УДК 517.977.1:517.929.4

В. В. Пічкур[1], В. В. Собчук[2], М. С. Таірова[3], О. М. Башняков[1]
[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка
[2]Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки
[3]Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

КРИТЕРІЇ КЕРОВАНОСТІ З МНОЖИНИ ПОЧАТКОВИХ СТАНІВ НА ТЕРМІНАЛЬНУ МНОЖИНУ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Розглядаються умови керованості для лінійних нестаціонарних дискретних систем з множини початкових станів на термінальну множину. Введено означення трьох видів керованості: з множини в множину; зі всієї множини початкових умов на термінальну множину; з множини початкових умов на всю термінальну множину. Для кожного з них побудовано функції керованості, обгрунтовано необхідні і достатні умови керованості, а також наведено відповідні приклади.

MSC: 93B05.
Ключові слова: дискретні системи, керованість, керування, функція керованості .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134620.

Вступ. Проблема керованості є однією з центральних в теорії керування. Для лінійних дискретних систем керування відомі критерії керованості для стаціонарних і нестаціонарних систем [1, 2]. Втім, якщо задані геометричні обмеження на функцію керування, а також множину початкових і кінцевих станів системи, то такі критерії не можуть бути застосовані. Для лінійних систем керування, що описуються у формі звичайних диференціальних рівнянь, критерій керованості для такого випадку одержано в [3]. Для цього вводиться функція керованості, яка залежить від опорних функцій множини обмежень на керування, а також множин початкових і кінцевих станів. Основний результат полягає в тому, що аналізується невід'ємність знаку такої функції на одиничній сфері.

У статті обґрунтовуються умови керованості для лінійних нестаціонарних дискретних систем з множини початкових станів на термінальну множину. Вказані множини вибираються в класі опуклих компактів. У постановках задач фіксованим є інтервал, на якому розглядається система, а також значення вектора керування належать відомим компактним множинам. Розвиваючи підхід роботи [3], ми даємо означення трьох видів керованості: з множини в множину; зі всієї множини початкових умов на термінальну множину; з множини початкових умов на всю термінальну множину.

Основні результати

Будемо використовувати такі позначення: $\mathbb{R}^n$ — n-вімірний евклідовий простір; $\|\cdot\|$ — евклідова норма в $\mathbb{R}^n$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$; $conv(\mathbb{R}^n)$ — сукупність непорожніх опуклих компактів в $\mathbb{R}^n$; $c(A,\psi)$ — опорна функція множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $\psi \in \mathbb{R}^n$; $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ — одинична сфера; $K_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена куля радіуса $r > 0$ з центром а точці $x \in \mathbb{R}^n$; $\lambda_{min}(\cdot)$, $\lambda_{max}(\cdot)$ — відповідно мінімальне та максимальне власні числа матриці.

Надійшла 14.03.2018

1. Керованість з множини в множину. Розглянемо лінійну дискретну систему керування

$$x(k+1) = A(k)x(k) + C(k)u(k), k = 0, 1, 2, ..., N. \tag{1}$$

Тут $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — вектор стану, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ — вектор керування, $A(k)$ — $n \times n$-матриці; $C(k)$ — $n \times m$-матриці, $k = 0, 1, 2, ..., N$. Керування $u(k) \in U(k)$, де $U(k) \in conv(\mathbb{R}^m)$, $k = 0, 1, 2, ..., N-1$. Множина M_0 початкових станів і множина кінцевих станів M_N системи (1) є опуклими компактами в $\mathbb{R}^n$. Множина досяжності системи (1) записується так:

$$X\left(k, _0\right) = \Theta(k)M_0 + \sum_{s=0}^{k-1} \Theta(k, s+1)C(s)U(s), \tag{2}$$

де $\Theta(k) = \Theta(k, 0), \Theta(k, s) = A(k-1)A(k-2)....A(s)$, $0 \leqslant s \leqslant k$. Виходячи з формули (2), опорна функція множини досяжності $X\left(k, M_0\right)$ має вигляд

$$c(X\left(k, M_0\right), \psi) = c(M_0, \Theta^*(k)\psi) + \sum_{s=0}^{k-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(k, s+1)\psi), \tag{3}$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$. Введемо таке означення.

Означення 1. *Система (1) називається керованою на інтервалі* $0 \leqslant k \leqslant N$ *з множини* M_0 *в множину* M_N*, якщо знайдуться точки* $x_0 \in M_0$, $x_N \in M_N$ *і допустиме керування* $u(k) \in U(k), k = 0, 1, 2, ..., N-1$ *такі, що*

$$x(N, x_0, u(0)) = x_N.$$

Тут $x(N, x_0, u(0)) = x_N$ позначає розв'язок системи (1) за умови $x(0) = x_0$ в силу допустимого керування $u(\cdot)$, визначеного в точках $k = \overline{0, N-1}$.

Функція

$$\Phi(\psi) = c(M_0, \Theta^*(N)\psi) + c(M_N, -\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi), \psi \in \mathbb{R}^n$$

називається функцією керованості системи (1) з множини M_0 в множину M_N на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$. Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Для того щоб система (1) була керованою на інтервалі* $0 \leqslant k \leqslant N$ *з множини* M_0 *в множину* M_N*, необхідно і достатньо, щоб функція керованості* $\Phi(\psi) \geqslant 0$ *для всіх* $\psi \in S$.

Доведення. Необхідність. Нехай система (1) є керованою на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$ з множини M_0 в множину M_N. Це означає, що

$$X(N, M_0) \cap M_N \neq \varnothing.$$

Останнє співвідношення можна записати в еквівалентній формі

$$0 \in X(N, M_0) + (-1)M_N.$$

Використовуючи властивості опорної функції [4], одержуємо

$$c(X\,(N, M_0)\,, \psi) + c(M_N, -\psi) \geqslant 0$$

для всіх $\psi \in S$. Підставемо (3) в останню нерівність

$$c(M_0, \Theta^*(N)\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) + c(M_N, -\psi) \geqslant 0, \psi \in S.$$

Отже, $\Phi(\psi) \geqslant 0, \psi \in S$. Достатність обґрунтовується аналогічно до необхідності, але в зворотному порядку. Теорему доведено.

Приклад 1. *Розглянемо умови теореми 1 у випадку, якщо* $M_0 = K_{p_0}(a)$, $M_N = K_{p_N}(b)$, $U(k) = K_{q(k)}(0), k = 0, 1, 2, ..., N-1$. *Тут* $a, b \in \mathbb{R}^n$, $p_0 > 0$, $p_N > 0$, $q(k) > 0, k = 0, 1, 2, ..., N-1$. *Тоді функція керованості має вигляд*

$$\Phi(\psi) = p_0||\Theta^*(N)\psi|| + < a, \Theta^*(N)\psi > + p_N||\psi|| - < b, \psi > +$$
$$+ \sum_{s=0}^{N-1} q(s)||C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi||, \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Умову $\Phi(\psi) \geqslant 0, \psi \in S$ *можна записати так*

$$p_0||\Theta^*(N)\psi|| + p_N + \sum_{s=0}^{N-1} q(s)||C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi|| \geqslant < b - \Theta(N)a, \psi > . \qquad (4)$$

Оскільки

$$||\Theta^*(N)\psi|| \geq \sqrt{\lambda_{min}\,(\Theta(N)\Theta^*(N))},$$
$$||C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi|| \geq \sqrt{\lambda_{min}\,(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N))},$$
$$\max_{\psi \in S} < b - \Theta(N)a, \psi >= ||b - \Theta(N)a||,$$

то нерівність (4) буде виконуватися для всіх $\psi \in S$, *якщо*

$$p_0\sqrt{\lambda_{min}\,(\Theta(N)\Theta^*(N))} + p_N +$$
$$+ \sum_{s=0}^{N-1} q(s)\sqrt{\lambda_{min}\,(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N))} \geqslant ||b - \Theta(N)a||. \qquad (5)$$

Отже, якщо параметри $a, b, p_0, p_N, q(s)$ *задовольняють (5), то система (1) буде керованою з* M_0 *в* M_N *на* $0 \leqslant k \leqslant N$.

2. Керованість зі всієї множини початкових станів. Розглянемо таке означення.

Означення 2. *Система (1) називається керованою на інтервалі* $0 \leqslant k \leqslant N$ *зі всієї множини* M_0 *в множину* M_N, *якщо для будь-якої точки* $x_0 \in M_0$ *знайдеться стан* $x_N \in M_N$ *та допустиме керування* $u(k) \in U(k), k = 0, 1, 2, ..., N-1$ *таке, що* $x(N, x_0, u(0)) = x_N$.

Функція

$$W(\psi) = c(M_N, -\psi) - c(M_0, -\Theta^*(N)\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi)$$

називається функцією керованості в системи (1) зі всієї множини M_0 в множину M_N на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$, де $\psi \in \mathbb{R}^n$. Має місце такий критерій.

Теорема 2. *Для того щоб система (1) була керованою на інтервалі* $0 \leqslant k \leqslant N$ *зі всієї множини* M_0 *в множину* M_N*, необхідно і достатньо, щоб* $W(\psi) \geqslant 0$ *для всіх* $\psi \in S$.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система (1) є керованою зі всієї множини M_0 в множину M_N при $0 \leqslant k \leqslant N$. Це означає, що для довільної точки $x_0 \in M_0$ виконується співвідношення

$$X(N, x_0) \cap M_N \neq \varnothing$$

або еквівалентне до нього включення

$$0 \in X(N, x_0) + (-1)M_N.$$

Використовуючи (2) і (3), одержимо, що для всіх $x_0 \in M_0$

$$< x_0, \Theta^*(N)\psi > + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) + c(M_N, -\psi) \geqslant 0, \psi \in S.$$

З останньої нерівності випливає

$$\begin{aligned} &\min\nolimits_{x_0 \in M_0} < x_0, \Theta^*(N)\psi > + c(M_N, -\psi) + \\ &+ \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) \geqslant 0, \psi \in S. \end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки

$$\min_{x_0 \in M_0} < x_0, \Theta^*(N)\psi >= - \max_{x_0 \in M_0} < x_0, -\Theta^*(N)\psi >= -c(M_0, -\Theta^*(N)\psi),$$

то з (6) одержуємо

$$c(M_N, -\psi) - c(M_0, -\Theta^*(N)\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) \geqslant 0, \psi \in S.$$

Отже, $W(\psi) \geqslant 0, \psi \in S$.

Достатність теореми обґрунтовується тим, що при доведенні необхідності використовувались твердження, які є необхідними і достатніми. Теорему доведено.

Приклад 2. *Розглянемо умови керованості зі всієї множини M_0 в множину M_N при $0 \leqslant k \leqslant N$, в умовах прикладу 1. У цьому випадку*

$$W(\psi) = p_N||\psi|| + < b, -\psi > - p_0||\Theta^*(N)\psi|| + < a, \Theta^*(N)\psi > +$$
$$+ \sum_{s=0}^{N-1} q(s)||C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi||, \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Умову $W(\psi) \geqslant 0, \psi \in S$ можна записати так

$$p_N + \sum_{s=0}^{N-1} q(s)||C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi|| \geqslant$$
$$\geqslant p_0||\Theta^*(N)\psi|| + < b - \Theta(N)a, \psi >, \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Використовуючи оцінки прикладу 1 і $||\Theta^*(N)\psi|| \leqslant \sqrt{\lambda_{max}\left(\Theta(N)\Theta^*(N)\right)}$, одержуємо

$$p_N + \sum_{s=0}^{N-1} q(s)\sqrt{\lambda_{min}\left(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N)\right)} \geqslant$$
$$\geqslant p_0\sqrt{\lambda_{max}\left(\Theta(N)\Theta^*(N)\right)} + ||b - \Theta(N)a||.$$

Отже, якщо параметри задачі задовільняють одержаній оцінці, то дискретна система (1) буде керованою зі всієї множини M_0 на множину M_N при $0 \leqslant k \leqslant N$.

3. Керованість з множини на всю множину. Результати даного пункту статті будуються на такому означенні.

Означення 3. *Система (1) називається керованою на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$ множини M_0 на всю множину M_N, якщо для будь-якого стану $x_N \in M_N$ існує точка $x_0 \in M_0$ і допустиме керування $u(k) \in U(k), k = 0, 1, 2, ..., N-1$ такі, що $x(N, x_0, u(0)) = x_N$.*

Функція

$$Z(\psi) = c(M_0, \Theta^*(N)\psi) - c(M_N, \psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi)$$

називається функцією керованості в системи (1) з множини M_0 на всю множину M_N на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$, де $\psi \in \mathbb{R}^n$. Має місце така теорема.

Теорема 3. *Для того, щоб система (1) була керованою на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$ з множини M_0 на всю множину M_N необхідно і достатньо, щоб $Z(\psi) \geqslant 0$ для всіх $\psi \in S$.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система (1) є керованою з множини M_0 на всю множину M_N. Тоді з означення 3 випливає, що

$$X(N, x_0) \supset M_N.$$

Використовуючи властивості опорних функцій [4], одержуємо

$$c(X(N, M_0), \psi) - c(M_N, \psi) \geqslant 0, \forall \psi \in S.$$

Підставемо в останню нерівність формулу (3)

$$c(M_0, \Theta^*(N)\psi) - c(M_N, \psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) \geqslant 0, \psi \in S.$$

Це означає, що $Z(\psi) \geqslant 0$ для всіх $\psi \in S$.

Достатність обґрунтовується аналогічно до необхідності з використанням властивостей опорної функції в зворотному порядку. Теорему доведено.

Приклад 3. *Знайдемо функцію керованості в умовах прикладу 1. Тоді*

$$Z(\psi) = p_0||\Theta^*(N)\psi|| + < a, \Theta^*(N)\psi > - p_N||\psi|| - < b, \psi > + \\ + \sum_{s=0}^{N-1} q(s)||C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi||, \psi \in \mathbb{R}^n.$$

З того, що $Z(\psi) \geqslant 0, \psi \in S$, випливає, що

$$p_0||\Theta^*(N)\psi|| + \sum_{s=0}^{N-1} q(s)||C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi|| \geqslant \\ \geqslant p_N + < b - \Theta(N)a, \psi >, \psi \in S.$$

Ця нерівність виконується, якщо

$$p_0\sqrt{\lambda_{min}\left(\Theta(N)\Theta^*(N)\right)} + \sum_{s=0}^{N-1} q(s)\sqrt{\lambda_{min}\left(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N)\right)} \\ \geqslant p_N + ||b - \Theta(N)a||.$$

Отже, якщо параметри задачі задовільняють наведеній оцінці, то система (1) буде керованою з множини M_0 на всю множину M_N при $0 \leqslant k \leqslant N$.

Висновки. В роботі обґрунтовано необхідні і достатні умови керованості для лінійних нестаціонарних дискретних систем у трьох випадках: з множини початкових станів на термінальну множину; зі всієї множини початкових умов на термінальну множину; з множини початкових умов на всю термінальну множину. Для кожного з них побудовано функції керованості та наведено приклади їх застосування.

1. **Katsuhiko Ogata.** Discrete-Time Control Systems / Katsuhiko Ogata – University of Minnesota, 1995. – 760 p.
2. **Krabs W.** Dynamical Systems: Stability, Controllability and Chaotic Behavior/ Krabs W., Pickl S.// Springer, 2010. - 249 p.

3. **Благодатских В. И.** Задача управляемости для линейных систем / В. И. Благодатских // Труды МИАН. – 1977. – Т. 143. – С. 57–67.

4. **Благодатских В. И.** Введение в оптимальное управление / В. И. Благодатских. – М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.

Пичкур В. В., Собчук В. В., Таирова М. С., Башняков А. Н.

Критерии управляемости из множества начальных состояний на терминальное множество для линейных дискретных систем

Резюме

В статье рассматриваются условия управляемости для линейных нестационарных дискретных систем из множества начальных состояний на терминальное множество. Введено определение трех видов управляемости: из множества в множество; со всего множества начальных условий на терминальное множество; из множества начальных условий на все терминальное множество. Для каждого из них построены функции управляемости, обоснованы необходимые и достаточные условия управляемости, а также приведены соответствующие примеры.

Ключевые слова: дискретные системы, управляемость, управление, функция управляемости .

Pichkur V. V., Sobchuk V. V., Tairova M. S., Bashnyakov O. M.

Linear discrete systems controllability from a set of initial states to a terminal set

Summary

In the article we consider controllability conditions from an initial set to a terminal set for a linear non-homogenous discrete system. We introduce three types of controllability: from an initial set to a terminal set; from a whole set of initial conditions to a terminal set; from a set of initial conditions to an entire terminal set. Necessary and sufficient conditions of controllability are proved using controllability function.

Key words: discrete systems, controllability, control, controllability function.

References

1. Katsuhiko Ogata (1995). *Discrete-Time Control Systems.* University of Minnesota, 760 p.

2. Krabs W. & Pickl S. (2010). *Dynamical Systems: Stability, Controllability and Chaotic Behavior*. Springer, 249 p.

3. Blagodatskikh V. I. (1977). Zadacha upravlyaemosti dlya lineynykh sistem [Controlability problem for linear systems]. *Trudy MIAN*, vol. 143, pp. 57–67.

4. Blagodatskikh V. I. (2001). *Vvedenie v optimalnoe upravlenie [Introoduction to Optimal Control].* Moscow, «Vysshaya shkola», 239 p.