variables]. *Mat. zametki*, V 37, № 5, P. 676–689.
11. Babenko, V. F., Kofanov, V. A., Pichugov, S. A. (1997). Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications. *Multivariate approximation and splines / Eds. G. Nörberger, J.W. Schmidt, G. Walz. Basel: Birkhuser Verlag*, P. 1–12.
12. Babenko, V. F. (2000). O tochnykh neravenstvakh tipa Kolmogorova dlya funktsiy dvukh peremennykh [On exact inequalities of Kolmogorov type for functions of two variables]. *Dokl. NAN Ukrainy*, № 5, P. 7–11.
13. Geysberg, S. P. (1965). Obobshcheniye neravenstva Adamara [A generalization of the Hadamard inequality]. *Issledovaniye po nekotorym problemam konstruktivnoy teorii funktsiy: sb. nauch. tr. LOMI, Leningrad*, V 50, P. 42–54.
14. Arestov, V. V. (1979). Inequalities for fractional derivatives on the half-line. *Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ*, P. 19–34.
15. Magaril-Il'jaev G. G., Tihomirov, V. M. (1981). On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line. *Anal. Math*, V. 7, № 1, P. 37–47.
16. Babenko, V. F., Pichugov, S. A. (2010). Tochnyye otsenki dlya norm drobnnykh proizvodnykh funktsiy mnogikh peremennykh, udovletvoryayushchikh usloviyu Gel'dera [Exact estimates for the norms of fractional derivatives of functions of several variables that satisfy the Holder condition]. *Mat. zametki*, V. 87, № 1, P. 26–34.
17. Babenko, V. F., Churilova, M. S. (2001). O neravenstvakh tipa Kolmogorova dlya proizvodnykh drobnogo poryadka [On the Kolmogorov type inequalities for derivatives of fractional order]. *Visn. Dnipropetrovs'kogo un-tu. Matematyka*, V. 6, P. 16–20.
18. Babenko, V. F., Churilova, M. S. (2007). Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic. *Banach J. Math*, V. 1, P. 66–77.
19. Babenko, V. F., Parfinovych, N. V., Pichugov, S. A. (2010). Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions. *Ukr. mat. zhurn*, V. 62, № 3, P. 301–314.
20. Babenko, V. F., Parfinovich, N. V. (2011). Neravenstva tipa Kolmogorova dlya norm proizvodnykh Rissa funktsiy mnogikh peremennykh i nekotoryye ikh prilozheniya [Kolmogorov type inequalities for the norms of Riesz derivatives of functions of several variables and some of their applications]. *Trudy Uro RAN*, V. 17, № 3, P. 60–70.
21. Babenko, V. F., Parfinovich, N. V., Pichugov, S. O. (2014). Neravenstva tipa Kolmogorova dlya norm proizvodnykh Rissa funktsiy mnogikh peremennykh s ograničenym v L_∞ laplasianom i smezhnyye zadachi [Kolmogorov type inequalities for the

- norms of Riesz derivatives of functions of several variables with bounded in L_∞ Laplacian and related problems]. *Mat. zametki*, V. 95, №. 1, P. 3–17.
22. Babenko V. F., Parfinovich, N. V. (2012). Neravenstva tipa Kolmogorova dlya norm proizvodnykh Rissa funktsiy mnogikh peremennykh i nekotoryye ikh prilozheniya [Kolmogorov type inequalities for the norms of Riesz derivatives of functions of several variables and some of their applications] *Ukr. mat. visn*, V. 9, № 2, P. 157–174.
 23. Motorny, V. P., Babenko, V. F., Dovgoshey, A. A., Kuznetsova, O. I. (2010). *Teoriya approksimatsii i garmonicheskiiy analiz [Approximation theory and harmonic analysis]*. Kiyev : Nauk. dumka, 302 p.
 24. Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnoho poryadka i nekotorye ih prilozheniya [Fractional integrals and derivatives with some applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika, 688 p.
 25. Kreyn, S. G., Petunin, YU. I., Semenov, Ye. M. (1978). *Interpolyatsiya lineynykh operatorov [Interpolation of linear operators]*. M., Nauka, 400 p.
 26. Krasnosel'skiy M. A., Rutitskiy YA. B. (1958). *Vypuklyye funktsii i prostranstva Orlicha [Convex functions and Orlicz spaces]*. M., Fizmatgiz, 271 p.
 27. Stechkin, S. B. (1967). Nailuchsheye priblizheniye ogranichennykh operatorov [the best approximation of bounded operators]. *Mat. zametki*, V. 1, №. 2, P 137–148.
 28. Kurant, R. (1964). *Urvneniya s chastnymi proizvodnymi [Partial differential equations]*. M.: Mir, 843 p.