Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 68–80

УДК 517.925

Л. И. Кусик
Одесский национальный морской университет

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для дифференциального уравнения второго порядка общего вида $y'' = f(t, y, y')$, где $f : [a, \omega[\times\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1} \longrightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, Δ_{Y_i} — односторонняя окрестность Y_i, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$ $(i \in \{0, 1\})$, изучается вопрос о наличии решений, для которых $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i$ $(i \in \{0, 1\})$. Среди множества таких решений выделяется достаточно широкий класс т. н. $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решений. Такого типа решения ранее вводились при изучении двучленного уравнения $y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')$, где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$–непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$ – непрерывные правильно меняющиеся при $z \to Y_i$ $(i = 0, 1)$ функции порядков σ_i $(i = 0, 1)$, причем $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. Случай, когда $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$, не рассмотрен даже на указанном двучленном дифференциальном уравнении. В данной работе установлено условие, при котором правая часть изучаемого уравнения в некотором смысле близка при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ и $t \uparrow \omega$, $y^{(i)} \to Y_i$ $(i = 0, 1)$ к произведению $\alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}$, где порядки σ_i $(i = 0, 1)$ нелинейностей таковы, что $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$ (к т.н. полулинейному дифференциальному уравнению). При выполнении этого условия найдены необходимые, а также достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, установлены асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка, указано количество параметрических семейств таких решений. Результат исследования продемонстрирован на одном классе уравнений, правая часть которого представляет отношение сумм слагаемых специального вида.

MSC: 34E99.
Ключевые слова: двучленное дифференциальное уравнение, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решение, асимптотические представления, условие (AL), одно-, двухпараметрическое семейство решений.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134619.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{1}$$

где $f : [a, \omega[\times\Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \longrightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$[1], Δ_{Y_i} $(i \in \{0, 1\})$ — односторонняя окрестность Y_i, Y_i $(i \in \{0, 1\})$ равно либо 0, либо $\pm\infty$.

В работах [1]– [3] рассматривались нелинейные двучленные дифференциальные уравнения, близкие к линейным (т. н. полулинейные дифференциальные уравнения, обладающие рядом свойств как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений). Так, в работе [1] уравнение (1) изучено в случае, когда $f(t, y, y') = p(t)|y|^{1-\lambda}|y'|^{\lambda}\mathrm{sgn}\ y$ при некоторых ограничениях на функцию

*Считаем, что $a > 1$ в случае $\omega = +\infty$, и $a > \omega - 1$- в случае $\omega < +\infty$.

Получена 24.04.2018

p. В частности, если функция $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ сохраняет знак, локально абсолютно непрерывна и

$$\int\limits_a^\omega p^{\frac{1}{2-\lambda}}(t)\,dt = +\infty, \qquad \lim_{t\to\omega} p'(t)p^{\frac{\lambda-3}{2-\lambda}}(t) = l_0 \qquad (|l_0| \leqslant +\infty),$$

в [1] найдены асимптотические представления при $t \to \omega$ всех типов правильных решений уравнения (1).

Здесь для уравнения общего вида (1) изучается вопрос существования и асимптотики (при $t\uparrow\omega$) $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решений.

Определение 1. *Решение y уравнения (1), заданное на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$, называется $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решением, где $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$, если для него соблюдаются условия*

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \qquad \text{при } t \in [t_0,\omega[\ , \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i=0,1), \tag{2}$$

$$y''(t) \neq 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0. \tag{3}$$

$P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решения в зависимости от значений λ_0 обладают разными асимптотическими свойствами. При этом возникают неособые случаи, когда $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, и особые — когда $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = \pm\infty$. Доказано (см., например, [4]), что при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ для $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решений имеют место асимптотические представления

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0-1}, \tag{4}$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

В работе [5] для каждого из возможных значений λ_0 рассматривался случай, когда на $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решениях

$$f(t,y(t),y'(t)) = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')(1+o(1)) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция, функции $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0,+\infty[$ $(i=0,1)$ — непрерывные правильно меняющиеся при $z \to Y_i$ $(i=0,1)$ функции порядков σ_i $(i=0,1)$, в предположении, что $\sigma_0+\sigma_1 \neq 1$, т.е. в случае, когда уравнение (1) в некотором смысле близко к уравнению с правильно меняющимися нелинейностями.

Целью настоящей статьи является исследование существования и поведения $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решений уравнения (1) при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ и когда уравнение (1) становится близким в некотором смысле к полулинейному двучленному.

Определение 2. *Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию (AL), если существуют число $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, непрерывная функция $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$, такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_i : [a, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}$ $(i = 0, 1)$, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \tag{5}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{z_1(t)}{z_0(t)}\right)'}{\frac{z_1(t)}{z_0(t)}} = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) z_0'(t)\, \ln|\pi_\omega(t)|}{z_0(t)\, \ln|z_0(t)|} = 1 \tag{6}$$

имеет место представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t)|z_0(t)|^{\sigma_0}|z_1(t)|^{\sigma_1}[1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{7}$$

где

$$\sigma_0 + \sigma_1 = 1.$$

Основные результаты. Для формулировки основного результата в предположении, что $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ и функция f удовлетворяет условию (AL), положим

$$I(t) = \int_a^t p(t)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\, d\tau.$$

Также введем числа

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_i = +\infty \quad \text{либо} \\ & Y_i = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_i} - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } Y_i = -\infty \quad \text{либо} \\ & Y_i = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_i} - \text{левая окрестность } 0 \end{cases} \qquad (i = 0, 1),$$

такие что,

$$\mu_0\mu_1 > 0 \quad \text{при} \quad Y_0 = \pm\infty \quad \text{и} \quad \mu_0\mu_1 < 0 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0. \tag{8}$$

Ясно, что μ_0 определяет знак любого $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения уравнения (1), μ_1 - его производной в некоторой левой окрестности ω. При этом следует отметить, что условия (8) являются необходимыми для существования у уравнения (1) решений, заданных на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяющих условиям (2). Кроме того, при выполнении условия (AL) знак второй производной любого $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения уравнения (1) в некоторой левой окрестности ω совпадает со значением α_0. Тогда с учетом (8), имеем

$$\alpha_0\mu_1 > 0 \quad \text{при} \quad Y_1 = \pm\infty \quad \text{и} \quad \alpha_0\mu_1 < 0 \quad \text{при} \quad Y_1 = 0. \tag{9}$$

Теорема. *Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ и функция f удовлетворяет условию (AL). Тогда для существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решений необходимо, а если $\lambda_0 + \sigma_0 \neq 0$, то и достаточно, чтобы наряду с неравенствами (8), (9) соблюдались условия*

$$\alpha_0 \mu_1 (\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0 \qquad \text{при} \quad t \in [a, \omega[, \tag{10}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)|\pi_\omega(t)|^{1+\sigma_0} = \frac{|\lambda_0|^{\sigma_0}}{|\lambda_0 - 1|^{1+\sigma_0}}. \tag{11}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1-\sigma_0}|\lambda_0 - 1|^{\sigma_0} I(t)[1 + o(1)], \tag{12}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0(1 + o(1))}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{13}$$

причем таких решений существует при $\alpha_0\mu_1(\sigma_0+\lambda_0) > 0$ двухпараметрическое семейство, при $\alpha_0\mu_1(\sigma_0 + \lambda_0) < 0$ — однопараметрическое семейство.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ и $y : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ - произвольное $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$ решение уравнения (1). Тогда существует число $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что $y^{(k)}(t) \neq 0$ $(k = 0, 1, 2)$, $\operatorname{sign} y^{(k)}(t) = \mu_k$ $(k = 0, 1)$ при $t \in [t_1, \omega[$. Кроме того, из определения $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$–решения для $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ непосредственно вытекает выполнение предельных равенств (5). Откуда, в частности, следует, что имеет место асимптотическое представление (13) и знаковое условие (10).

Так как y удовлетворяет условиям (5), то

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)'}{\frac{y'(t)}{y(t)}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{y''(t)}{y(t)} - \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2\right)}{\frac{y'(t)}{y(t)}} =$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} - \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} = -1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)\, ln|\pi_\omega(t)|}{y(t)\, ln|y(t)|} = 1,$$

следовательно, для $y(t)$, $y'(t)$ выполнены условия (5), (6) определения 2. Так как функция f удовлетворяет условию (AL) из уравнения (1) имеем,

$$y''(t) = \alpha_0 p(t)|y(t)|^{\sigma_0}|y'(t)|^{\sigma_1}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда с учетом условий (5) вытекает соотношение

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0\mu_0(\lambda_0 - 1)\left|\frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}\right|^{1-\sigma_0} p(t)\pi_\omega(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{14}$$

Интегрируя (14) на промежутке от a до t, получим

$$ln|y(t)| = const + \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1-\sigma_0}|\lambda_0 - 1|^{\sigma_0} \int\limits_a^t p(t)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}[1 + o(1)]\, d\tau.$$

В силу определения $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решения левая часть последнего равенства стремится к $\pm\infty$, откуда $I(t) \to +\infty$ при $t \uparrow \omega$ и имеет место представление (12). Также, домножая обе части (14) на $\pi_\omega(t)$ и учитывая (13), получим соотношение (11). Также из представлений (12), (13) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|} = \frac{\beta|\lambda_0|^{\sigma_0}}{|\lambda_0 - 1|^{\sigma_0+1}}, \quad \beta = sign\,\pi_\omega(t). \tag{15}$$

Достаточность. Пусть $\lambda_0 + \sigma_0 \neq 0$ и соблюдаются условия (8) – (11). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (1) имеет $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$– решения, допускающие представления (12), (13), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Применяя к дифференциальному уравнению (1) преобразование

$$\begin{gathered} \ln|y(t)| = \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1-\sigma_0}|\lambda_0 - 1|^{\sigma_0} I(t)[1 + v_1(\tau)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0[1 + v_2(\tau)]}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}, \quad \tau = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \quad \beta = sign\,\pi_\omega(t), \end{gathered} \tag{16}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1' = & \beta q(\tau)\left(-1 + \dfrac{1}{h(\tau)} - v_1 + \dfrac{v_2}{h(\tau)}\right), \\ v_2' = & \beta\left(G(\tau, v_1, v_2)g(\tau)|1 + v_2|^{\sigma_1} + \dfrac{1 + v_2 + \lambda_0 v_2 + \lambda_0 v_2^2}{\lambda_0 - 1}\right), \end{cases} \tag{17}$$

где

$$q(\tau) = q(\tau(t)) = \frac{I'(t)\pi_\omega(t)}{I(t)}, \quad h(\tau) = h(\tau(t)) = \beta|\lambda_0|^{-\sigma_0}|\lambda_0 - 1|^{1+\sigma_0} I'(t)\pi_\omega(t),$$

$$g(\tau) = \alpha_0\mu_1\beta\left|\frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\right|^{\sigma_0} p(t)|\pi_\omega(t)|^{1+\sigma_0},$$

$$G(\tau, v_1, v_2) = \frac{f\left(\tau, Y(\tau, v_1), Y^{[1]}(\tau, v_1, v_2)\right)}{\alpha_0 p(t)\,|Y(\tau, v_1)|^{\sigma_0}\left|Y^{[1]}(\tau, v_1, v_2)\right|^{\sigma_1}}$$

$$Y(\tau, v_1) = \mu_0 e^{\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1-\sigma_0}|\lambda_0-1|^{\sigma_0} I(t)[1+v_1(\tau)]},$$

$$Y^{[1]}(\tau, v_1, v_2) = \frac{\lambda_0 Y(\tau, v_1)[1 + v_2(\tau)]}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}.$$

Выберем произвольным образом $a_0 \in]a, \omega[$ и рассмотрим систему (17) на множестве $[\tau_0, +\infty[\times\mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}$, где $\tau_0 = \beta\ln|\pi_\omega(a_0)|$, $\mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : |v_i| \leqslant 1/2, i = 1, 2\}$. На этом множестве правые части системы непрерывны и имеют непрерывные частные производные по v_1, v_2.

Так как функция $\tau(t) = \beta\ln|\pi_\omega(t)|$ такая, что

$$\tau : [a_0, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[, \quad \tau'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a_0, \omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\tau(t) = +\infty,$$

то в силу (11)

$$\lim_{\tau\to+\infty} h(\tau) = \lim_{t\to\omega} h(\tau(t)) = 1, \quad \lim_{\tau\to+\infty} g(\tau) = \lim_{t\to\omega} g(\tau(t)) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \tag{18}$$

Заметим, что функция $q(\tau)$ сохраняет знак на $[\tau_0, +\infty)$, а именно $sign\ q(\tau) = \beta$ и

$$\int\limits_{\tau_0}^{+\infty} \beta q(\tau)\,d\tau = \int\limits_{a_0}^{\omega} \frac{I'(t)}{I(t)}\,dt = \ln(I(t))\,\Big|_{a_0}^{\omega} = +\infty.$$

Также из вида функций $Y(\tau, v_1)$, $Y^{[1]}(\tau, v_1, v_2)$ следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(\tau(t), v_1) = Y_0 \quad \text{равномерно по} \quad v_1 : |v_1| \leqslant 1/2, \tag{19}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y^{[1]}(\tau, v_1, v_2) = Y_1 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Так как

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{Y^{[1]}(\tau(t),v_1,v_2)}{Y(\tau(t),v_1)}\right)'_t}{\frac{Y^{[1]}(\tau(t),v_1,v_2)}{Y(\tau(t),v_1)}} = -1 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}$$

и с учетом (15)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\,(Y(\tau(t), v_1))'_t\,\ln|\pi_\omega(t)|}{Y(\tau(t), v_1)\,\ln|Y(\tau(t), v_1)|} = 1 \quad \text{равномерно по} \quad v_1 : |v_1| \leqslant 1/2,$$

то в силу определения 2 функция $G(\tau, v_1, v_2)$ может быть представлена в виде

$$G(\tau, v_1, v_2) = 1 + r(\tau, v_1, v_2), \tag{21}$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty} r(\tau, v_1, v_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая соотношения (18)–(21), систему (17) можем записать следующим образом

$$\begin{cases} v_1' = & f_1(\tau) + p_{11}(\tau)v_1 + p_{12}(\tau)v_2, \\ \\ v_2' = & f_2(\tau) + p_{22}(\tau)v_2 + V_1(\tau, v_1, v_2) + V_2(\tau, v_2), \end{cases} \tag{22}$$

где

$$f_1(\tau) = \beta q(\tau)\left(-1 + \frac{1}{h(\tau)}\right), \quad p_{11}(\tau) = -\beta q(\tau), \quad p_{12}(\tau) = \frac{\beta q(\tau)}{h(\tau)},$$

$$f_2(\tau) = \beta\left(g(\tau) - \frac{1}{\lambda_0 - 1}\right), \quad p_{22}(\tau) = \beta\left(\sigma_1 g(\tau) - \frac{1+\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right),$$

$$V_1(\tau, v_1, v_2) = \beta g(\tau) r(\tau, v_1, v_2)\,(1 + v_2)^{\sigma_1},$$

$$V_2(\tau, v_2) = \beta\left(g(\tau)((1 + v_2)^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 v_2) - \frac{\lambda_0 v_2^2}{(\lambda_0) - 1}\right).$$

В силу (18)–(21) справедливы соотношения

$$\lim_{\tau\to+\infty} V_1(\tau, v_1, v_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{\partial V_2(\tau, v_2)}{\partial v_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad \text{равномерно по} \quad \tau \in [\tau_0, +\infty).$$

Кроме того, при $\lambda_0 + \sigma_0 \neq 0$

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{f_i(\tau)}{p_{ii}(\tau)} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{p_{22}(\tau)} = \frac{1-\lambda_0}{\sigma_0+\lambda_0}, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{12}(\tau)}{p_{11}(\tau)} = -1,$$
$$\int_{\tau_0}^{+\infty} |p_{ii}(\tau)|\, d\tau = +\infty \quad (i = 1, 2).$$

Таким образом, для системы (22) выполнены условия леммы 2.2 из работы [6]. Поэтому у этой системы дифференциальных уравнений существует хотя бы одно решение $(v_1, v_2) : [\tau_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}$ $(\tau_1 \geqslant a_0)$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$. Каждому такому решению в силу преобразования (16) соответствует решение y дифференциального уравнения (1), допускающее асимптотические представления (12), (13). Покажем, что указанное решение является $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением. Так как функция f удовлетворяет условию (AL), то с учетом равенства (11), представления (13) из уравнения (1) получим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

Количество решений системы (22) при $\lambda_0 + \sigma_0 \neq 0$ легко найти на основании леммы 2.2 работы [6] по числу отрицательных среди функций $-\beta q(\tau)$, $\beta\left(\sigma_1 g(\tau) - \dfrac{1+\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right)$. Так как

$$sign\,(-\beta q(t)) = -1, \quad \lim_{\tau\to+\infty} g(t) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \quad sign\,(\beta(\lambda_0 - 1)) = \alpha_0\mu_1,$$

то при $\beta(\lambda_0 - 1)(-\sigma_0 - \lambda_0) < 0$ существует двухпараметрическое семейство решений системы (22), стремящихся к нулю при $\tau \to +\infty$. Если же $\beta(\lambda_0 - 1)(-\sigma_0 - \lambda_0) > 0$, система (22) имеет однопараметрическое семейство решений, исчезающих в бесконечности.

Теорема полностью доказана.

Пример. *Результаты исследования охватывают не только полулинейные, но и некоторые уравнения, содержащие медленно меняющиеся функции относительно неизвестной функции и ее производной. Например, рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$y'' = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)|y|^{\sigma_{k0}}|y'|^{\sigma_{k1}}|\ln|y||^{\nu_{k0}}|\ln|y'||^{\nu_{k1}}}{\sum\limits_{k=m+1}^{m+n} \alpha_k p_k(t)|y|^{\sigma_{k0}}|y'|^{\sigma_{k1}}|\ln|y||^{\nu_{k0}}|\ln|y'||^{\nu_{k1}}}\,, \tag{23}$$

где $\alpha_k \in \{-1,1\}$ $(k=\overline{1,m+n})$, $p_k : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $(k=\overline{1,m+n})$ *— непрерывные функции и, как известно,* $|\ln|z||^k$ *— медленно меняющиеся при* $z \to Y_i$, $z \in \Delta_{Y_i}(i=0,1)$ *— непрерывные функции.*

Допустим, что $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ *и для некоторых* $i \in \{1,\ldots,m\}$ *и* $j \in \{m+1,\ldots,m+n\}$ *соблюдаются неравенства*

$$\begin{gathered}\limsup_{t\uparrow\omega}\left[\tfrac{\ln p_k(t)-\ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right] < \tfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left[\lambda_0(\sigma_{i0}-\sigma_{k0})+\sigma_{i1}-\sigma_{k1}\right]\\ \text{при}\quad k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\},\\ \limsup_{t\uparrow\omega}\left[\tfrac{\ln p_k(t)-\ln p_j(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right] < \tfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left[\lambda_0(\sigma_{j0}-\sigma_{k0})+\sigma_{j1}-\sigma_{k1}\right]\\ \text{при}\quad k\in\{m+1,\ldots,m+n\}\setminus\{j\},\end{gathered}\tag{24}$$

где

$$\operatorname{sign}\pi_\omega(t)=\beta.$$

Покажем, что в этом случае для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_s : [a,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_s}$ $(s=0,1)$, *удовлетворяющих условиям (5) и*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_0'(t)}{z_0(t)}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1},\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_1'(t)}{z_1(t)}=\frac{1}{\lambda_0-1},\tag{25}$$

справедливы предельные равенства

$$\begin{gathered}\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{p_i(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{i0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{i1}}}=0\\ \text{при}\quad k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\}\end{gathered}\tag{26}$$

$$\begin{gathered}\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{p_j(t)|z_0(t)|^{\sigma_{j0}}|z_1(t)|^{\sigma_{j1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{j0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{j1}}}=0\\ \text{при}\quad k\in\{m+1,\ldots,m+n\}\setminus\{j\}.\end{gathered}\tag{27}$$

Полагая при $i\in\{1,\ldots,m\}$

$$R_k(t)=\frac{p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{p_i(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{i0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{i1}}}\quad k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\},$$

докажем, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega}R_k(t)=0$. *Учитывая (5), (25) при* $t\uparrow\omega$ *имеем*

$$|z_0(t)|=|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+o(1)},\quad |z_1(t)|=|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+o(1)},$$

поэтому в силу правила Лопиталя справедливо равенство

$$\ln\left(|z_s(t)|^{\sigma_{ks}}|\ln|z_s(t)||^{\nu_{ks}}\right)=\ln|z_s(t)|\left(\sigma_{ks}+\tfrac{\ln|\ln|z_s(t)||^{\nu_{ks}}}{\ln|z_s(t)|}\right)=\ln|z_s(t)|\left(\sigma_{ks}+o(1)\right)=$$

$$=\begin{cases}\ln|\pi_\omega(t)|\left(\frac{\sigma_{k0}\lambda_0}{\lambda_0-1}+o(1)\right), & \text{если}\quad s=0,\\ \ln|\pi_\omega(t)|\left(\frac{\sigma_{k1}}{\lambda_0-1}+o(1)\right), & \text{если}\quad s=1\end{cases}\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Следовательно,

$$\ln R_k(t) = \ln\frac{p_k(t)}{p_i(t)} + \frac{\ln|\pi_\omega(t)|}{\lambda_0 - 1}\left((\sigma_{k0}-\sigma_{i0})\lambda_0 + \sigma_{k1} - \sigma_{i1} + o(1)\right) =$$

$$= \beta\ln|\pi_\omega(t)|\left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||} + \frac{\beta}{\lambda_0 - 1}\left((\sigma_{k0}-\sigma_{i0})\,\lambda_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sigma_{k1} - \sigma_{i1}\right) + o(1)\right].$$

Теперь, зная, что $\operatorname{sign}\pi_\omega(t) = \beta$ *и выполняются первые из неравенств (24), приходим к выводу, что выражение в квадратных скобках отрицательно, т.е.* $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\ln R_k(t) = -\infty$, *откуда вытекает* $\lim\limits_{t\uparrow\omega} R_k(t) = 0$. *Это означает, что соблюдается предельное соотношение (26).*

Используя второе из соотношений (24), аналогичным образом устанавливается справедливость предельного соотношения (27).

В силу установленных предельных соотношений (26) и (27) в случае $\sigma_{i0} - \sigma_{j0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j1} = 1$ *функция*

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\alpha_k p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}$$

удовлетворяет условию (AL), *поскольку для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_s : [a,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_s}$ $(s = 0,1)$, *удовлетворяющих условиям (5) и (25), следует справедливость условий (6) и соотношения*

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \frac{\alpha_i p_i(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{i0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{i1}}}{\alpha_j p_j(t)|z_0(t)|^{\sigma_{j0}}|z_1(t)|^{\sigma_{j1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{j0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{j1}}}\times$$

$$\times\frac{1 + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\dfrac{\alpha_k p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{\alpha_i p_i(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{i0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{i1}}}}{1 + \sum\limits_{\substack{k=m+1\\k\neq j}}^{m}\dfrac{\alpha_k p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{\alpha_j p_j(t)|z_0(t)|^{\sigma_{j0}}|z_1(t)|^{\sigma_{j1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{j0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{j1}}}} =$$

$$= \frac{\alpha_i p_i(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{i0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{i1}}}{\alpha_j p_j(t)|z_0(t)|^{\sigma_{j0}}|z_1(t)|^{\sigma_{j1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{j0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{j1}}}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Таким образом, имеет место представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}-\sigma_{j1}}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

где

$$\alpha_0 = \alpha_i\alpha_j, \quad p(t) = \frac{|\lambda_0|^{\nu_{i0}-\nu_{j0}}}{|\lambda_0 - 1|^{\nu_{i0}+\nu_{i1}-\nu_{j0}-\nu_{j1}}}\frac{p_i(t)}{p_j(t)}|\ln|\pi_\omega(t)||^{\nu_{i0}+\nu_{i1}-\nu_{j0}-\nu_{j1}}.$$

Поэтому при $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}=1$ к уравнению (23) применима доказанная выше теорема, где вместо I будем понимать

$$I_{ij}(t)=\frac{|\lambda_0|^{\nu_{i0}-\nu_{j0}}}{|\lambda_0-1|^{\nu_{i0}+\nu_{i1}-\nu_{j0}-\nu_{j1}}}\int\limits_a^t\frac{p_i(\tau)}{p_j(\tau)}|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}}|\ln|\pi_\omega(\tau)||^{\nu_{i0}+\nu_{i1}-\nu_{j0}-\nu_{j1}}\,d\tau.$$

Следствие. *Пусть $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, для некоторых $i\in\{1,\dots,m\}$ и $j\in\{m+1,\dots,m+n\}$ выполнено равенство $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}=1$ и условия (24). Тогда для существования у дифференциального уравнения (23) $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решений необходимо, а если $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\lambda_0\neq 0$, то и достаточно, чтобы наряду с неравенствами (8), (9) соблюдались условия*

$$\alpha_0\mu_1\beta(\lambda_0-1)>0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)}{p_j(t)}|\ln|\pi_\omega(t)||^{\nu_{i0}+\nu_{i1}-\nu_{j0}-\nu_{j1}}|\pi_\omega(t)|^{1+\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}=$$
$$=\frac{|\lambda_0|^{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}-\nu_{i0}+\nu_{j0}}}{|\lambda_0-1|^{1+\sigma_{i0}-\sigma_{j0}-\nu_{i0}-\nu_{i1}+\nu_{j0}+\nu_{j1}}}.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)|=\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}}|\lambda_0-1|^{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}}I_{ij}(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{\lambda_0(1+o(1))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

причем таких решений существует при $\alpha_0\mu_1(\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\lambda_0)>0$ двухпараметрическое семейство, а при $\alpha_0\mu_1(\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\lambda_0)<0$ – однопараметрическое семейство.

Замечание. *Асимптотическое поведение $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решений уравнения (23) в случае $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}\neq 1$ можно получить из следствия 2.3 работы [5].*

Заключение. Для дифференциального уравнения второго порядка общего вида $y''=f(t,y,y')$, где $f:[a,\omega[\times\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}\longrightarrow\mathbf{R}$ – непрерывная функция, $-\infty<a<\omega\leqslant+\infty$, Δ_{Y_i} — односторонняя окрестность Y_i, $Y_i\in\{0,\pm\infty\}$ $(i\in\{0,1\})$ изучен вопрос о наличии решений, для которых $\lim\limits_{t\uparrow\omega}y^{(i)}(t)=Y_i$ $(i\in\{0,1\})$. Среди множества таких решений выделяется достаточно широкий класс т. н. $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решений. Такого типа решения ранее вводились при изучении двучленного уравнения $y''=\alpha_0p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')$, где $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $p:[a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$– непрерывная функция, $\varphi_i:\Delta_{Y_i}\longrightarrow]0,+\infty[$ $(i=0,1)$ – непрерывные правильно меняющиеся при $z\to Y_i$ $(i=0,1)$ функции порядков σ_i $(i=0,1)$, причем $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$. Случай, когда $\sigma_0+\sigma_1=1$, не рассмотрен даже на указанном двучленном дифференциальном уравнении. В данной работе установлено условие, при котором правая часть изучаемого уравнения в некотором смысле близка при

$\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ и $t \uparrow \omega$, $y^{(i)} \to Y_i$ $(i=0,1)$ к произведению $\alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}$, где порядки σ_i $(i=0,1)$ нелинейностей таковы, что $\sigma_0+\sigma_1=1$ (к т.н. полулинейному дифференциальному уравнению). При выполнении этого условия найдены необходимые, а также достаточные условия существования $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решений, установлены асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка, указано количество параметрических семейств таких решений. Результат исследования продемонстрирован на одном классе уравнений, правая часть которого представляет отношение сумм слагаемых специального вида.

1. **Евтухов В.М.** Асимптотика решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка / В. М. Евтухов // Дифференц. уравнения – 1990. – Т. 26., № 5. – С. 776–787.
2. **Евтухов В.М.** Асимптотика решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, асимптотически близких к линейным / В. М. Евтухов // УМЖ. – 2012. – Т. 64, № 10.– С. 1346–1364.
3. **Муса Джабер Абу эль-шаур.** Асимптотика решений неавтономных обыкновенных дифференциальных второго порядка, близких к линейным / Муса Джабер Абу эль-шаур // Нелинейные колебания. – 2008. – 11, № 2. С. 230 – 241.
4. **Евтухов В.М.** Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена—Фаулера: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Евтухов Вячеслав Михайлович. – Одесса, 1980. – 154 с.
5. **Кусик Л.И.** Асимптотические представления решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка: дис. ... кан. физ.- мат. наук: 01.01.02 / Кусик Людмила Игоревна. – Одесса, 2016. – 145 с.
6. **Евтухов В.М.** Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В. М. Евтухов, Л. И. Кусик // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – 14, вип. 20. – С. 57–74.

Кусік Л. І.

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Резюме

Для диференціального рівняння другого порядку загального виду $y''=f(t,y,y')$, де $f:[a,\omega[\times\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}\longrightarrow \mathbf{R}$ — неперервна функція, $-\infty<a<\omega\leqslant+\infty$, Δ_{Y_i} — односторонній окіл Y_i, $Y_i\in\{0,\pm\infty\}$ $(i\in\{0,1\})$, розглянуто питання існування розв'язків, для яких $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t)=Y_i$ $(i\in\{0,1\})$. Серед множини таких розв'язків відокремлюємо достатньо широкий клас т. з. $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- розв'язків. Такого типу розв'язки раніше було уведено при вивченні двочленного рівняння $y''=\alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')$, де $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $p:[a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ —неперервна функція, $\varphi_i:\Delta_{Y_i}\longrightarrow]0,+\infty[$ $(i=0,1)$ — неперервні правильно змінні при $z\to Y_i$ $(i=0,1)$ функції порядків σ_i $(i=0,1)$, причому $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$. Випадок, коли $\sigma_0+\sigma_1=1$ не є розглянутим навіть на вказанному двочленному диференціальному рівнянні. У даній роботі встановлено умову, за якою права частина вивчаємого рівняння в деякому сенсі є близькою при $\lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ та $t\uparrow\omega$, $y^{(i)}\to Y_i$ $(i=0,1)$ до добутку $\alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}$, де порядки σ_i $(i=0,1)$ нелінійностей такі, що $\sigma_0+\sigma_1=1$ (до т.з. полулінейного диференціального рівняня). При виконанні цієї

умови знайдено необхідні, а також достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків, встановлено асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних першого порядку, вказано кількість параметричних сімей таких розв'язків. Результат дослідження продемонстровано на одному класі рівнянь, права частина якого є відношенням сум доданків спеціального вигляду.
Ключові слова: двочленне диференціальне рівняння, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язок, асимптотичні зображення, умова (AL), одно-, двопараметрична сім'я розв'язків .

Kusick L. I.
ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF A ONE DIFFERENTIAL EQUATIONS CLASS' SOLUTIONS

Summary

For the second-order differential equation of general form $y'' = f(t, y, y')$, where $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \longrightarrow \mathbf{R}$ is continuous function, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, Δ_{Y_i} is a one-neighborhood of Y_i, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$ $(i \in \{0, 1\})$ we study the question of the existence solutions, for witch $\lim\limits_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i$ $(i \in \{0, 1\})$. Among the set of such solutions we separate a sufficiently wide class of so-called $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solutions. Such a solution was previously introduced in the study of the two-term equation $y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')$, where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ is continuous function, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$ are continuous functions of orders σ_i $(i = 0, 1)$ regular varying as $z \to Y_i$ $(i = 0, 1)$ such that $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. The case $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$ is not considered even on the indicate two-term equation. In this paper a condition under which the right-hand side of the equation as $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ and $t \uparrow \omega$, $y^{(i)} \to Y_i$ $(i = 0, 1)$ in some sense close to the multiplication $\alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}$, where orders σ_i $(i = 0, 1)$ of nonlinearities so that $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$ (to so called semilinear differential equation) is established. We give necessary and sufficient conditions of existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solutions, asymptotic representations of these solutions and their first-order derivative and number of parametric family of these solutions. The result of the study is demonstrated on a class of equations whose right-hand side is the ratio of sums of a special type.
Key words: two-term equation, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solutions, asymptotic representations of solutions, the (AL)-condition, one-, two-parameter family of solutions.

REFERENCES

1. Evtukhov V. M.(1990) *Asimptotika resheniy odnogo polylineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka [The asymptotics of the solutions of one semilinear second-order differential equation]. Differentsial'nye Uravneniya*, – 1990. – Vol. 26., № 5. – P. 776–787.

2. Evtukhov V. M. (2012). *Asimptotika resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka, asimptoticheski blizkikh k lineynym [Asymptotics of solutions of second-order non-autonomous ordinary differential equations asymptotically close to linear]. UMG*, Vol. 64, No. 10, P. 1346–1364.

3. Mousa Jaber Abu Elshour. *Asimptotika resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka, blizkikh k lineynym [Asymptotics of solutions of second-order non-autonomous ordinary differential equations close to linear]. Nelineynyye kolebaniya, Nonlinear oscillations*, – 2008. – 11, № 2. P. 230–241.

4. Evtukhov V. M.(1980). *Asimptoticheskoye povedeniye resheniy odnogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka tipa Emdena - Faulera [The asymptotic behavior of the solutions of one nonlinear second-order differential equation of the Emden–Fowler type]. dis.... cand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02 / Evtukhov Vyacheslav Mikhailovich*. Odessa, 154 p.

5. Kusick L.I.(2016). *Asimptoticheskiye predstavleniya resheniy nelineynykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka [Asymptotic representations of solutions of second-order nonlinear differential equations] dis.... cand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02/ Kusick Lyudmila Igorevna*. Odessa, 145 p.

6. Evtukhov V. M. & Kusick L. I.(2009). *Asimptoticheskiye predstavleniya resheniy odnogo klassa nelineynykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka [Asymptotic representations of solutions a class of non-linear differential equations of the second order]. Visn. Odes'k. nats. un-tu. Matem. i mekh*, 14, vyp. 20, P. 57–74.