УДК 519.6

Ю. А. Музичук
Львівський національний університет імені Івана Франка

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ ЗГОРТКОВОЇ СИСТЕМИ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

У тривимірних областях з ліпшицевою межею розглянуто крайову задачу Неймана для нескінченної згорткової системи еліптичних рівнянь, яка виникає в результаті застосування перетворення Лагера за часовою змінною до початково-крайових задач для еволюційних рівнянь. За допомогою q-згортки послідовностей побудовано інтегральне подання узагальненого розв'язку задачі і отримано еквівалентну систему граничних інтегральних рівнянь. Доведено існування і єдиність чисельного розв'язку, який шукають методом граничних елементів, а також досліджено його апріорну похибку. Наведено результати, обчислені при розв'язуванні модельних задач.
MSC: 35J25, 31B10, 65N38.
Ключові слова: метод граничних елементів, q-згортка, крайова умова Неймана, система елептичних рівнянь .

Вступ. Крайові задачі для нескінченних трикутних систем, які складаються з еліптичних рівнянь, виникають у різних підходах щодо врахування залежності від часової змінної в еволюційних задачах, зокрема, при застосуванні до таких задач інтегрального перетворення Лаґера за часом [1, 2, 5]. У праці [11] подано огляд робіт, у яких використовувалося таке перетворення при розв'язуванні початково-крайових задач для однорідних еволюційних рівнянь, насамперед хвильового, теплопровідності та телеграфного. Трикутна структура отриманих систем дає змогу побудувати інтегральне подання їхніх узагальнених розв'язків. Обґрунтуванню такого подання, а також дослідженню граничних інтегральних рівнянь (ГІР), які є еквівалентними вихідним крайовим задачам, присвячено праці [4, 11, 12].

Метою даної роботи є чисельне розв'язування задачі Неймана для досліджуваної системи. В першому розділі розглянуто формулювання крайової задачі, дано означення узагальненого розв'язку і отримано еквівалентну систему ГІР. Для цього використано інтегральне подання розв'язку у вигляді аналога потенціалу подвійного шару, з яким мають справу в еліптичних рівняннях. У другому розділі система ГІР перетворена до вигляду, який дає змогу ефективно застосувати до неї схему методу Бубнова-Гальоркіна і обґрунтувати збіжність наближеного розв'язку, а також розробити чисельну реалізацію відповідно до методу граничних елементів (МГЕ) і дослідити похибку апроксимації шуканого розв'язку. Третій розділ присвячений апробації розробленого методу на серії модельних задач. В заключній секції зроблено висновки стосовно запропонованого методу чисельного розв'язування задачі Неймана для нескінченних систем еліптичних рівнянь, які мають згорткову структуру.

Надійшла 12.04.2017

Основні результати

1. Узагальнений розв'язок крайової задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею Γ. Розглянемо в Ω нескінченну систему еліптичних рівнянь

$$\begin{cases} c_0 u_0 - \Delta u_0 = 0, \\ c_1 u_0 + c_0 u_1 - \Delta u_1 = 0, \\ c_2 u_0 + c_1 u_1 + c_0 u_2 - \Delta u_2 = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_k u_0 + c_{k-1} u_1 + ... + c_0 u_k - \Delta u_k = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases} \tag{1}$$

де $u_0, u_1, \ ..., \ u_k, \ ...$ – невідомі функції, $c_0, c_1, \ ..., \ c_k, \ ...$ – задані сталі, $c_0 > 0$, $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3} \partial^2/\partial x_i^2$ – оператор Лапласа. Будемо шукати розв'язок цієї системи, який задовольняє на поверхні Γ крайову умову

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_k|_\Gamma = \tilde{g}_k, \ k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2}$$

де $\tilde{g}_k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ – задані на Γ функції, $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$ – оператор похідної за вектором нормалі $\boldsymbol{\nu}(x)$ у точках $x \in \Gamma$, яка є зовнішньою відносно Ω. Надалі задачу (1), (2) називатимемо задачею Неймана.

Нехай X – довільний лінійний простір над полем дійсних чисел, $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел. Позначимо X^∞ лінійний простір відображень $\mathbf{u} : \mathbb{Z} \to X$, для яких $u(k) = 0$ при $k < 0$. Для довільного елемента $\mathbf{u} \in X^\infty$ маємо $u_k \equiv (\mathbf{u})_k := \mathbf{u}(k), k \in \mathbb{Z}$, і писатимемо $\mathbf{u} := (u_0, u_1,...,u_k,...)^\top$. Елементи простору X^∞ називатимемо послідовностями.

Нехай $\widetilde{\mathbf{E}}(x) = \big(\widetilde{E}_0(x), \widetilde{E}_1(x), ...\big)^\top$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, – фундаментальний розв'язок системи (1). Зазначимо, що

$$\widetilde{E}_0(x) = \frac{e^{-\sqrt{c_0}|x|}}{4\pi\,|x|},$$

а вигляд інших компонентів див., наприклад, [12]. Розглянемо в області Ω послідовність $\mathbf{W}\xi(x) = \big(W_0\xi(x), W_1\xi(x), ...\big)^\top$, компонентами якої є функції

$$W_j\xi(x) := \big(W_j\xi\big)(x) = \int\limits_\Gamma \xi(y)\, \partial_{\boldsymbol{\nu}(y)} E_j(x-y) d\Gamma_y, j \in \mathbb{N}_0, \ x \in \Omega, \tag{3}$$

де ξ – інтегровна з квадратом на Γ функція, а послідовність $\mathbf{E}(x) = \big(E_0(x), E_1(x), ...\big)^\top$ отримана з фундаментального розв'язку за формулою

$$E_i(x) := \widetilde{E}_i(x) - \widetilde{E}_{i-1}(x), i \in \mathbb{N}, \ E_0(x) = \widetilde{E}_0(x), \ x \in \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

Побудуємо послідовність $\mathbf{u}(x) = \big(u_0(x), u_1(x), ...\big)^\top$, де

$$u_k(x) = \sum_{j=0}^{k} W_j \lambda_{k-j}(x), \, k \in \mathbb{N}_0, \ x \in \Omega, \tag{5}$$

а $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ...)^\top$ – довільна послідовність інтегровних з квадратом на Γ функцій. Відомо [12], що побудована послідовність є розв'язком системи (1) в області Ω. Щоб $\mathbf{u}$ була розв'язком задачі Неймана, достатньо знайти таку послідовність $\boldsymbol{\lambda}$, щоб $\mathbf{u}$ задовольняла і крайову умову (2).

Позначимо через $L^2(\Omega)$ і $H^1(\Omega)$ простори, відповідно, Лебега і Соболєва функцій, які набувають дійсних значень, а також $H^{1/2}(\Gamma)$ – простір слідів елементів $H^1(\Omega)$ та задамо в них звичайні скалярні добутки і породжені ними норми. У просторі $H^1(\Omega)$ розглядатимемо підпростір $H^1(\Omega,\Delta) := \left\{ v \in H^1(\Omega) \,|\, \Delta v \in L^2(\Omega) \right\}$ з нормою графіку

$$\|v\|_{H^1(\Omega,\Delta)} := \left(\|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Як відомо [6], в $H^1(\Omega,\Delta)$ можна визначити лінійний неперервний оператор $\gamma_1 : H^1(\Omega,\Delta) \to H^{-1/2}(\Gamma)$, який на елементах $u \in H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega,\Delta)$ співпадає з $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$, за що його також називають нормальною похідною. Тут $H^{-1/2}(\Gamma) := \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)'$. Далі $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ означатиме відношення двоїстості для просторів $H^{-1/2}(\Gamma)$ і $H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma_1 \mathbf{u} := \left(\gamma_1 u_0, \gamma_1 u_1, ...\right)^\top$.

Нехай X – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і породженою ним нормою $||\cdot||_X$. Позначимо

$$l^2(X) := \left\{ \mathbf{v} \in X^\infty \,|\, \sum_{j=0}^{\infty} \|v_j\|^2_X < +\infty \right\}$$

гільбертів простір зі скалярним добутком $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \sum\limits_{j=0}^{\infty} (v_j, w_j)_X$, $\mathbf{v},\mathbf{w} \in l^2(X)$, і нормою $||\mathbf{v}||_{l^2(X)} := \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|v_j\|^2_X \right)^{1/2}$, $\mathbf{v} \in l^2(X)$.

Означення 1. *Нехай* $\mathbf{g} \in l^2(H^{-1/2}(\Gamma))$. *Послідовність* $\mathbf{u} \in l^2(H^1(\Omega,\Delta))$ *називається узагальненим розв'язком задачі Неймана, якщо вона задовольняє систему* (1) *в сенсі розподілів і крайову умову*

$$\gamma_1 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \text{ в } l^2(H^{-1/2}(\Gamma)). \tag{6}$$

Розглянемо послідовність $\mathbf{W} := \left(W_0,\, W_1,\, ...\, W_k,\, ...\right)^\top$, яка складається з операторів $W_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega,\Delta)$, $k \in \mathbb{N}_0$, що діють за правилом (3), а також послідовність $\mathbf{D} := \left(D_0,\, D_1,\, ...\, D_k,\, ...\right)^\top$ операторів $D_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ таких, що $D_k := \gamma_1 \circ W_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Тоді, підставляючи (5) у крайову умову (6), отримаємо нескінченну трикутну систему ГІР

$$\begin{cases} D_0\lambda_0 = g_0, \\ D_1\lambda_0 + D_0\lambda_1 = g_1, \\ D_2\lambda_0 + D_1\lambda_1 + D_0\lambda_2 = g_2, \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ D_k\lambda_0 + D_{k-1}\lambda_1 + ... + D_0\lambda_k = g_k, \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{cases} \tag{7}$$

де кожну рівність трактуємо в сенсі простору $H^{-1/2}(\Gamma)$.

З метою компактного запису наведених вище виразів будемо використовувати поняття q-згортки послідовностей.

Означення 2 ([11]). *Нехай X, Y і Z – довільні множини і $q : X \times Y \to Z$ – деяке відображення. q-згорткою послідовностей $\boldsymbol{u} \in X^\infty$ і $\boldsymbol{v} \in Y^\infty$ називається послідовність $\boldsymbol{w} \in Z^\infty$, компоненти якої визначені за правилом*

$$w_i := \sum_{j=0}^{i} q\left(u_{i-j}, v_j\right), \ i \in \mathbb{N}_0; \tag{8}$$

q-згортку $\boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{v}$ коротко записують $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \underset{q}{\circ} \boldsymbol{v}$.

Нехай $X = \mathcal{L}(Y,Z)$ – простір лінійних операторів, які діють з простору Y у простір Z, і $q(A,v) := Av$, $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $v \in Y$. Тоді для компонентів q-згортки довільних послідовностей $\mathbf{A} \in \big(\mathcal{L}(Y,Z)\big)^\infty$ і $\mathbf{v} \in Y^\infty$ матимемо формулу

$$w_j = \sum_{i=0}^{j} A_{j-i} v_i, \ \ j \in \mathbb{N}_0, \tag{9}$$

і писатимемо $\mathbf{w} := \mathbf{A} \underset{Z}{\circ} \mathbf{v}$.

З використанням поняття q-згортки послідовність, задану формулою (5), можна подати у вигляді

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{W} \underset{H^1(\Omega)}{\circ} \boldsymbol{\lambda}(x), \ x \in \Omega. \tag{10}$$

За аналогією з теорією еліптичних рівнянь, q-згортку (10) називатимемо *потенціалом подвійного шару* для системи (1).

Міркуючи аналогічно, систему ГІР (7) можна записати так

$$\mathbf{D} \underset{H^{-1/2}(\Gamma)}{\circ} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g} \ \text{ в } l^2(H^{-1/2}(\Gamma)). \tag{11}$$

Про системи виду (11), які можна подати за допомогою q-згортки, будемо говорити, що вони мають згорткову структуру і називатимемо їх *згортковими*. Легко бачити, що система еліптичних рівнянь (1) також є згортковою, оскільки в ній вирази лівої частини (що не відносяться до оператора Лапласа) є компонентами q-згортки послідовностей $\mathbf{c}$ і $\mathbf{u}$.

В праці [11] доведено еквівалентність задачі Неймана і системи ГІР (11).

Теорема 1 ([11]). *Для довільної послідовності $\mathbf{g} \in l^2(H^{-1/2}(\Gamma))$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі Неймана $\mathbf{u} \in l^2(H^1(\Omega,\Delta))$. Його можна подати за допомогою потенціалу подвійного шару* (10)*, густина якого $\boldsymbol{\lambda} \in l^2(H^{1/2}(\Gamma))$ є розв'язком системи ГІР* (11)*.*

Зауваження 1. *Запропонований підхід до розв'язування задачі Неймана відноситься до так званих непрямих [10] методів граничних інтегральних рівнянь. В [11] отримано також і інші форми подання розв'язку системи* (1)*, зокрема, аналог формули Гріна, яку використовують при розв'язуванні крайових задач для еліптичних рівнянь. Крім того, для побудови розв'язку задачі в* *областях з певним типом симетрії замість фундаментального розв'язку системи* (1) *можна використати відповідні функції Гріна. Такий підхід розглянуто в [3], він дає змогу ефективно розв'язувати задачі у випадках, коли гранична поверхня має необмежені фрагменти.*

2. Виведення основних співвідношень МГЕ. Трикутний вигляд системи ГІР (11) є наслідком згорткової структури системи (1) і використання q-згортки у визначенні потенціалу подвійного шару. Тепер скористаємося цією властивістю для побудови покрокового процесу чисельного розв'язування системи (11). Її можна подати у вигляді послідовності рівнянь

$$D_0\lambda_k = \tilde{g}_k \quad \text{в} \quad H^{-1/2}(\Gamma), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{12}$$

де

$$\tilde{g}_0 := g_0; \quad \tilde{g}_k := g_k - \sum_{i=0}^{k-1} D_{k-i}\lambda_i, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Як бачимо, систему звели до послідовності рівнянь, що мають вигляд

$$D_0\eta = f \quad \text{в} \quad H^{-1/2}(\Gamma). \tag{14}$$

Вони володіють двома важливими для чисельного розв'язування властивостями. По-перше, при усіх значеннях індексу $k \in \mathbb{N}$ ліва частина інтегрального рівняння (12) задана тим самим граничним оператором D_0, а права залежить від даних з крайової умови, а також від розв'язків рівнянь з попередніми номерами $i = \overline{0, k-1}$. Врахування цих обставин під час реалізації методу дає змогу побудувати ефективні алгоритми для чисельного розв'язування як отриманої послідовності ГІР (12), так і обчислення розв'язків крайової задачі.

Другою властивістю отриманих систем є те, що граничні інтегральні оператори у лівій частині рівнянь відповідають еліптичному операторові $c_0 I - \Delta$, де I – тотожній оператор, і є добре дослідженими в теоретичному плані. У нашому випадку це дає змогу не лише обґрунтувати існування та єдиність розв'язків отриманої послідовності ГІР, а й отримати відповідні чисельні розв'язки за допомогою МГЕ, який тут розглядаємо як представник сім'ї методів Бубнова-Гальоркіна [9]. Велика кількість публікацій (див., наприклад, огляд літератури в [10, 13]) підтверджує ефективність та універсальність цього методу стосовно чисельного розв'язування крайових задач для різних видів еліптичних рівнянь.

Дослідження розв'язків ГІР (14) та апроксимації за схемою Бубнова-Гальоркіна спирається на еліптичність та обмеженість граничного оператора D_0:

$$\langle D_0\eta, \eta\rangle_\Gamma \geqslant c_1||\eta||^2_{H^{1/2}(\Gamma))}, \;\; ||D_0\eta||_{H^{-1/2}(\Gamma))} \leqslant c_2||\eta||_{H^{1/2}(\Gamma))} \;\; \forall\eta \in H^{1/2}(\Gamma)).$$

де $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ – деякі сталі.

Розглянемо в $H^{1/2}(\Gamma)$ послідовність скінченно-вимірних підпросторів $X^M \subset H^{1/2}(\Gamma)$, $M \in \mathbb{N}$, що є лінійними оболонками функцій $\{\phi_i\}_{i=1}^M$, які утворюють базис у X^M. Відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна чисельний розв'язок рівняння (14) шукаємо у вигляді лінійної комбінації

$$\eta^M := \sum_{i=1}^{M} \eta_i\phi_i \in X^M \tag{15}$$

як розв'язок такого варіаційного рівняння

$$\langle D_0\eta^M, \eta\rangle_\Gamma = \langle f, \eta\rangle_\Gamma \ \ \forall \eta \in X^M. \tag{16}$$

Якщо в ньому взяти у ролі тестових функцій елементи базису ϕ_j, то для знаходження вектора невідомих коефіцієнтів $\boldsymbol{\eta}^{[M]} := \{\eta_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{R}^M$ отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

$$D_0^{[M]}\boldsymbol{\eta}^{[M]} = \mathbf{f}^{[M]}, \tag{17}$$

де $D_0^{[M]}[j,i] := \langle D_0\phi_i, \phi_j\rangle_\Gamma$, $f_j^{[M]} := \langle f, \phi_j\rangle_\Gamma$, $\ i, j = \overline{1,M}$.

Відзначимо, що матриця отриманої системи є симетричною. Крім того, як наслідок $H^{1/2}(\Gamma)$-еліптичності оператора D_0, вона є додатньо-визначеною. Тому при довільній правій частині $\forall M \in \mathbb{N}$ система (17) матиме єдиний розв'язок і функція, знайдена за формулою (15), буде наближеним розв'язком рівняння (14). За лемою Сеа (див., наприклад, [13, Теорема 8.1]) цей розв'язок задовольняє нерівність

$$||\eta^M||_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1||f||_{H^{-1/2}(\Gamma))}, \tag{18}$$

і для його похибки справедлива оцінка

$$||\eta - \eta^M||_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant \frac{c_2}{c_1} \inf_{\xi\in X^M} ||\eta - \xi||_{H^{1/2}(\Gamma)}. \tag{19}$$

Звідси випливає збіжність в $H^{1/2}(\Gamma)$ наближеного розв'язку $\eta^M \to \eta \in H^{1/2}(\Gamma)$ при $M \to \infty$, де η – розв'язок відповідного ГІР у послідовності (12). Зазначимо, що достатньою умовою збіжності є вимога до скінченно-вимірного підпростору X^M бути апроксимуючим для простору $H^{1/2}(\Gamma)$.

Подану вище чисельну схему (17) конкретизуємо, застосовуючи МГЕ [9, 13]. Нехай $\Gamma_{\widetilde{M}} = \bigcup_{l=1}^{\widetilde{M}} \overline{\tau}_l$ – деяке наближення поверхні Γ, утворене з трикутних граничних елементів $\{\tau_l\}_{l=1}^{\widetilde{M}}$ з вершинами $\{x^{[l_1]}, x^{[l_2]}, x^{[l_3]}\}$. Вважаємо також, що усі вершини трикутників мають глобальну нумерацію $\{x_k\}_{k=1}^{M^*}$ і з кожною точкою x_k пов'язана множина $\mathcal{I}(k)$ номерів тих трикутників, в яких ця точка є вершиною. Величину $h := \max\limits_{l=\overline{1,\widetilde{M}}} \left(\int_{\tau_l} \mathrm{d}s\right)^{1/2}$ розглядаємо як параметр апроксимації.

Зазначимо, що з використанням даних про вершини кожен трикутник можна відобразити на "стандартний" трикутник

$$\tau := \{\xi := (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \xi_1 < 1, \ 0 < \xi_2 < 1 - \xi_1\}.$$

Використовуючи функції $\phi_1^1(\xi) := 1 - \xi_1 - \xi_2$, $\phi_2^1(\xi) := \xi_1$ і $\phi_3^1(\xi) := \xi_2$, задані локально на трикутнику τ, утворимо множину $\left\{\varphi_i^1\right\}_{i=1}^M$, $M = M^*$, яка містить лінійно-незалежні на $\Gamma_{\widetilde{M}}$ функції. Для побудови кожної з функцій φ_i^1 будемо використовувати по одній відповідній функції ϕ_j^1 на кожному з трикутників, номери яких входять до множини $\mathcal{I}(i)$ так, щоб отримати "шапочки" Куранта. В результаті матимемо базис з кусково-лінійних і глобально-неперервних функцій, причому $\operatorname{supp}\varphi_i^1 = \bigcup_{l\in\mathcal{I}(i)} \overline{\tau}_l =: \tau_i^*$.

Розглянемо тепер послідовність ГІР (12). Компоненти λ_k^h ($k \in \mathbb{N}_0$) її чисельного розв'язку $\boldsymbol{\lambda}^h := \left(\lambda_0^h, \lambda_1^h, ...\right)^\top$ будемо шукати у вигляді лінійної комбінації неперервних кусково-лінійних функцій

$$\lambda_k^h = \sum_{l=1}^{M} \lambda_{k,l}^h \varphi_l^1 \ \in S_h^1(\Gamma), \, k \in \mathbb{N}_0, \tag{20}$$

де $\left\{\lambda_{k,l}^h\right\}_{l=1}^M$ – невідомі коефіцієнти, $S_h^1(\Gamma)$ – лінійна оболонка функцій $\left\{\varphi_i^1\right\}_{i=1}^M$. Тоді СЛАР (17) для знаходження вектора $\boldsymbol{\lambda}_k^h := \left\{\lambda_{k,l}^h\right\}_{l=1}^M \in \mathbb{R}^M$ набуде такого вигляду:

$$\mathbf{D}_0^h \boldsymbol{\lambda}_k^h = \mathbf{g}_k^h - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{D}_{k-i}^h \boldsymbol{\lambda}_i^h, \ \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{21}$$

Тут $\mathbf{D}_j^h$ – матриця, що відповідає граничному оператору $D_j, \ j = \overline{0,k}$, її елементи визначені так:

$$D_j^h[i,l] = \int_{\tau_i^*} \varphi_i^1(x) \partial_{\boldsymbol{\nu}(x)} \int_{\tau_l^*} \varphi_l^1(y) \partial_{\boldsymbol{\nu}(y)} E_j(x-y) \mathrm{d}s_y \mathrm{d}s_x, \ \ i,l = \overline{1,M}, \tag{22}$$

а елементи вектора правої частини мають вигляд

$$g_k^h[i] = \int_{\tau_i^*} \varphi_i^1(x) \tilde{g}_k(x) \mathrm{d}s_x. \tag{23}$$

Відзначимо, що усі умови леми Сеа виконуються стосовно отриманої системи (21) для усіх значень $k \in \mathbb{N}_0$, тому на кожному кроці розв'язок $\boldsymbol{\lambda}_k^h$ існує та є єдиним, а побудована з його використанням апроксимація відповідного компонента розв'язку ГІР задовольняє нерівності (18) та (19).

Після знаходження чергового вектора $\boldsymbol{\lambda}_k^h$ можна обчислювати (беручи до уваги формулу (20)) відповідний компонент чисельного розв'язку $\mathbf{u}^h := \left(u_0^h, u_1^h, ...\right)^\top$ задачі Неймана в довільній точці $x \in \Omega$

$$u_k^h(x) = \sum_{j=0}^{k} W_j \lambda_{k-j}^h(x), \, k \in \mathbb{N}_0, \, x \in \Omega. \tag{24}$$

Виведемо апріорну оцінку похибки чисельного розв'язку, ввівши попередньо, слідуючи [10], необхідні простори Соболєва для функцій, заданих на межі Γ. Нехай Γ можна подати як об'єднання $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\widetilde{N}} \overline{\Gamma}_i$ поверхонь Γ_i ($\Gamma_i \cap \Gamma_j = \oslash$ при $i \neq j$), кожна з яких має достатньо гладку параметризацію

$$\Gamma_i := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = \widetilde{\chi}_i(\xi), \ \xi \in \widetilde{\tau}_i \subset \mathbb{R}^2\right\}.$$

Тоді, використовуючи множину невід'ємних функцій $\phi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ таких, що

$$\sum_{i=1}^{\widetilde{N}} \phi_i(x) = 1 \ \ \forall x \in \Gamma, \quad \phi_i(x) = 0 \ \ \forall x \in \Gamma \setminus \Gamma_i,$$

довільну задану на межі Γ функцію v можна подати у вигляді

$$v(x)=\sum_{i=1}^{\widetilde{N}}\phi_i(x)v(x)=\sum_{i=1}^{\widetilde{N}}v_i(x)\ \ \forall x\in\Gamma, \tag{25}$$

де $v_i(x):=\phi_i(x)v(x)\ \ \forall x\in\Gamma_i$. Враховуючи параметризацію фрагментів Γ_i, будемо розглядати при $m\in\mathbb{N}_0$ простори Соболєва $H^m(\widetilde{\tau}_i)$, елементами яких є функції $\widetilde{v}_i(\xi):=v_i(\widetilde{\chi}_i(\xi))$ при $\xi\in\widetilde{\tau}_i$, з нормою і півнормою

$$||\widetilde{v}_i||_{H^m(\widetilde{\tau}_i)}:=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}||\partial^\alpha\widetilde{v}_i||^2_{L^2(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2};\ \ |\widetilde{v}_i|_{H^m(\widetilde{\tau}_i)}:=\left(\sum_{|\alpha|=m}|\partial^\alpha\widetilde{v}_i|^2_{L^2(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2}. \tag{26}$$

Тут ∂^α – позначення частинної похідної з мультиіндексом $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$. Тоді для функцій, які задані на усій поверхні Γ, використовуватимемо простори Соболєва $H^m(\Gamma)$ з нормою

$$||v||_{H^m(\Gamma)}:=\left(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}}||\widetilde{v}_i||^2_{H^m(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2};\ \ |v|_{H^m(\Gamma)}:=\left(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}}|\widetilde{v}_i|^2_{H^m(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2}. \tag{27}$$

Для нецілих значень індексів $s=m+\sigma,\ \ m\in\mathbb{N}_0,\ \sigma\in(0,1)$, використовуватимемо простори Соболєва-Слободецького $H^s(\widetilde{\tau}_i)$ і $H^s(\Gamma)$ з відповідними півнормами і нормами

$$|\widetilde{v}_i|_{H^s(\widetilde{\tau}_i)}:=\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_{\widetilde{\tau}_i}\int_{\widetilde{\tau}_i}\frac{|\partial^\alpha\widetilde{v}_i(\xi)-\partial^\alpha\widetilde{v}_i(\eta)|^2}{|\xi-\eta|^{2+2\sigma}}ds_\xi ds_\eta\right)^{1/2},$$

$$||\widetilde{v}_i||_{H^s(\widetilde{\tau}_i)}:=\left(||\widetilde{v}_i||^2_{H^m(\widetilde{\tau}_i)}+|\widetilde{v}_i|^2_{H^s(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2}, \tag{28}$$

$$|v|_{H^s(\Gamma)}:=\left(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}}|\widetilde{v}_i|^2_{H^s(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2},\ \ ||v||_{H^s(\Gamma)}:=\left(||v||^2_{H^m(\Gamma)}+|v|^2_{H^s(\Gamma)}\right)^{1/2}.$$

Лема 1. *Нехай* $\boldsymbol{\lambda}\in\left(H^s(\Gamma)\right)^\infty$ *– розв'язок системи* (12) *при деякому* $s\in\left[\frac{1}{2},2\right]$, *який задовольняє нерівність*

$$\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|_{H^s(\Gamma)}<+\infty. \tag{29}$$

Тоді для отриманих за допомогою МГЕ (з неперервними кусково-лінійними базисними функціями) компонентів чисельних розв'язків системи ГІР (12) *та задач Неймана виконуються асимптотичні оцінки*

$$\left\|\lambda_k-\lambda_k^h\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\leqslant c_k h^{s-1/2}|\lambda_k|_{H^s(\Gamma)},\ k\in\mathbb{N}_0, \tag{30}$$

$$|u_k(x)-u_k^h(x)|\leqslant\tilde{c}_k h^{s-1/2}\sum_{j=0}^{k}|\lambda_j|_{H^s(\Gamma)},\ \ x\in\Omega,\ \ k\in\mathbb{N}_0, \tag{31}$$

де c_k *і* $\tilde{c}_k$ *– величини, які не залежать від параметра* h.

Доведення. Справедливість твердження щодо нерівності (30) випливає з теореми 12.8 в [13]. Для довільного $k \in \mathbb{N}_0$ апріорну похибку k-того компонента чисельного розв'язку в довільній точці $x \in \Omega$ можна визначити так:

$$|u_k(x) - u_k^h(x)| = \big|\sum_{i=0}^{k} W_{k-i}\big(\lambda_i - \lambda_i^h\big)(x)\big| = \Big|\sum_{i=0}^{k}\langle \partial_{\boldsymbol{\nu}(\cdot)} E_{k-i}(x-\cdot), \big(\lambda_i - \lambda_i^h\big)\ \rangle_\Gamma\Big|.$$

Справедливою є така оцінка

$$\begin{aligned}|u_k(x) - u_k^h(x)| &\leqslant \sum_{i=0}^{k}\big|\langle \partial_{\boldsymbol{\nu}(\cdot)} E_{k-i}(x-\cdot), \big(\lambda_i - \lambda_i^h\big)\ \rangle_\Gamma\big| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k}\big\|\partial_{\boldsymbol{\nu}(\cdot)} E_{k-i}(x-\cdot)\big\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\big\|\lambda_i - \lambda_i^h\big\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.\end{aligned}$$

Оскільки для довільної точки $x \in \Omega$ усі функції $E_j(x-y)$ є нескінченно-диференційовними і обмеженими разом з усіма частинними похідними на Γ, то $\big\|\partial_{\boldsymbol{\nu}(\cdot)} E_j(x-\cdot)\big\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant c_j^* = const$ у випадку достатньо гладкої граничної поверхні. Враховуючи (30), матимемо

$$|u_k(x) - u_k^h(x)| \leqslant h^{s-1/2}\sum_{i=0}^{k} c_{k-i}^* c_i |\lambda_i|_{H^s(\Gamma)} \leqslant \tilde{c}_k h^{s-1/2}\sum_{i=0}^{k}|\lambda_i|_{H^s(\Gamma)},$$

де $\tilde{c}_k = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant k}\{c_{k-i}^* c_i\}$ – величини, які не залежать від параметра h.

Розглянемо тепер обчислення елементів матриці (21), яка відповідає граничному оператору D_0. Зауважимо, що поява гіперсингулярності не дає змогу безпосередньо внести зовнішню нормальну похідну під внутрішній інтеграл. Для практичної реалізації методу ефективним виявився підхід, описаний у [7, гл.XI, §2], в основі якого лежить перехід до похідних у дотичних до Γ площинах, в яких, зокрема, лежать граничні елементи:

$$\begin{aligned}D_0^h[i,l] = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau_i^*}\int_{\tau_l^*}\frac{e^{-\kappa|x-y|}}{|x-y|}\big(\mathbf{rot}_\Gamma\varphi_i^1(x), \mathbf{rot}_\Gamma\varphi_l^1(y)\big)\,ds_y\,ds_x + \\ + \frac{\kappa^2}{4\pi}\int_{\tau_i^*}\varphi_i^1(x)\int_{\tau_l^*}\frac{e^{-\kappa|x-y|}}{|x-y|}\varphi_l^1(y)\big(\boldsymbol{\nu}(x), \boldsymbol{\nu}(y)\big)\,ds_y\,ds_x, \quad i,l = \overline{1,M}.\end{aligned} \tag{32}$$

Тут позначено

$$\mathbf{rot}_\Gamma\varphi^1(y) := \boldsymbol{\nu}(y) \times \nabla\tilde{\varphi}^1(y),\ \ y \in \Gamma. \tag{33}$$

Це вектори в дотичній площині, які ставлять у відповідність заданій на Γ функції φ^1, а $\tilde{\varphi}^1$– формальне продовження функції φ^1 вздовж нормалі $\boldsymbol{\nu}$ у приграничну область сталим значенням. Оскільки на кожному трикутнику нормаль, а також частинні похідні лінійних функцій $\tilde{\varphi}^1$ є сталими, то вираз $\big(\mathbf{rot}_\Gamma\varphi_i^1(x), \mathbf{rot}_\Gamma\varphi_l^1(y)\big)$ можна винести з-під інтегралів у першому доданку (32) і отримати інтеграли зі слабкою особливістю.

Внутрішній інтеграл у другому доданку в (32) також зі слабкою особливістю в ядрі. Його вигляд можна спростити, якщо винести з-під інтегралу вираз

$\big(\boldsymbol{\nu}(x), \boldsymbol{\nu}(y)\big)$, оскільки нормалі є незмінними на кожному граничному елементі. Тоді отримаємо інтеграли

$$\widetilde{J}_l(x) = \int_{\tau_l^*} \frac{e^{-\kappa|x-y|}\varphi_l^1(y)}{|x-y|} ds_y, \quad l = \overline{1,M}, \tag{34}$$

з яких адитивно виокремлюємо інтеграли по граничних елементах, що входять до носія функцій φ_l^1, які аналітично інтегруємо. До решти інтегралів, у тому числі тих, що відповідають граничному оператору D_k, $k \in \mathbb{N}$, застосовуємо квадратурні формули Гауса.

Зауваження 2. *Усі отримані вище результати щодо побудови узагальненого розв'язку задачі Неймана в області Ω та його наближення за допомогою методу граничних елементів можна перенести без суттєвих змін на випадок, коли задачу розглядають в нескінченній області $\Omega^+ := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Зазначимо, що тоді за нормаль братимемо вектор $\boldsymbol{\nu}^+ = -\boldsymbol{\nu}$. Далі задачі в області Ω називатимемо внутрішніми, а в Ω^+ – зовнішніми.*

3. Результати обчислювального експерименту. Продемонструємо застосування запропонованого методу для знаходження чисельних розв'язків деяких модельних задач Неймана. Вважаємо, що в системі (1) $c_k = (k+1)\kappa$, де κ – деякий параметр, $k \in \mathbb{N}_0$, а в крайовій умові (2) компоненти $\tilde{g}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ мають вигляд $\tilde{g}_k = \partial_{\boldsymbol{\nu}} v_k$ для внутрішніх задач і $\tilde{g}_k = -\partial_{\boldsymbol{\nu}} v_k$ – для зовнішніх, де

$$\begin{aligned} v_k(x) =& \frac{e^{-\kappa(|x-x^*|-1)}\big(L_k(\kappa(|x-x^*|) - L_{k-1}(\kappa(|x-x^*|)\big)}{|x-x^*|}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ v_0(x) =& \frac{e^{-\kappa(|x-x^*|-1)}}{|x-x^*|}, \ x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{35}$$

Тут L_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ – поліноми Лаґера [8], а точка x^* є параметром. Прикладами областей при моделюванні будуть куб $\Omega := (-1,1) \times (-1,1) \times (-1,1)$ і його зовнішність $\Omega^+ := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Зазначимо, що з точністю до множника послідовність $\mathbf{v}$ співпадає з фундаментальним розв'язком системи (1), тому використовуватимемо її для побудови аналітичного розв'язку крайових задач, причому братимемо $x^* = (0,0,0)$ для зовнішньої задачі і $x^* = (2,0,0)$ – для внутрішньої.

Розглянемо спочатку модельні крайові задачі для першого рівняння системи (1).

Приклад 1. *Знайти чисельний розв'язок u_0^h зовнішньої і внутрішньої задач Неймана при $\kappa = 2$.*

У таблиці **??** подано результати обчислень розв'язку, отримані з використанням МГЕ для послідовності розбиттів поверхні куба. Вони демонструють збіжність чисельного розв'язку до аналітичного при збільшенні кількості граничних елементів, тобто при зменшенні значення параметра h.

Щоб з'ясувати залежність похибки чисельного розв'язку задачі від параметра h, який характеризує розбиття граничної поверхні на елементи, будемо розглядати величини $\delta^h := ||u_0^h - u_0||_{L^2(a,b)}$ і $\epsilon^h := \frac{\delta^h}{||u_0||_{L^2(a,b)}} \cdot 100\%$, де (a,b) – відрізок,

x_1	Кількість граничних елементів			Аналітичний
	588	1200	1728	розв'язок
1.2	4.97567×10^{-1}	5.16241×10^{-1}	5.23443×10^{-1}	5.58600×10^{-1}
1.5	2.19226×10^{-1}	2.26607×10^{-1}	2.29583×10^{-1}	2.45252×10^{-1}
2.0	6.07058×10^{-2}	6.25240×10^{-2}	6.32929×10^{-2}	6.76676×10^{-2}
3.0	5.50191×10^{-3}	5.64833×10^{-3}	5.71311×10^{-3}	6.10521×10^{-3}
4.0	5.59834×10^{-4}	5.73967×10^{-4}	5.80360×10^{-4}	6.19688×10^{-4}

Таблиця 1. Розв'язки $u_0^h(x)$ зовнішньої задачі Неймана (приклад 1), отримані за допомогою МГЕ на різних розбиттях.

на якому беруть точки спостереження $x = (x_1, 0, 0)$. Також будемо обчислювати величину передбачуваного порядку збіжності

$$eoc := \frac{\ln \delta^{h_j} - \ln \delta^{h_{j+1}}}{\ln h_j - \ln h_{j+1}}, \tag{36}$$

де h_j і h_{j+1} параметри двох послідовних розбиттів граничної поверхні на граничні елементи. Похибки розв'язків та значення величини *eoc* наведені в таблиці **??**. Зазначимо, що результати обчислень свідчать про однакові порядки похибок чисельних розв'язків зовнішніх і внутрішніх задач.

	Зовнішня задача			Внутрішня задача		
$\overline{M}$	δ^h	eoc	$\epsilon^h(\%)$	δ^h	eoc	$\epsilon^h(\%)$
300	0.03539		8.34	0.02959		8.28
588	0.02565	0.957	5.92	0.02076	1.053	7.41
768	0.02254	0.967	5.16	0.01788	1.117	4.81
972	0.02011	0.969	4.58	0.01560	1.156	4.16
1200	0.01815	0.985	4.11	0.01376	1.164	3.65
1728	0.01518	0.992	3.32	0.01095	1.201	2.88

Таблиця 2. Аналіз похибок чисельних розв'язків $u_0^h(x)$ внутрішньої та зовнішньої задач Неймана (приклад 1).

Тепер продемонструємо знаходження розробленим методом компонентів чисельного розв'язку задачі Неймана з іншими значеннями індексів.

Приклад 2. *Знайти N компонентів чисельного розв'язку* u_i^h, $\quad i = \overline{0, N}$, *зовнішньої задачі Неймана при* $\kappa = 2$.

Отримані для $N = 20$ значення компонентів чисельного розв'язку задачі є добре узгодженими з аналітичним розв'язком і свідчать про швидке заникання функцій $u_i^h(x)$ з ростом значення індексу i. В таблиці **??** наведено компоненти чисельного розв'язку при $i = 10$ та $i = 20$, які отримані при розбитті поверхні куба на $\overline{M} = 1200$ граничних елементів. Також в таблиці подано поточкову відносну похибку компонентів чисельних розв'язків. Зазначимо, що для компонентів $u_i^h(x)$ при $i = \overline{1,20}$ такі похибки є співрозмірними з відповідною похибкою $u_0^h(x)$.

x_1	$u_{10}(x)$	$u_{10}^h(x)$	$\epsilon(\%)$
1.5	8.8570×10^{-2}	9.1204×10^{-2}	2.97
2.0	5.6502×10^{-2}	5.6438×10^{-2}	0.11
3.0	-1.9676×10^{-2}	-1.9356×10^{-2}	1.63
4.0	4.3413×10^{-3}	4.1735×10^{-3}	3.97
x_1	$u_{20}(x)$	$u_{20}^h(x)$	$\epsilon(\%)$
1.5	-7.6672×10^{-2}	-7.5437×10^{-2}	0.93
2.0	4.0784×10^{-2}	4.1496×10^{-2}	1.61
3.0	-1.0549×10^{-2}	-1.0756×10^{-2}	1.96
4.0	2.9939×10^{-3}	3.0127×10^{-3}	0.63

Таблиця 3. Порівняння аналітичного $u_i(x)$ і чисельного $u_i^h(x)$, $i = 10{,}20$, розв'язків зовнішньої задачі Неймана (приклад 2) при $\overline{M} = 1200$.

Висновки. Побудоване на основі q-згортки функційних послідовностей інтегральне подання узагальненого розв'язку крайової задачі Неймана для нескінченної згорткової системи еліптичних рівнянь (1) дає змогу звести таку задачу до послідовності ГІР, в якій кожне з рівнянь має один і той самий граничний оператор у лівій частині і рекурентні праві частини. Такий підхід дає змогу скористатися відомими перевагами [10] граничних інтегральних рівнянь при розв'язуванні крайових задач для еліптичних рівнянь. Отримані результати для модельних задач підтверджують ефективність розроблених чисельних методів для знаходження розв'язків як отриманих ГІР, так і вихідної крайової задачі Неймана.

1. **Галазюк В.А.** Метод інтегральних рівнянь у нестаціонарних задачах дифракції / В.А. Галазюк, Й.В. Людкевич, А.О. Музичук // Львів. ун-т. – 1984. – Деп. в УкрНІІНТІ, № 601Ук-85Деп. – 16 с.
2. **Літинський С.**Розв'язування мішаних задач для хвильового рівняння з використанням запізнюючих поверхневих потенціалів та перетворення Лаґера / С.Літинський, А.Музичук //Matematychni Studii. – 2015. – V.44, №2. – P. 185–203.
3. **Музичук Ю.** Про метод граничних інтегральних рівнянь розв'язування крайових задач для систем еліптичних рівнянь спеціального виду у частково-необмежених областях / Музичук Ю., Хапко Р. // Доповіді НАН України. – 2012. – 11. – С.20-27.
4. **Музичук Ю.** Метод граничних інтегральних рівнянь в крайових задачах Робіна, отриманих у результаті перетворення Лагера мішаних задач для еволюційних рівнянь / Ю. Музичук // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т. 18, Вип. 4(20). – С. 38-49.
5. **Chapko R.** On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations / Chapko R., Kress R. // Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Series in Mathematical Analysis and Applications. – 2000. – 2. – P.55-69.
6. **Costabel M.** Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM J.Math.Anal. – 1988. – 19. – 613-626.

7. **Dautray R.** Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Volume 4 Integral Equations and Numerical Methods / R. Dautray, J.L. Lions. – Berlin : Springer-Verlag, 1992. – 493 p.
8. **Funaro D.** Polynomial Approximations of Differential Equations // Springer-Verlag. – 1992.
9. **Hsiao G.C.** Boundary element methods: foundation and error analysis / G.C. Hsiao, W.L. Wendland // Encyclopaedia of Computational Mechanics. – Chichester : John Wiley and Sons Publ., 2004. – Vol. 1. – P. 339–373.
10. **Hsiao G.C.** Boundary Integral Equations. / Hsiao G.C., Wendland W.L. // Springer-Verlag, Berlin. – 2008. – 640 p.
11. **Muzychuk Yu. A.** On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Muzychuk Yu. A., Chapko R. S. // Matematychni Studii. – 2012. – 38(1). – P.12-34.
12. **Muzychuk Yu.** On the boundary integral equation method for exterior boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Yu. Muzychuk // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2014. – № 2 (116). – P. 96-116.
13. **Steinbah O.** Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems. // Springer Science. – 2008. – 396 p.

Музычук Ю. А.
Численное решение задачи Неймана для бесконечной сверточной системы эллиптических уравнений методом граничных элементов

Резюме

В трехмерных областях с липшицевой границей рассмотрена краевая задача Неймана для бесконечной сверточной системы эллиптических уравнений, получаемой в результате применения преобразования Лагерра по времени к начально-краевым задачам для эволюционных уравнений. С помощью q-свертки последовательностей построено интегральное представление обобщенного решения задачи и получено эквивалентную систему граничных интегральных уравнений. Доказано существование и единственность численного решения, получаемого методом граничных элементов, а также исследовано его априорную погрешность. Приведены результаты, вычисленные при решении модельных задач.
Ключевые слова: метод граничных елементов, q-свертка, краевое условие Неймана, система эллиптических уравнений .

Muzychuk Yu. A.
Numerical solution of the Neumann boundary value problem for an infinite convolutional system of elliptic equation via the boundary elements method

Summary

We consider a Neumann boundary value problem for an infinite convolutional system of elliptic equations obtained as a result of the application of the Laguerre transform in the time domain to initial-boundary value problems for evolution equations in 3d Lipschitz domains. With help of q-convolution of sequences the integral representation of the generalized solution of the problem is built and an equivalent system of boundary integral equations is obtained. The existence and uniqueness of the numerical solution obtained by the boundary elements method are proven. A priory error estimates are investigated. Numerical results obtained for the modal problems are given.

Key words: boundary elements method, q-convolution, Neumann condition, system of elliptic equations.

References

1. Halaziuk, V. A., Liudkevych, Y. V. & Muzychuk, A. O. (1984). Metod intehralnykh rivnian u nestatsionarnykh zadachakh dyfraktsii, Lviv. un-t, Dep. v UkrNIINTI, № 601Uk-85Dep, 16 p.
2. Litynskyi, S. & Muzychuk, A. (2015). Rozviazuvannia mishanykh zadach dlia khvyl'ovoho rivniannia z vykorystanniam zapizniuiuchykh poverkhnevykh potentsialiv ta peretvorennia Lagera, *Matematychni Studii*, vol. 44, no. 2, pp. 185–203.
3. Muzychuk, Yu. & Khapko, R. (2012). Pro metod hranychnykh intehralnykh rivnian rozviazuvannia kraiovykh zadach dlia system eliptychnykh rivnian spetsialnoho vydu u chastkovo-neobmezhenykh oblastiakh, *Dopovidi NAN Ukrainy*, vol. 11, pp. 20–27.
4. Muzychuk, Yu. (2013) Metod hranychnykh intehralnykh rivnian v kraiovykh zadachakh Robina, otrymanykh u rezultati peretvorennia Lahera mishanykh zadach dlia evoliutsiinykh rivnian, *Visnyk Od. nats. un-tu. Mat. i mekh.*, vol. 18, issue 4(20), pp. 38–49.
5. Chapko, R. & Kress, R. (2000). On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations, *Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Series in Mathematical Analysis and Applications*, vol. 2, pp. 55–69.
6. Costabel, M. (1988). Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 19, pp. 613–626.
7. Dautray, R. & Lions, J. L. (1992). *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Volume 4 Integral Equations and Numerical Methods*, Berlin : Springer-Verlag, 493 p.
8. Funaro, D. (1992). *Polynomial Approximations of Differential Equations*, Springer-Verlag.
9. Hsiao, G. C. & Wendland, W. L. (2004). Boundary element methods: foundation and error analysis *Encyclopaedia of Computational Mechanics*, vol. 1, pp. 339–373.
10. Hsiao, G. C. & Wendland, W. L. (2008). *Boundary Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 640 p.
11. Muzychuk, Yu. A. & Chapko, R. S. (2012). On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind, *Matematychni Studii*, vol. 38(1), pp. 12–34.
12. Muzychuk, Yu. (2014). On the boundary integral equation method for exterior boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, № 2 (116), pp. 96–116.
13. Steinbah, O. (2008). *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems*, Springer Science, 396 p.