Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 52–67

УДК 517.97

О. Д. Кічмаренко, А. А. Плотніков
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННОЮ РОЗМІРНІСТЮ

Стаття присвячена дослідженню лінійної керованої системи змінної розмірності. Розглядається задача оптимального керування декількома об'єктами з послідовним у часі режимом їх роботи. Початковий стан кожного наступного об'єкта залежить від кінцевого стану попереднього, що об'єднує їх в єдину систему змінної розмірності. Передбачається, що кожен об'єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь на інтервалі його дії. При цьому довжини інтервалів задані або невідомі. Системи рівнянь можуть мати неоднакову розмірність, можуть змінюватися також розмірність функції керування і обмеження на її значення. Така система зводиться до імпульсної лінійної системи, яка містить керування і завдяки цьому з'ясовуються властивості розв'язків системи та знаходяться самі розв'язки. Також в роботі розглянуто задачу Майєра і отримано необхідні і достатні умови оптимальності. Отримані результати ілюструються модельними прикладами.
MSC: 49N05, 49N25.
Ключові слова: лінійна система, оптимальне керування, змінна розмірність, задача Майєра, диференціальне рівняння, імпульсна система .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134618.

Вступ. Розглянемо задачу оптимального керування декількома об'єктами з послідовним у часі режимом їх роботи. Початковий стан кожного наступного об'єкта залежить від кінцевого стану попереднього, що об'єднує їх в єдину систему змінної розмірності. Передбачається, що кожен об'єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь на інтервалі його дії. При цьому довжини інтервалів задані або невідомі. Системи рівнянь можуть мати неоднакову розмірність, можуть змінюватися також розмірність функції керування і обмеження на її значення. Такі системи розглядаються в математичній теорії оптимального керування і мають різні назви: задача оптимізації зі зміною фазового простору — В. Г. Болтянський [17], І. С. Максимова, В. М. Розова [2], ступеневі системи — В. О. Мєдвєдев, В. М. Розова [3], В. М. Розова [4], Г. К. Захаров [5], Ш. Ф. Магеррамов, К. Б. Мансімов [6], системи зі змінною структурою — М. С. Нікольський [7, 8], Т. А. Тадумадзе, Н. М. Авалішвілі [9], Г. Л. Харатішвілі [10], з поетапно змінною динамікою — В. Р. Барсегян [7], Є. Л. Єрьомін [12], складені системи — В. В. Веліченко, Л. Т. Ащепков [6], системи змінної розмірності — О. Д. Кічмаренко, А. А. Плотніков [15–20]. [20], О. М. Кирилова [21], Є. Л. Єрьоміна [12], розглянуто застосування даних систем в економіці, екології, робототехніці, авіабудуванні, електроенергетиці, технічних і хімічних системах тощо. Також до таких систем зводяться керовані процеси виникнення і розвитку об'єктів, диференційованих по моменту створення — О. В. Романенко, О. В. Федосеєв [22], керовані гібридні системи — P. I. Barton, Ch. K. Lee [23], W. M. Haddad, V. S. Chellaboina, S. G. Nersesov [24].

Надійшла 15.01.2018

У цій статті на відміну від вище названих лінійна керована система змінної розмірності зводиться до імпульсної лінійної системи, яка містить керування і завдяки цьому з'ясовуються властивості розв'язків системи та знаходяться самі розв'язки. Також в роботі розглянуто задачу Майєра і отримано необхідні і достатні умови оптимальності. Отримані результати ілюструються модельними прикладами.

Основні результати

1. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі змінною розмірністю. Нехай $\theta > 0$ є довільне дійсне число. Позначимо через Σ_θ множину функцій $n(\cdot) : R_+ \to N$, які відповідають наступним умовам:

1) $n(\cdot)$ – кусочно-постійні і кусочно-неперервні справа;

2) якщо $n(t-0) - n(t) \neq 0$, то $n(\tau) - n(t) = 0$ для всіх $\tau \in [t,\ t+\theta]$.

Візьмемо довільну функцію $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$.

Означення 1. *Вектор-функцію $x(\cdot)$ назвемо вектор-функцією зі змінною розмірністю, якщо $x(t) \in R^{n(t)}$ для всіх $t \geqslant 0$.*

Тобто в кожен момент часу $t \in R_+$ значення вектор-функції $x(t)$ належить евклідовому простору $R^{n(t)}$. Очевидно, що піввісь R_+ можна розбити не більше ніж на злічену кількість проміжків $I_i = [t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, ...,$ таких, що $R_+ = \bigcup_i I_i$ та $I_i \bigcap I_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$, де $n(t) - n(t_i) = 0$ для всіх $t \in I_i$. Отже, на кожному проміжку I_i вектор-функція $x(\cdot)$ матиме значення однакової розмірності, тобто $x : I_i \to R^{n(t_i)}$.

Позначимо через Φ_n множину матрично-значних функцій $M(n(t)) = (m_{ij})_{i=1,j=1}^{n(t),n(t-0)}$, яка відповідає функції $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ та належить деякій множині матриць $M = \{(m_{ij})_{i=1,j=1}^{k,l}\}_{k=1,l=1}^{\infty,\infty}$.

Візьмемо довільну матрично-значну функцію $M(\cdot) \in \Phi_n$.

Тобто в кожній точці $t_i \in R_+$, такій, що $n(t_i) - n(t_i - 0) \neq 0$, відбувається зміна розмірності простору. Тому будемо вважати, що в цих точках значення вектор-функції $x(t_i)$ задовольняють умову:

$$x(t_i) = M(n(t_i))x(t_i - 0),$$

де матриця $M(n(t_i)) = (m_{kj}(t))_{k=1,j=1}^{n(t_i),n(t_i-0)}$ пов'язує вектори різних розмірностей.

Розглянемо на сегменті $I = [0, T]$ наступну систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + f_i(t),\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ x_0(0) = \overline{x}_0,\ i = 0, 1, 2, ..., m, \tag{1}$$

$$x_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0),\ \ i = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

де функція $n(\cdot)$ визначає розмір системи в кожен момент часу $t \in [0, T]$, $x_i(t) \in R^{n(\tau_i)}$, $\tau_i \in (0, T)$ – фіксовані моменти часу ($\tau_i < \tau_{i+1}$), такі, що $n(\tau_i - 0) \neq n(\tau_i)$, $A_i(t)$:$[\tau_i, \tau_{i+1}) \to R^{n(\tau_i)\times n(\tau_i)}$ – матрично-значна функція, $f_i : [\tau_i, \tau_{i+1}) \to R^{n(\tau_i)}$ вектор-функція, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{m+1} = T < \infty$.

Зауваження 1. *Система* (1), (2) *має вигляд, як система диференціальних рівнянь з імпульсами у фіксовані моменти часу, але при кожному «імпульсі» розмірність системи* (1), (2) *змінюється. Тобто:*

при $i = 0$ *на проміжку* $[\tau_0, \tau_1)$ *система буде мати розмірність* $n(\tau_0)$ *і відповідний розв'язок* $x_0(\cdot)$, *який є абсолютно неперервною вектор-функцією, що задовольняє рівняння* $\dot{x}_0 = A_0(t)x_0 + f_0(t)$ *майже для всіх* $t \in [\tau_0, \tau_1)$ *та* $x_0(0) = \bar{x}_0$;

при $t = \tau_1$ *система змінить розмірність на* $n(\tau_1)$ *і* $x_1(\tau_1) = M(n(\tau_1))x_0(\tau_1 - 0) \in R^{n(\tau_1)}$;

при $i = 1$ *на проміжку* $[\tau_1, \tau_2)$ *система буде мати розмірність* $n(\tau_1)$ *і відповідний розв'язок* $x_1(\cdot)$, *який є абсолютно неперервною вектор-функцією, що задовольняє рівняння* $\dot{x}_1 = A_1(t)x_1 + f_1(t)$ *майже для всіх* $t \in [\tau_0, \tau_1)$ *з початковим станом* $x_1(\tau_1)$;

і так далі до останнього сегмента $[\tau_m, \tau_{m+1}]$.

Тобто на кожному проміжку $[\tau_i, \tau_{i+1})$ *розв'язок* $x_i(\cdot)$ *буде мати відповідну розмірність. Таким чином, на всьому сегменті* I *будемо мати розв'язок* $x : I \to R^{n(t)}$ *системи* (1), (2) *як вектор-функцію зі змінною розмірністю.*

Означення 2. *Вектор-функцію зі змінною розмірністю* $x : I \to R^{n(t)}$ *будемо називати розв'язком системи* (1), (2) *на сегменті* $I = [0, T]$, *якщо вона абсолютно неперервна і задовольняє систему* (1) *майже всюди на інтервалах, які не містять точок* τ_i, *та задовольняє умову* (2) *для всіх* $t = \tau_i,\ i = 1, 2, ..., m$.

Приклад 1. *Розглянемо наступну систему лінійних диференціальних рівнянь:*

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + f_i(t),\ \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ \ x_0(0) = 1,\ \ i = \overline{0, 2}, \tag{3}$$

$$x_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0),\ \ i = 1, 2, \tag{4}$$

де $n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 2, & t \in [\pi, 2\pi) \\ 1 & t \in [2\pi, 3\pi] \end{cases}$, $t \in [0, 3\pi]$, $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \pi$, $\tau_2 = 2\pi$, $\tau_3 = 3\pi$,

$$A_0(t) = -\cos(t),\ \ A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ A_2(t) = 1,$$

$$f_0(t) = 0,\ \ f_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},\ \ f_2(t) = -\sin(t),$$

$$M(n(\tau_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T,\ \ M(n(\tau_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо на кожному проміжку послідовно відповідну систему диференціальних рівнянь. Очевидно, що на кожному проміжку вектор-функція, яка є розв'язком відповідної системи, буде мати відповідну розмірність. Тобто

1. *Для* $t \in [0, \pi)$ *отримаємо диференціальне рівняння:*

$$\dot{x}_0(t) = -\cos(t)x_0(t),\ \ \ x_0(0) = 1$$

і розв'язок $x_0(t) = e^{-\sin(t)}$ *розмірності 1.*

2. *Для* $t \in [\pi, 2\pi)$*. Так як* $x_0(\pi - 0) = 1$*, то* $x_1(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_0(\pi - 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *та отримаємо систему диференціальних рівнянь:*

$$\begin{matrix} \dot{x}(t) = y(t) + \cos(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + \sin(t) \end{matrix}, x_1(\pi) = \begin{pmatrix} x(\pi) \\ y(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

і розв'язок $x_1(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) + \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ *розмірності 2.*

3. *Для* $t \in [2\pi, 3\pi]$*. Так як* $x_1(2\pi - 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$*, то* $x_2(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_1(2\pi - 0) = -1$ *та отримаємо диференціальне рівняння:*

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) - \sin(t), x_2(2\pi) = -1$$

і розв'язок $x_2(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{3}{2e^{2\pi}}e^t$ *розмірності 1.*

Тому під розв'язком всієї системи на проміжку $[0, 3\pi]$ *будемо вважати вектор-функцію зі змінною розмірністю* $x : [0, 3\pi] \to R^{n(t)}$*, яка на кожному відповідному проміжку збігається з відповідним розв'язком системи диференціальних рівнянь* (3),(4).

Очевидно, що якщо розглянути об'єднану траєкторію отриманої вектор-функції зі змінною розмірністю $x : [0, 3\pi] \to R^{n(t)}$ *у просторі* $tOxy$ *і вважати, що на проміжках* $[0, \pi)$ *і* $[2\pi, 3\pi]$ *друга координата* y *дорівнює 0, то ми отримаємо неперервну траєкторію (дивись рис. 1.).*

Але якщо змінити матриці $M(n(\tau_1))$ *та* $M(n(\tau_2))$*, то траєкторія може мати розриви при* $\tau_i = i\pi,\ i = 1, 2$*. Наприклад, якщо* $M(n(\pi)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ *і* $M(n(\pi)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$*, то отримаємо розв'язок*

$$x_0(t) = e^{-\sin(t)},\ t \in [0, \pi);$$

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix},\ t \in [\pi, 2\pi);$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2e^{2\pi}}e^t,\ \ t \in [2\pi, 3\pi],$$

графік якого у просторі $tOxy$ *зображено на рис. 2.*

На прикладі системи (3), (4) розглянемо два способи переходу від системи зі змінною розмірністю до системи постійної розмірності.

Спосіб 1. Легко бачити, що систему (3),(4) можна переписати у вигляді

$$\dot{x} = N(n(t))A(t)x + N(n(t))f(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{5}$$

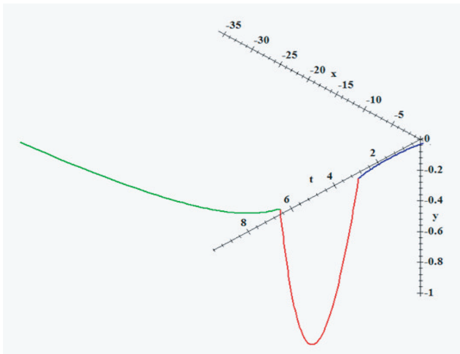

Рис. 1. Неперервна траєкторія розв'язку системи (3), (4)

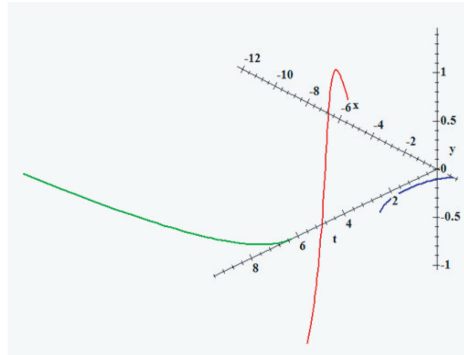

Рис. 2. Розривна траєкторія розв'язку системи (3), (4)

$$x(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ x(\tau_i)=M(n(\tau_i))x(\tau_i-0),\ i=1,2, \tag{6}$$

де $x\in R^2$,

$$N(n(t))=\begin{cases}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, & t\in[0,\pi)\\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, & t\in[\pi,2\pi)\\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, & t\in[2\pi,3\pi]\end{cases}\qquad A(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}-\cos(t)&0\\0&0\end{pmatrix}, & t\in[0,\pi)\\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, & t\in[\pi,2\pi)\\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, & t\in[2\pi,3\pi]\end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, & t\in[0,\pi)\\ \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}, & t\in[\pi,2\pi)\\ \begin{pmatrix}-\sin(t)\\0\end{pmatrix}, & t\in[2\pi,3\pi]\end{cases}\qquad M(n(t))=\begin{cases}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, & t=\pi\\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, & t=2\pi\end{cases}$$

Очевидно, що система (5), (6) є імпульсною системою постійної розмірності ($n=2$).

Якщо ми знайдемо розв'язок цієї системи $x(t)=(x_1(t),x_2(t))^T$, то $x_1(t)$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[0,\pi)$, $(x_1(t),x_2(t))^T$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[\pi,2\pi)$, $x_1(t)$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[2\pi,3\pi]$.

Спосіб 2. Також систему (3), (4) можна в інший спосіб представити у вигляді системи диференціальних рівнянь постійної розмірності:

$$\dot{x} = N(n(t))A(t)x + N(n(t))f(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{7}$$

$$x(0) = (1,0,0,0,0)^T, \ x(\tau_i) = M(n(\tau_i))x(\tau_i - 0), \ i = 1,2, \tag{8}$$

де $x \in R^4$, $N(n(t)) : [0,3\pi] \to R^{4\times4}$, $A(t) : [0,3\pi] \to R^{4\times4}$, $M(n(t)) : [0,3\pi] \to R^{4\times4}$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix},$$

$$M(n(t)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \pi \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t = 2\pi \end{cases} \qquad N(n(t)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in [0,\pi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in [\pi, 2\pi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in [2\pi, 3\pi] \end{cases}$$

Система (7), (8) буде мати постійну розмірність, яка дорівнює сумі розмірностей на всіх проміжках, тобто $n = 1 + 2 + 1 = 4$.

Якщо ми знайдемо розв'язок цієї системи $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_4(t))^T$, то $x_1(t)$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[0,\pi)$, $(x_2(t), x_3(t))^T$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[\pi, 2\pi)$, $x_4(t)$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[2\pi, 3\pi]$.

Зрозуміло, що другий спосіб переходу від системи зі змінною розмірністю до системи постійної розмірності є менш привабливим, оскільки при великій кількості переключень система (7), (8) буде мати величезну розмірність $n = \sum_{i=0}^{m} n(\tau_i)$. Тому в подальшому при дослідженні систем зі змінною розмірністю будемо використовувати перший спосіб переходу до імпульсної системи постійної розмірності.

2. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі змінною розмірністю, які містять керування. Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь, які містять керування

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + B_i(t)u, \ \ t \neq \tau_i, \ \ x_0(0) = \overline{x}_0, \ \ i = \overline{0,m}, \tag{9}$$

$$x_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0), \ \ i = \overline{1,m}, \tag{10}$$

де $x(t) \in R^{n(t)}$, $t \in I$, u — керування, $u \in U \in conv(R^k)$, $\tau_i \in I$, $i = \overline{1,m}$ — фіксовані моменти часу ($\tau_i < \tau_{i+1}$) такі, що $n(\tau_i - 0) \neq n(\tau_i)$, $A_i(t)$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(n(t) \times n(t))$, $B_i(t)$ матрично-значна функція, яка має розмірність $(n(t) \times k)$, $M(n(\tau_i))$ — матриці $(n(\tau_i) \times n(\tau_i - 0))$.

Означення 3. *Під допустимим керуванням розуміється будь-яка вимірна функція $u : I \to R^k$, яка задовольняє включенню $u(t) \in U$ для всіх $t \in I$. Позначимо множину всіх допустимих керувань системи (9),(10) через $\mathcal{U}(I)$ (або $\mathcal{U}$).*

Зауваження 2. *Очевидно, що систему лінійних диференціальних рівнянь, які містять керування (9),(10), можливо привести до системи лінійних диференціальних включень*

$$\dot{x}_i \in A_i(t)x_i + F_i(t), \ \ t \neq \tau_i, \ \ x_0(0) = \overline{x}_0, \ \ i = \overline{0,m}, \tag{11}$$

$$x_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0), \ \ i = \overline{1,m}, \tag{12}$$

де $F_i(t) \equiv B_i(t)U$.

Тоді з [17, 19] випливає наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні вимоги для $i = \overline{0,m}$:*
1)$A_i(\cdot)$ — матрично-значні функції з компонентами, які вимірні на $[\tau_i, \tau_{i+1})$;
2) $B_i(\cdot)$ — матрично-значні функції з компонентами, які вимірні на $[\tau_i, \tau_{i+1})$;
3) існують сталі $\kappa_1 > 0$ і $\kappa_2 > 0$ такі що для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\|A_i(t)\|_{n(\tau_i)} \leqslant \kappa_1, \quad \|B_i(t)\|_{n(\tau_i)} \leqslant \kappa_2 \ .$$

Тоді

1) система (9),(10) має розв'язок на проміжку I для будь-якого допустимого керування $u(\cdot) \in \mathcal{U}(I)$ та на кожному проміжку $[\tau_i, \tau_{i+1})$ має вигляд

$$x_i(t,u) = \Phi_i(t)x_i(\tau_i,u) + \Phi_i(t)\int_{\tau_i}^{t} \Phi_i^{-1}(s)B_i(s)u(s)ds, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \ i = \overline{0,m},$$

де $x_0(\tau_0, u) = \bar{x}_0$, $x_i(\tau_i, u) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0, u)$, $i = \overline{1,m}$, $\Phi_i(t)$ — відповідні матриціанти;

2) перетин множини розв'язків системи (9),(10) (множина досяжності) на кожному проміжку $[\tau_i, \tau_{i+1})$ має вигляд

$$X_i(t) = \Phi_i(t)X_i(\tau_i) + \Phi_i(t)\int_{\tau_i}^{t} \Phi_i^{-1}(s)B_i(s)Uds, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \ i = \overline{0,m},$$

де $X_0(\tau_0) = \bar{x}_0$, $X_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))X_{i-1}(\tau_i - 0)$, $i = \overline{1,m}$;

3) перетин множини розв'язків системи (9),(10) $X_i(t) \in conv(R^{n(t)})$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0,m}$.

Також пов'яжемо з системою (9), (10) наступну систему

$$\dot{x} = N(n(t))A(t)x + N(n(t))B(t)u, \;\; t \neq \tau_i, \;\; x(0) = x_0, \tag{13}$$

$$x(\tau_i) = M(n(\tau_i))x(\tau_i - 0), \tag{14}$$

де $t \in I$, $N(n(t))$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(\overline{n} \times \overline{n})$ та така, що $N(n(t)) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, E — одинична матриця, яка має розмірність $(n(t) \times n(t))$, $A(t)$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(\overline{n} \times \overline{n})$ та така, що $N(n(t))A(t) \equiv P^T(n(t))A_i(t)P(n(t))$ для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\;i = \overline{0, m}$, $B(t)$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(\overline{n} \times k)$ та така, що $N(n(t))B(t)u \equiv P^T(n(t))B_i(t)u$ для $u \in U$ та $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\;i = \overline{0, m}$, $P(t)$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(n(t) \times \overline{n})$ та така, що $P(n(t)) = (E \;\; 0)$, $M(n(t))$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(\overline{n} \times \overline{n})$ та така, що $M(n(t)) = M(n(\tau_i)) = \begin{pmatrix} M_i & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\;i = \overline{0, m-1}$, $M_0 = E, N(n(0))x_0 \equiv P^T(n(0))\overline{x}_0$.

Означення 4. *Відображення $x_u : I \to R^{\overline{n}}$ будемо називати розв'язком системи (13),(14), яке відповідає допустимому керуванню $u(\cdot)$, якщо воно неперервне та задовольняє інтегральному рівнянню*

$$x_u(t) = x_u(\tau_i + 0) + \int_{\tau_i}^{t} [N(n(s))A(s)x_u(s) + N(n(s))B(s)u(s)]ds \tag{15}$$

для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m-1}$ та $x_u(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_u(\tau_i - 0)$, $i = \overline{1, m}$.

Зауваження 3. *Очевидно що $P^T(n(t))x_u(t) = x_i(t, u)$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$, де $x_u(\cdot)$ — розв'язок системи (13),(14), а $x_i(\cdot, u)$ — розв'язок системи (9),(10) на проміжку $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$, які відповідають допустимому керуванню $u(\cdot)$. Тобто перші $n(t)$ елементів вектора $x_u(t)$ збігаються з усіма елементами вектора $x_i(t, u)$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\;i = \overline{0, m}$.*

3. Задача оптимального керування з термінальним критерієм якості. Нехай якість керування системи лінійних диференціальних рівнянь (9),(10) оцінюється термінальним критерієм $I(u) = \Phi(x_m(T))$.

Задача Майєра. Необхідно знайти програмне керування $u_*(\cdot)$ і відповідну траєкторію $x_*(\cdot)$ системи (9),(10), при яких термінальний критерій якості приймає мінімальне значення.

Припущення 1. Нехай функція $\Phi : R^{n(T)} \to R^1$ є неперервною.

Теорема 2. *Нехай виконуються вимоги теореми 1 і припущення 1. Тоді розв'язок задачі Майєра існує.*

Твердження теореми 2 випливає з компактності множини досяжності системи (9),(10) в будь-який момент часу $t \in I$ і неперервності функції $\Phi(\cdot)$.

Далі отримаємо необхідні і достатні умови оптимальності керування для задачі Майєра. Перепишемо систему (9),(10) у вигляді системи (13),(14) та перепишемо функціонал критерія якості у наступному вигляді: $I(u) = \bar{\Phi}(x(T)) \equiv \Phi(x_1(T), ..., x_{n(T)}(T)) + 0 \cdot x_{n(T)+1} + ... + 0 \cdot x_{\bar{n}}(T)$. Отже, отримаємо задачу оптимального керування постійної розмірності з імпульсами та з [3] наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай виконуються вимоги теореми 1 і функція* $\Phi(\cdot)$ *має частинні похідні. Тоді для того, щоб керування* $u_*(\cdot)$ *і відповідна траєкторія* $x_*(\cdot)$ *були розв'язком задачі Майєра* (13),(14), *необхідно і достатньо, щоб існував ненульовий розв'язок* $\psi_*(t)$ *спряженої системи*

$$\dot{\psi} = -N(n(t))A^T(t)\psi, \psi(\tau_i) = M^T(n(\tau_i))\psi(\tau_i - 0), i = \overline{1, m}$$

такий, що виконуються наступні умови:

1) для майже всіх $t \in [0, T]$ *виконується умова максимуму:*

$$(B(t)u_*(t), \psi_*(t)) = \max_{u \in U}(B(t)u, \psi_*(t));$$

2) $\psi_i(T) = -\frac{\partial \bar{\Phi}(x(T))}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, \bar{n}}$.

Зауваження 4. *Згідно із зауваженням 3 після отримання оптимальної траєкторії* $x_*(\cdot)$ *для системи* (13),(14) *легко можна отримати оптимальні траєкторії* $x_{i*}(\cdot)$, $i = \overline{0, m}$ *для системи* (9),(10).

Проілюстуємо отримані результати на модельному прикладі.

Приклад 2. *Нехай* $I = [0, 3]$, $n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1) \\ 2, & t \in [1, 2) \\ 1, & t \in [2, 3] \end{cases}$, *а лінійна керована система із змінною розмірністтю має наступний вигляд*

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + B_i(t)u, \ t \neq \tau_i, \ \ x_0(0) = 1, \ i = \overline{0, 2}, \tag{16}$$

$$x_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0), \ \ i = 1, 2, \tag{17}$$

де $x_0(t) : [0, 1) \to R^1$, $x_1(t) : [1, 2) \to R^2$, $x_2(t) : [2, 3] \to R^1$, $A_0(t) = -1$, $A_1(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2(t) = 1$, $B_0(t) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, $B_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2(t) = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$, $u_i(t) \in [-1, 1]$, $i = 1, 2$, $M(n(1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M(n(2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Треба знайти допустиму програмну стратегію $u_*(\cdot)$, *яка доставляє мінімум функціоналу* $I(u) = 2x_2(3)$.

Отже, пов'яжемо з системою (16), (17) наступну задачу оптимального керування

$$\dot{y} = N(n(t))A(t)y + N(n(t))B(t)u, \ t \neq \tau_i, \ \ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$y(\tau_i) = M(n(\tau_i))y(\tau_i - 0),\ I(u) = 2y_1(3), \tag{19}$$

де $y \in R^2$, $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, $\tau_3 = 3$, $u_i(t) \in [-1, 1]$, $i = 1, 2$,

$$A(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [0,1) \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & t \in [1,2) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [2,3] \end{cases} \quad B(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [0,1) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & t \in [1,2) \\ \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [2,3] \end{cases}$$

$$\bar{M}(n(1)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{M}(n(2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

За теоремою 1 області досяжності систем (16),(17) та (18),(19) є компактами в будь-який момент часу $t \in [0, 3]$. *Тобто розв'язок задач існує.*

Запишемо спряжену систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi,\ \psi(3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\psi(1-0),\ \psi(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\psi(2-0).$$

Нижче на малюнках наводяться графіки зміни кожної з компонент вектора $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))^T$ *на кожному проміжку (рис. 3–8).*

Тоді з умови максимуму теореми 3 маємо:

- *якщо* $t \in [0, 1)$, *то* $(0,5u_1(t) + 0,5u_2(t))\psi_1(t) \to \max$. *На рис. 7 бачимо, що* $\psi_1(t) < 0$, *тобто* $u_{i*}(t) = -1, \quad i = 1, 2$;
- *якщо* $t \in [1, 2)$ $u_1(t)\psi_1(t) + u_2(t)\psi_2(t) \to \max$. *На рис. 5 та рис. 6 бачимо, що* $\psi_1(t) < 0$ *і* $\psi_2(t) < 0$, *тобто* $u_{i*}(t) = -1, \quad i = 1, 2$;
- *якщо* $t \in [2, 3]$ $(0,75u_1(t) + 0,25u_2(t))\psi_1(t) \to \max$. *На рис. 3 бачимо, що* $\psi_1(t) < 0$, *тобто* $u_{i*}(t) = -1, \quad i = 1, 2$.

Отже, $u_{i*}(t) = -1$, $t \in [0, 3]$, $i = 1, 2$. *Тепер знайдемо відповідну оптимальну траєкторію* $y_*(\cdot)$:

$$y_*(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{e^t - 2}{e^t} \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in [0,1) \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{e}(e^{-2t+2} + 1) - t + 1 \\ \frac{1}{e}(e^{-2t+2} - 1) - t + 1 \end{pmatrix}, & t \in [1,2) \\ \begin{pmatrix} 1 - 0,442\, e^t \\ -1,114 \end{pmatrix}, & t \in [2,3] \end{cases}$$

та $y_1(3) = -4.84$. *Тобто* $I(u) = -9,68$.

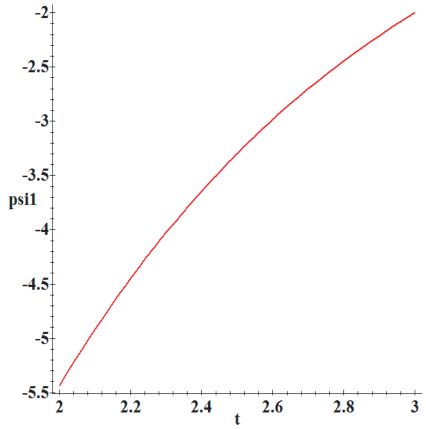

Рис. 3. $\psi_1(t)$, $t \in [2, 3]$

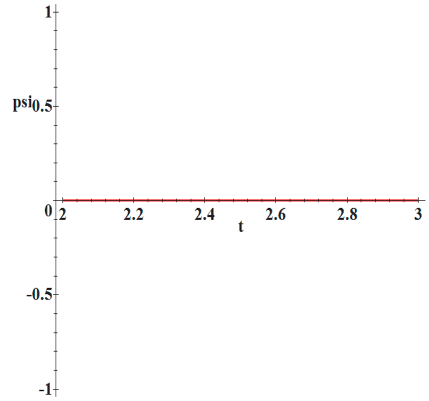

Рис. 4. $\psi_2(t)$, $t \in [2, 3]$

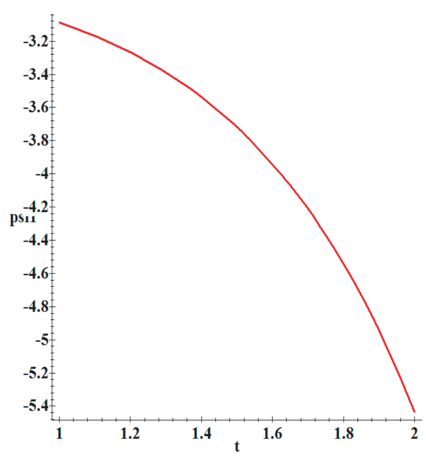

Рис. 5. $\psi_1(t)$, $t \in [1, 2)$

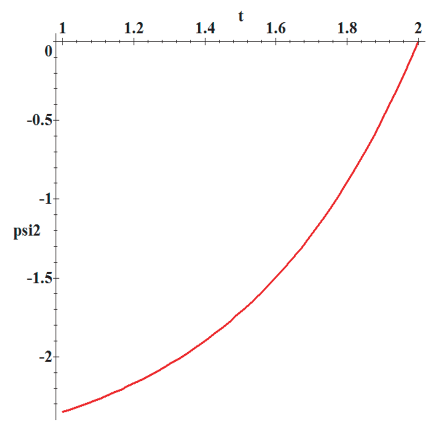

Рис. 6. $\psi_2(t)$, $t \in [1, 2)$

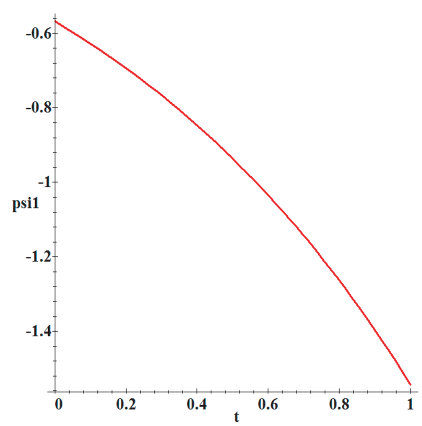

Рис. 7. $\psi_1(t)$, $t \in [0, 1)$

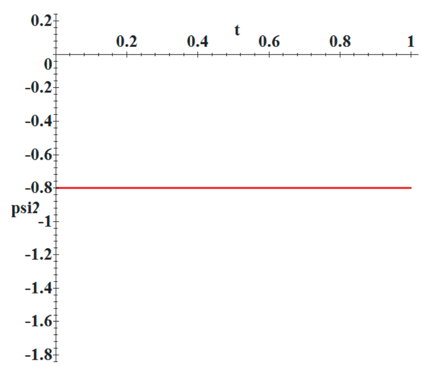

Рис. 8. $\psi_2(t)$, $t \in [0, 1)$

Тоді, згідно із зауваженням 4, отримаємо оптимальну траєкторію для відповідної задачі Майєра (16),(17):

$$x_0^*(t) = -1 + 2e^{-t}, t \in [0, 1),$$

$$x_1^*(t) = \begin{pmatrix} -e^{-1}(e^{-2t+2} + 1) - t + 1 \\ e^{-1}(e^{-2t+2} - 1) - t + 1 \end{pmatrix}, t \in [1, 2),$$

$$x_2^*(t) = 1 - 0,442\, e^t, t \in [2, 3].$$

Висновки. У даній роботі для системи лінійних керованих диференціальних рівнянь, які змінюють розмірність у фіксовані моменти часу, завдяки зведенню її до імпульсного керованого лінійного диференціального рівняння було отримано необхідні і достатні умови оптимальності керування для задачі Майєра. Аналогічно можна розглянути системи лінійних керованих диференціальних рівнянь, які змінюють розмірність в нефіксовані моменти часу.

1. **Болтянский В. Г.** Задача оптимизации со сменой фазового пространства / В. Г. Болтянский // Дифференц. уравн. – 1983. – Т. 19, №3. – С. 519–521.
2. **Максимова И. С.** Условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства / И. С. Максимова, В. Н. Розова // Вестник ТГУ. – 2011. – Т. 16, вып. 4. – С. 1118–1119.
3. **Медведев В. А.** Оптимальное управление ступенчатыми системами / В. А. Медведев, В. Н. Розова // Автоматика и телемеханика. – 1972. – Т.3. – С. 15i–23.
4. **Розова В. Н.** Оптимальное управление ступенчатыми системами / В. Н. Розова // Вестник Российского университета Дружбы народов. Серия: Физико–математические науки. – 2006. – №1. – С. 27–32.
5. **Захаров Г. К.** Оптимизация ступенчатых систем управления / Г. К. Захаров // Автоматика и телемеханика – 1981. – № 8. – С. 5–9.
6. **Магеррамов Ш. Ф.** Оптимизация одного класса дискретных ступенчатых систем управления / Ш. Ф. Магеррамов, К. Б. Мансимов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41, № 3. – С. 360–366.
7. **Никольский М. С.** Линейные дифференциальные игры с переменной структурой / М. С. Никольский // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 276, № 4. – С. 791–794.
8. **Никольский М. С.** Об одной вариационной задаче с переменной структурой / М. С. Никольский // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 36–41.
9. **Тадумадзе Т. А.** Регулярные возмущения в оптимальных задачах с переменной структурой / Т. А. Тадумадзе, Н. М. Авалишвили // Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. – Тбилиси, 1985. – С. 100–154.
10. **Харатишвили Г. Л.** Полиатомические оптимальные системы / Г. Л. Харатишвили // Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. – Тбилиси, 1985. – С. 3–47.

11. **Барсегян В. Р.** О задаче оптимального управления поэтапно меняющимися линейными системами с фазовыми ограничениями в промежуточные моменты времени / В. Р. Барсегян // Ученые записки ЕГУ. – 2002. – №1. – С.118–119.

12. **Еремин Е. Л.** Адаптивное управление динамическим объектом на множестве состояний функционирования / Е. Л. Еремин // Адаптивное и робастное управление. – 2012. – №4(34). – С. 107–118.

13. **Ащепков Л. Т.** Оптимальное управление. Курс лекций / Л. Т. Ащепков, В. В. Величенко // Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та. – 1989. – 116 с.

14. **Кичмаренко О. Д.** Нелинейные дифференциальные включения с переменной размерностью / О. Д. Кичмаренко, А. А. Плотников // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т.18, вип. 2(18). – С. 29–34

15. **Кичмаренко О. Д.** Пошаговое усреднение линейных дифференциальных включений переменной размерности / О. Д. Кичмаренко, А. А. Плотников // Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – Т. 22. – №1(29) – С. 7–17.

16. **Плотников А. А.** Пошаговое усреднение дифференциальных включений переменной размерности на конечном интервале / А. А. Плотников // Математичні студії. – 2016. – Т.46, №1. – С. 81–88.

17. **Плотников А. А.** Пошаговое усреднение линейных дифференциальных включений переменной размерности на конечном интервале / А. А. Плотников // Нелінійні коливання. – 2017. – Т. 20, №2. – С. 211–227.

18. **Kichmarenko O. D.** The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval / O. D. Kichmarenko, A. A. Plotnikov // International Journal of Sensing, Computing and Control. – 2015. – Vol. 5, №1. – P. 25–35.

19. **Kichmarenko O. D.** The Averaging of Linear Differential Inclusions with Variable Dimension on Finite Interval / O.D. Kichmarenko, A.A. Plotnikov // International Journal of Nonlinear Science. – 2015. – Vol. 20, №2. – P. 67–78.

20. **Гребенников В. Г.** Оптимальный выбор траектории развития и принцип непрерывности планирования / В. Г. Гребенников // Методологические проблемы анализа долгосрочных социально-экономических процессов. Труды ВНИИСИ. – 1979. – Вып. 9. – С. 3–15.

21. **Кириллов А. Н.** Метод динамической декомпозиции в моделировании систем управления со структурными изменениями / А. Н. Кириллов // Моделирование систем и процессов. – 2009. – № 1. – С. 20–24.

22. **Романенко А. В.** Оптимальное управление экономическими системами с возрастной структурой / А. В. Романенко, А. В. Федосеев // Журнал вычислит. мат. и матем. физики. – 1993. – Т.33, №8. – С. 1155–1165.

23. **Barton P. I.** Modeling, simulation, sensitivity analysis, and optimization of hybrid systems / P. I. Barton, Ch. K. Lee // ACM Trans. on Model. and Comput. Simul. – 2002. – Vol. 12, №4. – P. 256–289.

24. **Haddad W. M.** Impulsive and hybrid dynamical systems / W. M. Haddad, V. S. Chellaboina, S. G. Nersesov // Princeton: Princeton University Press. – 2008.

25. **Асланян А. А.** Условия оптимальности в задачах управления системами с импульсным воздействием / А.А. Асланян // Доклады АН УССР, серия А. Физико-математические и технические науки. – 1982. – №11. – С. 3–6.

Кичмаренко О. Д., Плотников А. А.

Системы линейных управляемых дифференциальных уравнений с переменной размерностью

Резюме

Статья посвящена исследованию линейной управляемой системы переменной размерности. Рассматривается задача оптимального управления несколькими объектами с последовательным во времени режимом их работы. Исходное состояние каждого следующего объекта зависит от конечного состояния предыдущего, что объединяет их в единую систему переменной размерности. Предполагается, что каждый объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений на интервале его действия. При этом длины интервалов заданы или неизвестны. Системы уравнений могут иметь неодинаковую размерность, могут меняться также размерность управляющей функции и ограничения на ее значення. Такая система сводится к импульсной линейной системе, содержащей управления, и благодаря этому выясняются свойства решений системы и находятся сами решения. Также в работе рассмотрена задача Майєра и получены необходимые и достаточные условия оптимальности. Полученные результаты иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: линейная система, оптимальное управление, переменная размерность, задача Майера, дифференциальное уравнение, импульсная система .

Kichmarenko O. D., Plotnikov A. A.

Systems of linear controlled differential equations with variable dimension

Summary

The article investigates the linear control system of variable dimension. The optimal control problem for several objects with a consistent in time mode of their operation is considered. The initial state of each object depends on the final state of the previous one and this unites them into a single system of variable dimension. It is assumed that each object is described by a system of ordinary differential equations in the interval of its operation. In this case, the lengths of the intervals are either given or unknown. The system of equations may have unequal dimensions, while the dimension of the control function and the restriction on its value can also vary. This system reduces to an impulse linear system containing controls and, therefore, the properties of the system solutions are repelled and the solutions themselves are found. Besides that, we consider the Mayer problem and obtain necessary and sufficient conditions for optimality. The obtained results are illustrated by examples.

Key words: linear system, optimal control, variable dimension, Mayer problem, differential equation, impulse system.

References

1. Boltyanskii, V. G. (1983). Zadacha optimizacii so smenoi fazovogo prostranstva [The problem of optimization with change of phase space]. *Differentsial'nye Uravneniya*, Vol. 19 , №3. – P. 518–521.
2. Maksimova, I. S., Rozova, V. N. (2011). Uslobiya upravlyaemosti v zadache so smenoi fazovogo prostranstva [Controllability conditions in the problem with the change of phase space]. *Vestnik TGU*, Vol. 16, №4. – P. 1118–1119.
3. Medvedev, V. A., Rozova, V. N. (1972). Optimal'noe upravlenie stypenchatimi sistemami [Optimal control step system]. *Avtomatika i telemehanika*, Vol. 3. – P. 15–23.

4. Rozova, V. N. (1972). Optimal'noe upravlenie stypenchatimi sistemami [Optimal control step system]. Vestnik Rossiiskogo Universiteta Druzhbi Narodov. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki, №1. – P. 27–32.
5. Zakharov, G. K. (1981). Optimizaciya stupenchatih sistem upravleniya [Optimization of step control systems]. *Avtomatika i telemehanika*, Vol. 8. – P. 5–9.
6. Magerramov, Sh. F., Mansimov, K. B. (2001). Optimization of a class of discrete step control systems. *Comput. Math. Math. Phys.*, Vol. 41 , №3. – P. 334–339.
7. Nikol'skii, M. S. (1984). Lineinie differencial'nie igri s peremenoi strukturoi [Linear differential games with variable structure]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 276, №4. – P. 791–794.
8. Nikol'skii, M. S. (1987). Ob odnoi variacionnoi zadache s peremennoi strukturoi [A variational problem with a variable structure]. *Vestnik Moskov. Univ.*, Ser. XV Vychisl. Mat. Kibernet., №1. – P. 36–41.
9. Tadumadze, T. A., Avalishvili, N. M. (1985). Regulyarnie vozmuscheniya v optimal'nih zadachah s peremennoi strukturoi [Regular perturbations in optimal problems with variable structure]. *Optimal control in systems with variable structure.* – P. 100–154.
10. Haratishvili, G. L. (1985). Poliatomicheskie optimal'nie sistemi [Polyatomic optimal systems]. *Optimal control in systems with variable structure.* – P. 3–47.
11. Barsegyan, V. R. (2002). O zadache optimal'nogo upravleniya poetapno menyayuschimisya lineinimi sistemami s fazovimi ogranicheniyami v promezhutochnie momenti vremeni [On the problem of optimal control of gradually varying linear systems with phase constraints at intermediate instants of time]. *Uchenie zapiski EGU*, №1. – P. 118–119.
12. Eremin, E. L. (2012). Adaptivnoe upravlenie dinamicheskim ob'ektom na mnozhestve sostoyanii funkcionirovaniya [Adaptive control of a dynamic object in the set operation states]. *Adaptive and robust control*, №4(34). – P. 107–118.
13. Aschepkov, L. T., Velichenko, V. V. (1989). *Optimal'noe upravlenie. Kurs lekcii [Optimal control. Lecture course].* Vladivostok: Izdat. Dal'nevostochnogo universiteta, 116 p.
14. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2013). Nelineinie differencial'nie vklucheniya s peremennoi razmernost'yu [Nonlinear differential inclusions with variable dimension], *Visnik Od. nac. un-tu. Mat. i mekh.*, Vol. 18, №2(18). – P. 29–34.
15. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2017). Poshagovoe usrednenie lineinikh differencial'nih vkluchenii peremennoi razmernosti [Stepwise averaging of linear differential inclusions of variable dimension]. *Research in mathematics and mechanics*, Vol. 22, №1(29). – P. 7–17.
16. Plotnikov, A. A. (2016). Poshagovoe usrednenie differencial'nih vkluchenii peremennoi razmernosti [Stepwise averaging of differential inclusions of variable dimension]. *Matematychni Studii*, Vol. 46, №1. – C. 81–88.
17. Plotnikov, A. A. (2017). Poshagovoe usrednenie lineinikh differencial'nih vkluchenii peremennoi razmernosti na konechnom intervale [Step averaging linear differential inclusions with variable dimension on a finite interval]. *Nonlinear oscilation*, Vol. 20, №2. – C. 211–227.
18. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2015). The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval. *International Journal of Sensing, Computing and Control*, Vol. 5, №1. – P. 25–35.
19. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2015). The Averaging of Linear Differential Inclusions with Variable Dimension on Finite Interval *International Journal of Nonlinear Science*, Vol. 20, №2. – P. 67–78.

20. Grebennikov, V. G. (1979). Optimal'nii vibor traektorii razvitiya i princip neprerivnosti planirovaniya [Optimal choice of the development trajectory and the principle of continuity of planning]. *In: Methodological problems of analysis of long-term socio-economic processes. Proceedings of VNIISI*, №9. – P. 3–15.

21. Kirilov, A. N. (2009). Metod dinamicheskoi dekompozicii v modelirovanii sistem upravleniya so strukturnimi szmeneniyami [The method of dynamic decomposition in the modeling of control systems with structural changes]. *Modeling of systems and processes*, № 1. – P. 20–24.

22. Romanenko, A. V., Fedoseev, A. V. (1993). Optimal'noe upravlenie ekonomicheskimi sistemami [Optimum management of economic systems with age structure]. *Zhurnal computes. mat. i math. physics*, Vol.33, №8. – P. 1155–1165.

23. Barton, P. I., Lee, Ch.K. (2002). Modeling, simulation, sensitivity analysis, and optimization of hybrid systems. *ACM Trans. on Model. and Comput. Simul.*, Vol. 12, №4. – P. 256–289.

24. Haddad, W. M., Nersesov, S.G. (2008). *Impulsive and hybrid dynamical systems*. Princeton: Princeton University Press.

25. Aslanyan, A. A. (1982). Usloviya optimal'nosti v zadachah upravleniya sistemami s impul'snim vozdeistviem [Conditions for optimality in problems of the control of systems with impulse action]. *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A*, №11. – P. 3–6.