УДК 517.5

С. Р. Воронкова
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ПРО ЗБІЖНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНОГО ГАРМОНІЧНОГО РЯДУ ПРИ ЗМІНІ ЗНАКІВ ЙОГО ДОДАНКІВ

Автор висловлює щиру подяку Р. В. Шаніну за плідні обговорення результатів.

У даній роботі вивчається питання про збіжність узагальненого гармонічного ряду, у якого змінені знаки доданків. Для цього розглядається послідовність номерів, на яких відбувається перемикання знаку. Головним результатом є критерій збіжності узагальненого гармонічного ряду зі зміненими знаками в термінах номерів перемикання знаку. Цей критерій дозволяє зводити питання про збіжність до дослідження більш простого, а саме, знакозмінного ряду. Наведено кілька прикладів застосування отриманого критерію. Найбільш цікавим виявився приклад степеневого росту номерів перемикання знаків, що обумовлено переходом до цілих частин у випадку, коли показник степеня не є натуральним. В роботі отримані необхідна та достатня умови збіжності, але питання не вирішене в повному обсязі, оскільки ці умови не збігаються.
MSC: 40A05.
Ключові слова: збіжність, узагальнений гармонічний ряд, номери перемикання знаку
.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134617.

Вступ. Добре відомо, що узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leqslant 1$. Але необхідна умова збіжності цього ряду виконується при $\alpha > 0$, причому у цьому випадку доданки прямують до нуля монотонно. Таким чином, якщо змінювати знаки доданків через один, то при $0 < \alpha \leqslant 1$ відповідний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$, за ознакою Лейбниця [3, с. 302], стане умовно збіжним. Відома теорема Рімана [3, с. 317] стверджує, що переставляючи доданки умовно збіжного ряду, можна отримати новий ряд, який збігається до будь-якої наперед заданої суми або ж розбігається. Незначна модифікація доведення теореми Рімана надає можливість розташувати знаки доданків (не переставляючи їх) заданого розбіжного ряду з невід'ємними доданками, що прямують до нуля, так, щоб отримати новий ряд, який збігається до наперед заданої суми або розбігається (див. [2, с. 75]). У даній роботі розглядається обернена, у визначеному сенсі, задача. А саме, які умови розташування знаків доданків узагальненого гармонічного ряду без порушення порядку гарантують збіжність чи розбіжність отриманого ряду. Звичайно, мова йде лише про випадок $0 < \alpha \leqslant 1$ і умовну збіжність, оскільки при будь-якому розташуванні знаків при $\alpha > 1$ отримаємо абсолютно збіжний ряд, а при $\alpha \leqslant 0$ не виконується необхідна умова збіжності.

Основні результати. Отже, розглядається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha}}, \tag{1}$$

Надійшла 30.04.2018

де $\varepsilon_n = \pm 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Покладемо $n_0 = 1$, а для $k \geqslant 1$ визначимо послідовність n_k номерів перемикання знаку доданків ряду (1), тобто вважаємо, що $\varepsilon_n = (-1)^{k-1}$ при $n_{k-1} \leqslant n < n_k$. Наступна теорема складає основний результат даної роботи. Вона встановлює критерій збіжності ряду (1) в термінах номерів n_k перемикання знаків.

Теорема 1 (Критерій збіжності)**.** *При $\alpha = 1$ збіжність ряду (1) рівносильна збіжності ряду*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\ln\frac{n_k}{n_{k-1}}, \tag{2}$$

а при $0 < \alpha < 1$ ряд (1) збігається або розбігається одночасно з рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(n_k^{1-\alpha} - n_{k-1}^{1-\alpha}\right). \tag{3}$$

Спочатку наведемо дві допоміжні леми, які будемо використовувати для доведення теореми 1.

Лема 1. *При $0 < \alpha \leqslant 1$ збіжність ряду (1) рівносильна існуванню границі послідовності*

$$B_n^{(\alpha)} = \sum_{m=0}^{s-1}\left(\int\limits_{n_{2m}}^{n_{2m+1}}\frac{dx}{x^\alpha} - \int\limits_{n_{2m+1}}^{n_{2m+2}}\frac{dx}{x^\alpha}\right) + b_n^{(\alpha)}, \tag{4}$$

де $n_{2s} - 1 \leqslant n < n_{2s+2}$ і

$$b_n^{(\alpha)} = \begin{cases} 0, \quad n = n_{2s} - 1, \\ \int\limits_{n_{2s}}^{n+1}\frac{dx}{x^\alpha}, \quad n_{2s} \leqslant n < n_{2s+1}, \\ \int\limits_{n_{2s}}^{n_{2s+1}}\frac{dx}{x^\alpha} - \int\limits_{n_{2s+1}}^{n+1}\frac{dx}{x^\alpha}, \quad n_{2s+1} \leqslant n < n_{2s+2}. \end{cases}$$

Доведення. Для $j \in \mathbb{N}$ позначимо

$$\gamma_j = \frac{1}{j^\alpha} - \int\limits_j^{j+1}\frac{dx}{x^\alpha}.$$

Тоді маємо

$$0 \leqslant \gamma_j = \frac{1}{j^\alpha} - \int\limits_j^{j+1}\frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{j(j+1)^\alpha}. \tag{5}$$

Представимо часткові суми ряду (1) у наступному вигляді:

$$A_n \equiv \sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_j}{j^\alpha} = \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\int\limits_j^{j+1}\frac{dx}{x^\alpha} + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\gamma_j.$$

Із (5) випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \gamma_n$ збігається абсолютно, тобто послідовність $\sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_j \gamma_j$ збіжна. Тому існування $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ рівносильно існуванню границі послідовності

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \int\limits_{j}^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \sum_{m=0}^{s-1} \left(\sum_{j=n_{2m}}^{n_{2m+1}-1} \int\limits_{j}^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha} - \sum_{j=n_{2m+1}}^{n_{2m+2}-1} \int\limits_{j}^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha} \right) + b_n^{(\alpha)} = B_n^{(\alpha)}.$$

Лема 2. *Нехай числа $c_k \geqslant 0$ і*

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0. \tag{6}$$

Тоді ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k \tag{7}$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k-1} - c_{2k}) \tag{8}$$

збігаються або розбігаються одночасно.

Доведення. З очевидної рівності

$$S_{2n} \equiv c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2n-1} - c_{2n} = D_n,$$

де S_k і D_k — часткові суми рядів (8) та (8) відповідно, випливає, що ряд (8) збігається тоді і лише тоді, коли існує

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} \equiv S. \tag{9}$$

Але оскільки

$$S_{2n+1} = S_{2n} + c_{2n+1},$$

то, за умовою (7), існування границі (9) рівносильно тому, що і $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$. Це означає, що існує

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S,$$

тобто збігається ряд (8).

Доведення. [теорема 1] Скористаємось лемою 1. При $\alpha = 1$ отримуємо

$$B_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{s-1} \left(\ln \frac{n_{2m+1}}{n_{2m}} - \ln \frac{n_{2m+2}}{n_{2m+1}} \right) + b_n^{(1)}, \tag{10}$$

де

$$b_n^{(1)} = \begin{cases} 0, \quad n = n_{2s} - 1, \\ \ln \frac{n+1}{n_{2s}}, \quad n_{2s} \leqslant n < n_{2s+1}, \\ \ln \frac{n_{2s+1}}{n_{2s}} - \ln \frac{n+1}{n_{2s+1}}, \quad n_{2s+1} \leqslant n < n_{2s+2}, \end{cases}$$

а при $0 < \alpha < 1$

$$B_n^{(\alpha)} = \frac{1}{1-\alpha}\sum_{m=0}^{s-1}\left[\left(n_{2m+1}^{1-\alpha} - n_{2m}^{1-\alpha}\right) - \left(n_{2m+2}^{1-\alpha} - n_{2m+1}^{1-\alpha}\right)\right] + b_n^{(\alpha)}, \tag{11}$$

де

$$b_n^{(\alpha)} = \begin{cases} 0, \quad n = n_{2s}-1, \\ \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - n_{2s}^{1-\alpha}\right), \quad n_{2s} \leqslant n < n_{2s+1}, \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[\left(n_{2s+1}^{1-\alpha} - n_{2s}^{1-\alpha}\right) - \left((n+1)^{1-\alpha} - n_{2s+1}^{1-\alpha}\right)\right], \quad n_{2s+1} \leqslant n < n_{2s+2}. \end{cases}$$

Покладемо

$$c_k^{(\alpha)} = \begin{cases} \ln\frac{n_k}{n_{k-1}}, \quad \alpha = 1, \\ n_k^{1-\alpha} - n_{k-1}^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

За позначень $c_k = c_k^{(\alpha)}$ при $\alpha = 1$ ряд (8) набуває вигляду (2), а при $0 < \alpha < 1$ – вигляду (3). При цьому для $n_{2s} - 1 \leqslant n < n_{2s+2}$

$$B_n^{(\alpha)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{s-1}(c_{2m+1}^{(1)} - c_{2m+2}^{(1)}) + b_n^{(1)}, \quad \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}\sum\limits_{m=0}^{s-1}(c_{2m+1}^{(\alpha)} - c_{2m+2}^{(\alpha)}) + b_n^{(\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

і

$$|b_n^{(1)}| \leqslant c_{2s+1}^{(1)} + c_{2s+2}^{(1)}, \quad |(1-\alpha)b_n^{(\alpha)}| \leqslant c_{2s+1}^{(\alpha)} + c_{2s+2}^{(\alpha)}. \tag{12}$$

Нехай $\alpha = 1$ та збігається ряд (2) або $0 < \alpha < 1$ та збігається ряд (3). Тоді при будь-якому $0 < \alpha \leqslant 1$, за необхідною умовою збіжності ряду,

$$\lim_{k\to\infty} c_k^{(\alpha)} = 0, \tag{13}$$

і при цьому збігається ряд (8).

Із (11) та (13) випливає, що при будь-якому $0 < \alpha \leqslant 1$

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{(\alpha)} = 0. \tag{14}$$

Таким чином, в силу (14) збіжність послідовності $B_n^{(\alpha)}$ рівносильна збіжності ряду (8). Але оскільки ряд (8) збігається, то, за лемою 2, збігається також і ряд (8), тобто послідовність $B_n^{(\alpha)}$ збіжна. Згідно з лемою 1, це означає, що ряд (1) є збіжним.

Нехай тепер розбігається ряд (2) (тобто $\alpha = 1$) або ряд (3) (тобто $0 < \alpha < 1$). Це означає, що розбігається ряд (8) при $c_k = c_k^{(\alpha)}$ ($0 < \alpha \leqslant 1$). Можливий один і лише один з двох наступних випадків:

A) $\lim\limits_{k\to\infty} c_k^{(\alpha)} = 0$,

B) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, c_k^{(\alpha)} > 0$.

У випадку A), міркуючи як і вище, отримаємо (14), і отже, за лемою 2, ряд (8) також розбіжний. Це означає, що послідовність $B_n^{(\alpha)}$ розбіжна, а за лемою 1, ряд (1) розбігається.

Якщо ж має місце B), то виконується принаймні одна з двох наступних умов:

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} c_{2s+1}^{(\alpha)} > 0 \tag{15}$$

або

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} c_{2s+2}^{(\alpha)} > 0. \tag{16}$$

Скористаємось наступними очевидними рівностями

$$B_{n_{2s+1}-1}^{(\alpha)} = B_{n_{2s}-1}^{(\alpha)} + c_{2s+1}^{(\alpha)}, \tag{17}$$

$$B_{n_{2s+2}-1}^{(\alpha)} = B_{n_{2s}-1}^{(\alpha)} + c_{2s+1}^{(\alpha)} - c_{2s+2}^{(\alpha)}. \tag{18}$$

За умови (15), з рівності (17) випливає, що послідовності $B_{n_{2s+1}-1}^{(\alpha)}$ та $B_{n_{2s}-1}^{(\alpha)}$ не можуть збігатися до однієї і тієї ж границі і тому послідовність $B_n^{(\alpha)}$ розбіжна. Якщо ж (15) не має місця (тобто $\lim\limits_{s\to\infty} c_{2s+1}^{(\alpha)} = 0$), то з (16) і (18) маємо, що послідовності $B_{n_{2s+2}-1}^{(\alpha)}$ і $B_{n_{2s}-1}^{(\alpha)}$ не можуть збігатися до однієї і тієї ж границі, тобто і в цьому останньому випадку послідовність $B_n^{(\alpha)}$ розбіжна. Згідно з лемою 1, це означає, що ряд (1) є розбіжним. Отже, доведення завершено.

Зауваження 1. *Нехай $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 1$. Представимо ряд (1) при $\alpha = \alpha_2$ у вигляді*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha_2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha_1}} \cdot n^{\alpha_1-\alpha_2}.$$

Оскільки $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$, то $n^{\alpha_1-\alpha_2}$ монотонно спадає до нуля. За ознакою Діріхле [3, с. 307], звідси випливає, що збіжність ряду (1) при $\alpha = \alpha_1$ тягне збіжність ряду (1) при $\alpha = \alpha_2$. Згідно з теоремою 1, це означає, що із збіжності ряду (3) при $\alpha = \alpha_1$ випливає збіжність ряду (2) та ряду (3) при $1 > \alpha_2 > \alpha_1$.

Наведемо декілька прикладів застосування теореми 1.

Приклад 1. *Для фіксованого $r \in \mathbb{N}$ покладемо $n_k = k \cdot r + 1$, $k = 0, 1, \ldots$. Тоді послідовність*

$$\ln \frac{n_k}{n_{k-1}} = \ln \left(1 + \frac{r}{(k-1)r+1}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

монотонно спадає до нуля при $k \to \infty$. Тому ряд (2) збігається за ознакою Лейбниця. Якщо ж $0 < \alpha < 1$, то розглянемо функцію $\varphi(x) = (x \cdot r + 1)^{1-\alpha}$ $(x \geqslant 1)$. Її похідна $\varphi'(x) = r(1-\alpha)(x \cdot r + 1)^{-\alpha}$ монотонно спадає до нуля при $x \to +\infty$. За теоремою Лагранжа [3, с. 226],

$$n_k^{1-\alpha} - n_{k-1}^{1-\alpha} = \varphi(k) - \varphi(k-1) = \varphi'(\xi_k),$$

де $\xi_k \in [k-1, k]$. Звідси випливає, що модулі доданків ряду (3) монотонно спадають до нуля і отже, ряд (3) збігається за ознакою Лейбниця.

За теоремою 1 отримуємо, що при $n_k = k \cdot r + 1$ ряд (1) збігається при будь-якому $0 < \alpha \leqslant 1$.

Зауваження 2. *При $r = 1$ $(n_k = k+1)$ ряд (1) збігається за ознакою Лейбниця, а при $r \geqslant 2$ приклад 1 є простим узагальненням ознаки Лейбниця. Більше того, стандартне доведення ознаки Лейбниця легко може бути поширеним на випадок довільного ряду, у якого модулі доданків монотонно спадають до нуля, а знаки доданків повторюються через довільне фіксоване $r \in \mathbb{N}$. Це означає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ при $u_n \downarrow 0$ збігається, якщо $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_r = 1$, $\varepsilon_{n+r} = -\varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \dots)$.*

Зауваження 3. *Із очевидної рівності*

$$n_{k+1}^{1-\alpha} - n_k^{1-\alpha} = n_k^{1-\alpha}\left(\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)^{1-\alpha} - 1\right)$$

випливає, що умова прямування до нуля (спадання модулів) доданків ряду (3) тягне прямування до нуля (спадання модулів) доданків ряду (2).

Приклад 2. *Зафіксуємо $a > 1$ і покладемо $n_k = \left[a^k\right]$, де символом $[\cdot]$ позначається функція цілої частини числа. Тоді отримаємо*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \frac{a^{k+1}-1}{a^k} \to a > 1 \quad (k \to \infty).$$

Це означає, що для ряду (2) не виконується необхідна умова збіжності. В силу зауваження 3 доданки ряду (3) також не прямують до нуля. Таким чином, згідно з теоремою 1, ряд (1) розбігається при кожному $0 < \alpha \leqslant 1$.

Приклад 3. *Для натурального $\beta \geqslant 2$ покладемо $n_k = k^\beta$. Позначимо $\mu = \beta(1-\alpha)$. Тоді $n_{k+1}^{1-\alpha} - n_k^{1-\alpha} = (k+1)^\mu - k^\mu$. Якщо $\mu < 1$ (тобто $\alpha > 1 - \frac{1}{\beta}$), то з опуклості догори послідовності k^μ (тобто з нерівності $k^\mu \geqslant \frac{(k-1)^\mu + (k+1)^\mu}{2}$) отримуємо, що модулі доданків ряду (3) монотонно спадають (очевидно, до нуля) і отже, ряд (3) збігається за ознакою Лейбниця. Згідно із зауваженням 3, ряд (2) також збігається за ознакою Лейбниця. Якщо ж $\mu \geqslant 1$ (тобто $0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{1}{\beta}$), то ряд (3) розбігається, оскільки його доданки не прямують до нуля. Отже, за теоремою 1, ряд (1) збігається при $1 - \frac{1}{\beta} < \alpha \leqslant 1$ і розбігається при $0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{1}{\beta}$.*

У прикладі 3 число $\beta \geqslant 2$ натуральне (випадок $\beta = 2$ див. в [3, с. 315] та в [4, с. 240, приклад № 2687]). Це гарантує, що і $n_k = k^\beta$ також натуральне. У випадку коли β не є натуральним, природньо, як і в прикладі 2, розглядати послідовність номерів $n_k = \left[k^\beta\right]$. Покажемо, що умова розбіжності ряду (1), яка отримана у прикладі 3, залишається справедливою при довільному $\beta > 1$ (випадок $\beta = 1$ охоплює приклад 1).

Теорема 2. *Нехай $\beta > 1$, $n_k = \left[k^\beta\right]$ $(k = 1, 2 \dots)$. Тоді ряд (1) розбігається при $0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{1}{\beta}$.*

Доведення. Позначимо $y_k = k^\beta$ і покажемо, що за умовами теореми не виконується умова Коші збіжності ряду (1). Спочатку відзначимо, що при $n_k \leqslant$

$n \leqslant n_{k+1}-1$ всі знаки доданків ряду (1) однакові і тому при достатньо великих k маємо

$$\left|\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1}\frac{\varepsilon_n}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1}\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \int\limits_{y_k+1}^{y_{k+1}-1}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left\{(y_{k+1}-1)^{1-\alpha}-(y_k+1)^{1-\alpha}\right\}.$$

Для оцінки правої частини застосуємо теорему Лагранжа до функції $\varphi(y)=y^{1-\alpha}$. В результаті знайдемо таке $\xi_k \in [y_k+1, y_{k+1}-1]$, що

$$(y_{k+1}-1)^{1-\alpha}-(y_k+1)^{1-\alpha} = (1-\alpha)\xi_k^{-\alpha}\left(y_{k+1}-1-y_k-1\right) \geqslant$$
$$\geqslant (1-\alpha)\left(y_{k+1}-1\right)^{-\alpha}\left\{y_{k+1}-y_k-2\right\} \geqslant (1-\alpha)(k+1)^{-\alpha\beta}\left\{(k+1)^\beta-k^\beta-2\right\}.$$

Застосувавши знову теорему Лагранжа до функції $\psi(x)=x^\beta$, отримаємо таке $\eta \in [k,k+1]$, що $(k+1)^\beta-k^\beta=\beta\eta^{\beta-1}\geqslant\beta k^{\beta-1}\geqslant\frac{\beta}{2}k^{\beta-1}+2$ при достатньо великих k. Таким чином, маємо

$$\left|\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1}\frac{\varepsilon_n}{n^\alpha}\right| \geqslant (k+1)^{-\alpha\beta}\frac{\beta}{2}k^{\beta-1} \geqslant 2^{-\alpha\beta-1}k^{\beta(1-\alpha)-1}.$$

Оскільки, за умовами теореми, $\beta(1-\alpha)-1\geqslant 0$, то права частина останньої нерівності не прямує до нуля при $k\to\infty$ і отже, ряд (1) не задовольняє умову Коші. За критерієм Коші [5, с. 10], цей ряд розбігається, і тим самим завершується доведення теореми.

Теорема 2 надає достатню умову розбіжності ряду (1). Достатню умову збіжності цього ряду містить наступна

Теорема 3. *Нехай* $\beta>1$, $n_k=[k^\beta]$ $(k=1,2,\cdots)$. *Якщо* $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$ *і* $\frac{1}{\alpha}<\beta<\frac{1}{1-\alpha}$, *то ряд* (1) *збігається.*

Доведення. Повторюючи міркування з прикладу 3, отримуємо, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left((k+1)^{\beta(1-\alpha)}-k^{\beta(1-\alpha)}\right)$ збігається при $1<\beta<\frac{1}{1-\alpha}$ та $0<\alpha<1$. Розглянемо наступну рівність для часткових сум

$$\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left((k+1)^{\beta(1-\alpha)}-k^{\beta(1-\alpha)}\right)=\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left((k+1)^{\beta(1-\alpha)}-\left[(k+1)^\beta\right]^{1-\alpha}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\left(k^{\beta(1-\alpha)}-\left[k^\beta\right]^{1-\alpha}\right)+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left(\left[(k+1)^\beta\right]^{1-\alpha}-\left[k^\beta\right]^{1-\alpha}\right).$$

Звідси видно, що за умови збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(k^{\beta(1-\alpha)}-\left[k^\beta\right]^{1-\alpha}\right) \qquad (19)$$

ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left((k+1)^{\beta(1-\alpha)}-k^{\beta(1-\alpha)}\right)$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\left[(k+1)^{\beta}\right]^{1-\alpha}-\left[k^{\beta}\right]^{1-\alpha}\right)$ збігаються або розбігаються одночасно. Модулі доданків ряду (19) оцінимо за допомогою формули Тейлора [3, с. 364]

$$0\leqslant k^{\beta(1-\alpha)}-\left[k^{\beta}\right]^{1-\alpha}\leqslant k^{\beta(1-\alpha)}-\left(k^{\beta}-1\right)^{1-\alpha}=$$
$$=k^{\beta(1-\alpha)}\left\{1-\left(1-\frac{1}{k^{\beta}}\right)^{1-\alpha}\right\}=k^{\beta(1-\alpha)}\left\{\frac{1-\alpha}{k^{\beta}}+\bar{o}\left(\frac{1}{k^{\beta}}\right)\right\}=$$
$$=(1-\alpha)k^{-\alpha\beta}+\bar{o}\left(k^{-\alpha\beta}\right).$$

Ряд із доданками в правій частині цієї нерівності збігається за умови $\alpha\beta>1$, і, таким чином, теорема доведена для $0<\alpha<1$. Беручи до уваги зауваження 3, приходимо до твердження теореми у повному обсязі.

Зауваження 4. *Нам невідомо, збігається чи розбігається ряд* (1) *при* $n_k=\left[k^{\beta}\right]$ *у випадку* $1<\beta<2,\ 1-\frac{1}{\beta}<\alpha\leqslant\frac{1}{\beta}$. *Можливо, питання про збіжність ряду* (19) *є цікавим незалежно від його застосувань, розглянутих в даній роботі.*

Висновки. Теорема 1 зводить питання про збіжність ряду (1) до дослідження збіжності більш простого, а саме, знакозмінного ряду, доданки якого виражені через номери перемикання знаків n_k.

1. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. Т. II. – М.: Физматлит, 2001. – 810 с.
2. **Гелбаум Б.** Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. – М.: Мир, 1967. – 252 с.
3. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. Т. I. – М.: Физматлит, 1962. – 600 с.
4. **Демидович Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
5. **Ильин В. А.** Математический анализ / В. А. Ильин. – М.: МГУ, 1987. – 358 с.

Воронкова С. Р.

О СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО РЯДА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЗНАКОВ ЕГО СЛАГАЕМЫХ

Резюме

В данной работе изучается вопрос о сходимости обобщенного гармонического ряда, у которого изменены знаки слагаемых. Для этого рассматривается последовательность номеров, по которым происходит переключение знака. Главным результатом является критерий сходимости обобщенного гармонического ряда с измененными знаками в терминах номеров переключения знака. Этот критерий позволяет сводить вопрос о сходимости к исследованию более простого, а именно, знакочередующегося ряда. Приведено

несколько примеров применения полученного критерия. Наиболее интересным оказался пример степенного роста номеров переключения знаков, что обусловлено переходом к целым частям в случае, когда показатель степени не является натуральным. В работе получены необходимое и достаточное условия сходимости, но вопрос не решен в полном объеме, поскольку эти условия не совпадают.
Ключевые слова: сходимость, обобщенный гармонический ряд, номера переключения знака .

Voronkova S. R.
ABOUT CONVERGENCE OF THE GENERALIZED HARMONIC SERIES WHEN THE SIGNS OF ITS SUMMANDS ARE CHANGED

Summary

In this paper we study the question about convergence of the generalized harmonic series when the signs of its summands are changed. For this we consider the sequence of numbers where the sign is switched. The main result is the convergence criterion of a generalized harmonic series with changed signs in terms of the sign switching numbers. This criterion allows us to reduce the question of convergence to the study of a simpler, namely, sign alternating series. There are given several examples of the application of the obtained criterion. The most interesting was the example of a power growth of the sign switching numbers, because there is a transition to integer parts in the case when the exponent is not natural. Necessary and sufficient conditions for convergence are obtained, but the question is not solved in full, because these conditions do not coincide.
Key words: convergence, generalized harmonic series, numbers of sign switching.

REFERENCES

1. Fikhtengolz, G. M. (2001). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. II.* Moscow: Fizmatlit, 810 p.
2. Gelbaum, B. (1967). *Contrprimeri v analize [Counterexamples in the analysis]* Moscow: The World, 252 p.
3. Fikhtengolz, G. M. (1962). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. I.* Moscow: Fizmatlit, 600 p.
4. Demidovich, B. P. (1966). *Sbornik zadach i yprajneniji po matematicheskomy analizy [Collection of tasks and exercises on mathematical analysis]* Moscow: Science, 544 p.
5. Ilin, V. A. (1987). *Matematicheskij analiz [Mathematical analysis]* Moscow: MSU, 358 p.