Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 88–94

УДК 539.3

О. В. Реут
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДИФРАКЦІЯ ХВИЛЬ НА КОНІЧНОМУ ДЕФЕКТІ, РОЗТАШОВАНОМУ В АКУСТИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

У статті побудовано розривний розв'язок хвильового рівняння для конічного дефекту, розташованого в акустичному середовищі, на яке діє квазістатичне динамічне навантаження. Під дефектом вважається частина поверхні, при переході через яку терплять розриви неперервності першого роду із заданими стрибками хвильовий потенціал та його нормальна до поверхні дефекту похідна. Розривний розв'язок хвильового рівняння — це такий розв'язок, що задовільняє рівняння у всій області визначення невідомоі функції за винятком точок поверхні дефекту, де шукана функція та її похідна мають задані стрибки. Для побудови такого розв'язку застосовано метод інтегральних перетворень за класичною схемою та за узагальненою схемою відносно змінної, за якою функція є розривною. Отримано граничні значення хвильового потенціалу. За відомою схемою методу розривних розв'язків на основі отриманих співвідношень для хвильового потенціалу та його нормальної похідної можливо вивести подання розривних розв'язків динамічних рівнянь руху для конічного дефекту у випадку квазістатичних коливань.
MSC: 35L05, 74J20.
Ключові слова: конічний дефект, акустичне середовище, дифракція хвиль .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134621.

Вступ. Актуальність проблеми дифракції хвиль пояснюється необхідністю враховувати значну кількість неоднорідностей під час розробки нових композитних матеріалів, геофізичних та сейсмологічних досліджень, де явища протікають під динамічними навантаженнями. Для полегшення процесів проектування потрібні попередні розрахунки на основі відповідних математичних моделей, що надають можливість проаналізувати вплив таких концентраторів динамічних напружень, як включення, порожнина, виріз, тріщина та інше [1]– [3].

З іншого боку, задачі дифракції акустичних та пружних хвиль є одними з класичних задач механіки деформівних тіл. Побудова їх аналітичних розв'язків, аналіз хвильових полів в околі дефектів складають широкий клас задач, розв'язання яких потребують залучення складного математичного апарату.

Розвиток цього математичного апарату проведено багатьма вченими ([4]-[14]). Одним з потужних методів розв'язання задач дифракції хвиль на дефектах різної форми є метод розривних розв'язків. Цей метод було створено Г. Я. Поповим [15] — їм було дано означення розривного розв'язку диференціального рівняння, а саме: розривним розв'язком певного диференціального рівняння є такий його розв'язок, що задовольняє це рівняння у всій області визначення невідомої функції, за винятком поверхні дефекту, під час переходу якої невідома функція терпить розриви неперервності із заданими стрибками самої невідомої функції та її нормальної похідної. Ці стрибки функції та її похідної або задано умовами вихідної задачі, або встановлено за певних умов на розв'язок. Під дефектом вважається частина поверхні (математичний розріз по поверхні), при переході через

Надійшла 27.04.2018 © Реут О. В., 2018

яку функція та її нормальна похідна терплять розриви 1-го роду. Г. Я. Поповим був запропонований метод побудови таких розв'язків для дефектів та тіл, що описуються в ортогональних криволінійних системах координат. Суть його полягає в побудові розривного розв'язку хвильового рівняння (або рівняння Лапласа для статичної постановки задачі) та подальшій побудові розривних розв'язків рівнянь Ламе. Це реалізовано завдяки формулам взаємозв'язку хвильових потенціалів та переміщень і напружень. У [15] їм було запропоновано метод побудови розривних розв'язків статичних задач теорії пружності для лінійних, кругових, сферичних та циліндричних дефектів.

Цей метод було поширено на задачі дифракції хвиль наприклад, у роботах [16]– [18]. У роботі [19] метод розривних розв'язків поширено на дефекти довільної форми.

У даній роботі пропонується побудова розривного розв'язку рівняння Гельмгольца для випадку дефекту конічної форми.

Основні результати. Нехай в акустичному середовищі міститься конічний дефект, поверхня якого описується у сферичній системі координат співвідношеннями:

$$0 < r < \infty, 0 < \theta < \omega, -\pi < \varphi < \pi. \tag{1}$$

Середовище знаходиться під впливом усталених коливань, що описуються рівнянням Гельмгольца

$$\left(r^2\tilde{\Phi}'(r,\theta,\varphi)\right)' - \nabla\tilde{\Phi}(r,\theta,\varphi) - (rq)^2\tilde{\Phi}(r,\theta,\varphi) = 0, \tag{2}$$

тут $\Phi(r,\theta,\varphi,t) = \tilde{\Phi}(r,\theta,\varphi)e^{i\omega t}$, c — швидкість хвиль в акустичному середовищі. Тут і далі введемо наступні позначення: $\nabla\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} - \left(\sin\theta\dot{\Phi}(r,\theta,\varphi)\right)^{\cdot}\right]$, $q^2 = \left(\frac{i\omega}{c}\right)^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$, ω — частота падаючої хвилі; тут штрих позначає похідну за змінною r, точка над літерою — похідну за другою змінною θ.

Застосуємо до рівняння (2) інтегральне перетворення Фур'є за змінною φ:

$$\Phi_n(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi}\Phi(r,\theta,\varphi)d\varphi. \tag{3}$$

У просторі трансформант (3) рівняння (2) набуває вигляду:

$$\left(r^2\Phi_n'(r,\theta)\right)' - \nabla_n\Phi_n(r,\theta) - r^2q^2\Phi_n(r,\theta) = 0, \tag{4}$$

де $\nabla_n f_n(r,\theta) = \frac{n^2}{\sin^2\theta} - \frac{\left[\sin\theta f_n'(r,\theta)\right]^{\cdot}}{\sin^2\theta}$.

Зробимо у рівнянні (4) заміну змінних $r = \frac{x}{q}$, у нових змінних рівняння (4) запишеться у формі

$$\left(x^2\Phi_n'\left(\frac{x}{q},\theta\right)\right)' - \nabla_n\Phi_n\left(\frac{x}{q},\theta\right) - x^2\Phi_n\left(\frac{x}{q},\theta\right) = 0. \tag{5}$$

Застосуємо до (5) інтегральне перетворення Канторовича—Лебєдєва за змінною x:

$$\Phi_{n\tau}(\theta) = \int_0^\infty \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}\Phi_n\left(\frac{x}{q},\theta\right)dx. \tag{6}$$

У просторі трансформант (6) маємо

$$\tau^2\Phi_{n\tau}(\theta) + \left(\frac{1}{4} + \nabla_n\right)\Phi_{n\tau}(\theta) = 0. \tag{7}$$

Застосувати інтегральне перетворення Лежандра до рівняння (7) за загальною схемою неможливо, оскільки при $\theta = \omega$ мають місце розриви функції $\Phi_{n\tau}(\theta)$ та її похідної зі стрибками:

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi\left(\tfrac{x}{q}, \omega, \varphi\right)\right\rangle &= \Phi\left(\tfrac{x}{q}, \omega - 0, \varphi\right) - \Phi\left(\tfrac{x}{q}, \omega + 0, \varphi\right), \\ \left\langle \Phi'\left(\tfrac{x}{q}, \omega, \varphi\right)\right\rangle &= \tfrac{\partial\Phi\left(\frac{x}{q},\theta,\varphi\right)}{\partial\theta}|_{\theta=\omega-0} - \tfrac{\partial\Phi\left(\frac{x}{q},\theta,\varphi\right)}{\partial\theta}|_{\theta=\omega+0}. \end{aligned} \tag{8}$$

Застосуємо до рівняння (7) інтегральне перетворення Лежандра за узагальненою схемою [15]:

$$\Phi_{n\tau k} = \int_0^{\pi} \Phi_{n\tau}(\theta) P_k^{|n|}(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \tag{9}$$

Це приведе до лінійного алгебраїчного рівняння у просторі трансформант (3, 6, 9):

$$\Phi_{n\tau k}\left(\tau^2 + (k+1/2)^2\right) = \sin\omega\left(\left\langle \Phi^{\cdot}_{n\tau}(\theta)\right\rangle P_k^{|n|}(\cos\omega) - \left\langle \Phi_{n\tau}(\theta)\right\rangle P_k^{|n|\cdot}(\cos\theta)\Big|_{\theta=\omega}\right).$$

Далі будемо записувати $\frac{dP_k^{|n|}(\cos\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=\omega} = \frac{dP_k^{|n|}(\cos\omega)}{d\omega}$. Тут

$$\begin{pmatrix} \langle \Phi_{n\tau}(\omega)\rangle \\ \langle \Phi^{\cdot}_{n\tau}(\omega)\rangle \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} e^{in\varphi} \begin{pmatrix} \left\langle \Phi(\frac{x}{q}, \omega, \varphi)\right\rangle \\ \left\langle \Phi^{\cdot}(\frac{x}{q}, \omega, \varphi)\right\rangle \end{pmatrix} d\varphi dx.$$

Остаточно отримаємо вираз трансформанти шуканої функції $\Phi_{n\tau k}$ через трансформанту її стрибка та стрибка її нормальної похідної:

$$\Phi_{n\tau k} = \frac{\sin\omega\left(\left\langle \Phi^{\cdot}_{n\tau}(\theta)\right\rangle P_k^{|n|}(\cos\omega) - \left\langle \Phi_{n\tau}(\theta)\right\rangle \frac{dP_k^{|n|}(\cos\omega)}{d\omega}\right)}{\tau^2 + (k+1/2)^2}. \tag{10}$$

Застосуємо до виразу (10) обернене перетворення Лежандра

$$\Phi_{n\tau}(\theta) = \sum_{k=|n|}^{\infty} \sigma_{kn} P_k^{|n|}(\cos\theta)\Phi_{n\tau k}, \tag{11}$$

де $\sigma_{kn} = \frac{(k+1/2)(k-n)!}{(k+|n|)!}$. До отриманого виразу (11) застосуємо обернене перетворення Канторовича—Лебєдєва:

$$\Phi_n\left(\frac{x}{q}, \theta\right) = \int_0^{\infty} \tau\sinh\pi\tau \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}\Phi_{n\tau}(\theta)d\tau.$$

Візьмемо до уваги, що вирази для трансформант стрибків хвильового потенціала та його нормальної похідної мають подання

$$\begin{bmatrix} \langle \Phi_{n\tau}(\omega) \rangle \\ \langle \Phi^{\cdot}_{n\tau}(\omega) \rangle \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \left\langle \Phi_n\left(\frac{\xi}{q}, \omega\right) \right\rangle \\ \left\langle \Phi^{\cdot}_n\left(\frac{\xi}{q}, \omega\right) \right\rangle \end{bmatrix} \frac{K_{i\tau}(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi.$$

У просторі трансформант Фур'є вираз для хвильового потенціалу набуває вигляду

$$\Phi_n\left(\frac{x}{q}, \theta\right) = \sin\omega \sum_{k=|n|}^\infty \sigma_{kn} P_k^{|n|}(\cos\theta) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau \sinh \pi\tau}{[\tau^2 + (k+1/2)^2]} \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} \frac{K_{i\tau}(\xi)}{\sqrt{\xi}} \left[P_k^{|n|}(\cos\omega) \left\langle \Phi^{\cdot}_{n\tau}\left(\frac{\xi}{q}, \omega\right) \right\rangle - P_k^{|n|\cdot}(\cos\omega) \left\langle \Phi_{n\tau}\left(\frac{\xi}{q}, \omega\right) \right\rangle \right] d\tau d\xi \tag{12}$$

Інтеграл, що входить до виразу (12), дорівнює [2.16.52(11), [20]]:

$$I_k(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau K_{i\tau}(x) K_{i\tau}(\xi)}{(\sinh \pi\tau)^{-1} (\tau^2 + (k+1/2)^2)} d\tau = \\ = \frac{\pi i}{2\sqrt{x\xi}} \begin{cases} J_\nu(\xi q) H_\nu^{(1)}(xq), \xi < x \\ J_\nu(xq) H_\nu^{(1)}(\xi q), \xi > x \end{cases}, \nu = k + 1/2.$$

де $J_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x)$ — функції Бесселя та Ханкеля першого роду відповідно.

Отже, отримано подання розривного розв'язку рівняння Гельмгольца для дефекта (1)

$$\Phi_n\left(\frac{x}{q}, \theta\right) = \sin\omega \int_0^\infty \left[\left\langle \Phi^{\cdot}_n\left(\frac{\xi}{q}, \omega\right) \right\rangle G_n(x, \xi; \theta, \omega) - \left\langle \Phi_n\left(\frac{\xi}{q}, \omega\right) \right\rangle \frac{\partial}{\partial\omega} G_n(x, \xi; \theta, \omega) \right] d\xi,$$

$$x = rq, \xi = \rho q,$$

$$G_n(x, \xi; \theta, \omega) = \sum_{k=|n|}^\infty \sigma_{kn} P_k^{|n|}(\cos\theta) P_k^{|n|}(\cos\omega) I_k(x, \xi).$$

Як це встановлено раніше, граничні значення хвильового функціонала при підході до берегів дефекту $\omega = \theta \pm 0$ мають вигляд

$$\Phi_n\left(\frac{x}{q}, \omega \mp 0\right) = \pm\frac{1}{2} \left\langle \Phi_n\left(\frac{x}{q}, \omega\right) \right\rangle - \sin\omega \int_0^\infty \left(\left\langle \Phi_n\left(\frac{\xi}{q}, \omega\right) \right\rangle \frac{\partial}{\partial\omega} G_n(x, \xi; \theta, \omega)\big|_{\theta=\omega\mp 0} - \left\langle \Phi^{\cdot}_n\left(\frac{\xi}{q}, \omega\right) \right\rangle G_n(x, \xi; \theta, \omega)\big|_{\theta=\omega\mp 0} \right) d\xi,$$

$$x = rq, \xi = \rho q.$$

Ці формули отримано за рахунок використання відомих фактов теорії потенціалу (розривність потенціалу подвійного шару та нормальної похідної простого шару). Застосування оберненого інтегрального перетворення Фур'є завершує побудову розривного розв'язку рівнянь Гельмгольца.

Висновки. В роботі нами отримані наступні результати.

1. Побудовано розривний розв'язок рівняння Гельмгольца для конічного дефекту.
2. Отриманий розривний розв'язок рівняння Гельмгольца дозволяє побудувати розривні розв'язки рівнянь Ламе для випадку усталених коливань для конічного дефекту.

1. **Di Cocco V.** Ductile cast irons: Microstructure influence on the damaging micromechanisms in overloaded fatigue cracks / V. Di Cocco, F. Iacoviello // Engineering Failure Analysis. – 2017.
2. **Toribio J.** Crack tip field in circumferentially-cracked round bar (CCRB) in tension affected by loss of axial symmetry / J. Toribio, B. Gonzales, J.C. Matos // Frattura ed Integrita Strutturale. – 2017. – Vol. 41. – P. 139–142. DOI: 10.3221/IGF-ESIS, 42.21
3. **Peron M.** Notch stress intensity factors under mixed mode loadings; an overview of recent advanced methods for rapid calculation / M. Peron, S.M.J. Razavi, F. Berto, J. Torgersen // Frattura ed Integrita Strutturale. – 2017. – Vol. 42. – P. 196–204. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.42.21
4. **Grinchenko V.T.** Harmonical oscillations and waves in elastic bodies (in Russian) / V.T. Grinchenko, V.V. Meleshko. – Kyiv: Naukova dumka, 1981.
5. **Guz A.N.** Difraction of elastic waves (in Russian) / A.N. Guz, V.D. Kubenko, M.A. Cherevko. – Kyiv: Naukova dumka, 1978.
6. **Babeshko V.A.** On the method of block element / V.A. Babeshko, O.M. Babeshko, O.V. Evdokimova // Mechanics of Solids. – 2010. – Vol. 45. – P. 437–444. 10.3103/SOO25654410030143
7. **Mykhas'kiv V.** 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces / V. Mykhas'kiv, V. Stankevych, I. Zhbadynskyi, Ch. Zhang // International Journal of Fracture. – 2009. – Vol. 159, No. 2. – P. 137–149.
8. **Slepyan I.I.** Mechanics of cracks / I.I. Slepyan. – Leningrad: Sudostroenie, 1990.
9. **Mnev E.N.** Hydroelasticity of shells (in Russian) / E.N. Mnev, A.K. Perzev. – Leningrad: Sudostroenie, 1970.
10. **Vilde M.V.** Boundary and interfacial resonance effects in elasticity bodies (in Russian) / M.V. Vilde, Yu.D. Kaplunov, I.Yu. Kossovich. – Moscow: Fizmatgiz, 2010.
11. **Kit G.S.** Method of potentials in three-dimensional problems for thermoelasticity bodies with cracks (in Russian) / G.S. Kit, M.V. Khay. – Kyiv: Naukova dumka, 1989.
12. **Sladek V.** Transient elastodynamic three- dimensional problems in cracked bodies / V. Sladek, J. Sladek // Applied Mathematical Modelling. – 1984. – Vol. 8, No. 1. – P. 2–10.
13. **Guz A.N.** Stress-intensity factors for materials with interface cracks under harmonic loading / A.N. Guz, I.A. Guz, A.V. Men'shikov, V.A. Men'shikov // Int. Appl. Mech. – 2011. – Vol. 46. – P. 1093. https://doi.org/ 10.1007/ s10778 -011-0401-1
14. **Savruk M.P.** Numerical analysis in plane problems of the crack's theory (in Russian) / M.P. Savruk, P.N. Osiv, I.V. Prokopchuk. – Kyiv: Naukova dumka, 1989.
15. **Popov G.Ya.** The elastic stress' concentration around dies, cuts, thin inclusions and reinforcements (in Russian) / G.Ya. Popov. – Moscow: Nauka, 1982.
16. **Popov V.G.** Interaction of a plane harmonic Rayleigh wave with a thin rigid edge inclusion coupled with an elastic medium / V.G. Popov // Applied Mathematics and Mechanics. – 1997. – Vol. 61, No. 2. – P. 245–252.
17. **Vaysfel'd N.D.** Time-dependent problems of the concentration of elastic stress neat a conical defect / N.D. Vaysfel'd // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2005. – Vol. 69, No. 3. – P. 427–437.

18. **Vaysfel'd N.D.** The stress concentration around a semi-infinite cylindrical crack during the shock loading of an elastic medium by a centre of rotation / N.D. Vaysfel'd, G.Ya. Popov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2001. – Vol. 65, No. 3. – P. 509–518.
19. **Reut V.V.** Orthogonal polynomials method and its generalization at some new problems of fracture mechanics / V.V. Reut, H.O. Fesenko, N.D. Vaysfel'd, Z. Zhuravlova // Conference 14-th Intern. Conference on Fracture (ICF 14), Rhodes, Greece, 2017.
20. **Prudnikov A.P.** Integrals and series: Special functions (in Russian) / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.M. Marichev. – Moscow: Nauka, 1983.

Реут Е. В.
Дифракция волн на коническом дефекте, расположенном в акустической среде

Резюме

В статье построено разрывное решение волнового уравнения для конического дефекта, расположенного в акустической среде, на которую действует квазистатическая динамическая нагрузка. Под дефектом понимается часть поверхности, при переходе через которую терпят разрывы непрерывности первого рода с заданными скачками волновой потенциал и его нормальная к поверхности дефекта производная. Разрывное решение волнового уравнения — это такое решение, которое удовлетворяет уравнению во всей области определения неизвестной функции за исключением точек поверхности дефекта, где искомая функция и её производная имеют заданные скачки. Для построения такого решения применён метод интегральных преобразований по классической схеме и по обобщённой схеме относительно переменной, по которой функция является разрывной. Получены граничные значения волнового потенциала. По известной схеме метода разрывных решений на основе полученных соотношений для волнового потенциала и его нормальной производной можно вывести представление разрывных решений динамических уравнений движения для конического дефекта в случае квазистатических колебаний.
Ключевые слова: конический дефект, акустическая среда, дифракция волн .

Reut O. V.
Diffraction of wave on the conical defect in the acoustic environment

Summary

The discontinuous solution of the wave equation for a conical defect in acoustic environment under the quasistatic dynamic load is constructed in the article. The defect is the part of the surface when passing through it the wave potential and its normal to the defect's surface derivative are discontinuous with the given jumps. The integral transformation method by the classic scheme and generalized scheme relatively to the variable on which the function is discontinuous was applied for the construction of the solution. The boundary values of the wave potential are obtained. The representations for the discontinuous solutions of the dynamic movement equations for the conical defect in the case of quasistatic fluctuations could be derived by the known scheme of the discontinuous solutions's method based on the obtained relations for the wave potential and its normal derivative.
Key words: conical defect, acoustic environment, diffraction of waves.

References

1. Di Cocco V., Iacoviello F. (2017) Ductile cast irons: Microstructure influence on the damaging micromechanisms in overloaded fatigue cracks *Engineering Failure Analysis.*

2. Toribio J., Gonzales B., Matos J.C. (2017) Crack tip field in circumferentially-cracked round bar (CCRB) in tension affected by loss of axial symmetry *Frattura ed Integrita Strutturale*, Vol. 41, P. 139–142. DOI: 10.3221/IGF-ESIS, 42.21
3. Peron M., Razavi S.M.J., Berto F., Torgersen J. (2017) Notch stress intensity factors under mixed mode loadings; an overview of recent advanced methods for rapid calculation *Frattura ed Integrita Strutturale*, Vol. 42, P. 196–204. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.42.21
4. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. (1981). *Harmonical oscillations and waves in elastic bodies (in Russian)*. Kyiv: Naukova dumka.
5. Guz A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A. (1978). *Difraction of elastic waves (in Russian)*. Kyiv: Naukova dumka.
6. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. (2010). On the method of block element *Mechanics of Solids*, Vol. 45, P. 437–444. 10.3103/SOO25654410030143
7. Mykhas'kiv V., Stankevych V., Zhbadynskyi I., Zhang Ch. (2009). 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces *International Journal of Fracture*, Vol. 159, No. 2, P. 137–149.
8. Slepyan I.I. (1990). *Mechanics of cracks (in Russian)*. Leningrad: Sudostroenie.
9. Mnev E.N., Perzev A.K. (1970). *Hydroelasticity of shells*. Leningrad: Sudostroenie.
10. Vilde M.V., Kaplunov Yu.D., Kossovich I.Yu. (2010). *Boundary and interfacial resonance effects in elasticity bodies (in Russian)*. Moscow: Fizmatgiz.
11. Kit G.S., Khay M.V. (1989). *Method of potentials in three-dimensional problems for thermoelasticity bodies with cracks (in Russian)*. Kyiv: Naukova dumka.
12. Sladek V., Sladek J. (1984). Transient elastodynamic three- dimensional problems in cracked bodies *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 8, No. 1, P. 2–10.
13. Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A. (2011) Stress-intensity factors for materials with interface cracks under harmonic loading *Int. Appl. Mech.*, Vol. 46, P. 1093. https://doi.org/ 10.1007/ s10778 -011-0401-1
14. Savruk M.P., Osiv P.N., Prokopchuk I.V. (1989). *Numerical analysis in plane problems of the crack's theory (in Russian)*. Kyiv: Naukova dumka.
15. Popov G.Ya. (1982). *The elastic stress' concentration around dies, cuts, thin inclusions and reinforcements (in Russian)*. Moscow: Nauka.
16. Popov V.G. (1997) Interaction of a plane harmonic Rayleigh wave with a thin rigid edge inclusion coupled with an elastic medium *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 61, No. 2, P. 245–252.
17. Vaysfel'd N.D. (2005) Time-dependent problems of the concentration of elastic stress neat a conical defect *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 69, No. 3, P. 427–437.
18. Vaysfel'd N.D., Popov G.Ya. (2001) The stress concentration around a semi-infinite cylindrical crack during the shock loading of an elastic medium by a centre of rotation *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 65, No. 3, P. 509–518.
19. Reut V.V., Fesenko H.O., Vaysfel'd N.D., Zhuravlova Z. (2017) Orthogonal polynomials method and its generalization at some new problems of fracture mechanics *Conference 14-th Intern. Conference on Fracture (ICF 14)*, Rhodes, Greece.
20. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.M. (1983). *Integrals and series: Special functions (in Russian)*. Moscow: Nauka.