УДК 519.624.2

В. В. Вербицкий, И. Н. Иванищева
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
Одесский национальный политехнический университет

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

Предложен итерационный алгоритм вычисления i-го собственного значения (с. з.) и соответствующей собственной функции (с. ф.) задачи Штурма—Лиувилля на конечном интервале. Алгоритм использует известные асимптотические формулы для с. з. и с. ф. задачи Штурма—Лиувилля. Каждая итерация алгоритма требует решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Левая часть этого уравнения является дифференциальным оператором левой части уравнения Штурма—Лиувилля с некоторым сдвигом, а правая — приближением к искомой с. ф. Приведен пример, в котором упомянутая краевая задача решалась методом конечных элементов с тригонометрическими функциями-крышками, определенными на равномерной сетке. В этом примере предложенный алгоритм фактически сводится к итерационному алгоритму определения i-го с. з. конечно-элементной аппроксимации задачи Штурма—Лиувилля, являющейся обобщенной матричной задачей на с. з., только i-е с. з. которой приближает с. з. исходной задачи.

MSC: 65L10, 65L15.
Ключевые слова: задача Штурма—Лиувилля, собственное значение, асимптотические формулы для собственных значений, метод конечных элементов .
DOI: 10.18524/2519-206x.2018.1.134616.

Введение. Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля, которую без ограничения общности можно записать следующим образом,

$$\begin{gathered} -u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in (0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $q(x) \geqslant 0$ — заданная вещественная функция. Ищутся такие значения числового вещественного параметра λ, что краевая задача (1) имеет нетривиальное (не равное тождественно нулю) решение. Соответствующие значения λ называются собственными значениями (с. з.), а соответствующие решения $u(x)$ — собственными функциями (с. ф.). Задача (1) обладает следующими свойствами (см., например, [2,5]). Существует бесконечное счетное множество вещественных собственных значений:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots .$$

Каждому с. з. λ_i соответствует единственная, с точностью до постоянного множителя, с. ф. $u_i(x)$. Собственные функции $u_i(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(0,\pi)$. Задача (1) широко используется в математическом моделировании физических процессов, являясь, в частности, одним из основных инструментов квантовой механики (см., например, [5]). В настоящее время существует

Получена 12.02.2018

большое количество методов численного решения задачи (1) (см., например, [9]). Все они имеют свои преимущества и недостатки. Так, методы конечных разностей и конечных элементов позволяют вычислять с высокой точностью лишь с. з. и с. ф. с младшими порядковыми номерами, ибо погрешности с. з. и с. ф. растут с ростом номера с. з.[6–8,10]. С другой стороны, методы, основанные на аппроксимации потенциала $q(x)$ (обычно кусочно-постоянными или кусочно-линейными функциями), позволяют приближать с. з. с точностью, которая не зависит от номера с. з. Однако с. з. находятся как нули некоторой осциллирующей функции, определение корней которой является сложной задачей. Кроме того, для найденного приближенного с. з. надо определить его номер в спектре [3.4].

Вместе с тем, в литературе известны асимптотические формулы для с. з. и с. ф. задачи Штурма—Лиувилля, точность которых возрастает с увеличением порядкового номера с. з. и соответствующей с. ф. (см., например, [1, 2, 5]). Так, если $q(x)$ имеет ограниченную производную, то для с. з. и с. ф. задачи (1) имеют место асимптотические формулы [2, с. 21]:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad c = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi q(\tau)d\tau, \tag{2}$$

$$u_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3}$$

В статье рассматривается построение численного алгоритма нахождения с. з. и с. ф. задачи (1) на основании асимптотических формул (2), (3).

Основные результаты

1. Построение итерационного алгоритма. Задаче (1) соответствует следующая вариационная задача. Найти такую пару $\{\lambda, u\}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $u \in H_0^1(0,\pi)$, что

$$a(u,v) = \lambda(u,v) \qquad \forall v \in H_0^1(0,\pi), \tag{4}$$

где

$$a(u,v) = \int\limits_0^\pi u'v' + q(x)uvdx, \quad (u,v) = \int\limits_0^\pi uvdx.$$

Определим линейный непрерывный самосопряженный оператор $T : L_2(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi)$, поставив в соответствие произвольной функции $f \in L_2(0,\pi)$ единственное решение $u \in H_0^1(0,\pi)$ вариационной задачи

$$a(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in H_0^1(0,\pi).$$

Поскольку по теореме вложения Соболева пространство $H_0^1(0,\pi)$ компактно вложено в $L_2(0,\pi)$, то оператор T является компактным оператором в пространстве $H_0^1(0,\pi)$. Если λ — с. з., а u — соответствующая с. ф. задачи (4), то

$$Tu = \frac{1}{\lambda}u.$$

Таким образом, вариационная задача на собственные значения (4) эквивалентна задаче на собственные значения для компактного в пространстве $H_0^1(0,\pi)$ оператора T. Наибольшее с. з. $\mu_1 = 1/\lambda_1$ и соответствующую с. ф. оператора T можно найти с помощью следующего итерационного процесса, являющегося обобщением степенного метода нахождения наибольшего по модулю с. з. матрицы (конечномерного оператора) на случай компактного оператора:

$$\begin{aligned} &v^{(k+1)} = Tu^k, \\ &\mu^{(k)} = (v^{(k+1)}, u^{(k)}), \\ &u^{(k+1)} = v^{(k+1)}/||v^{(k+1)}||, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{5}$$

где $(\cdot,\cdot)$, $||\cdot||$ — скалярное произведение и норма в $L_2(0,\pi)$, $u^{(0)}$ — произвольное начальное приближение.

Пусть $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис $L_2(0,\pi)$ из собственных функций задачи (4) и

$$u^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i, \quad ||u^{(0)}||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2.$$

Теорема. *Если начальное приближение $u^{(0)}$ выбрано так, что $\alpha_1 \neq 0$, то итерационный процесс (5) сходится:*

$$\mu^{(k)} = \mu_1 + O\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k}\right), \tag{6}$$

$$u^{(k)} = u_1 + O\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{k}\right). \tag{7}$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$u^{(k)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu_i^k u_i}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu_i^k u_i\right\|}, \quad \mu^{k+1} = (Tu^{(k)}, u^{(k)}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \mu_i^{2k+1}}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \mu_i^{2k}}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\alpha_1^2 \mu_1^{2k}} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \mu_i^{2k+1} = \mu_1 + \frac{1}{\alpha_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1}^2 \mu_{i+1} \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_1}\right)^{2k} \leqslant \mu_1 + \frac{\mu_2}{\alpha_1^2} ||u^{(0)}||^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k},$$

$$\frac{1}{\alpha_1^2 \mu_1^{2k}} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \mu_i^{2k} = 1 + \frac{1}{\alpha_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1}^2 \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_1}\right)^{2k} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha_1^2} ||u^{(0)}||^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k}.$$

Значит,

$$\mu^{(k+1)} = \frac{\mu_1 + O\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k}\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k}\right)} = \mu_1 + O\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k}\right).$$

Аналогично доказывается утверждение (7).

Пусть $\sigma > 0$ — некоторое вещественное число. Рассмотрим задачу на собственные значения со сдвигом σ. Найти такую пару $\{\nu, u\}$, $\nu \in \mathbf{R}$, $u \in H_0^1(0,\pi)$, что

$$a(u,v) - \sigma(u,v) = \nu(u,v) \qquad \forall v \in H_0^1(0,\pi). \tag{8}$$

Определим линейный непрерывный самосопряженный оператор $T_\sigma : L_2(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi)$, ставя в соответствие произвольной функции $f \in L_2(0,\pi)$ единственное решение $u \in H_0^1(0,\pi)$ вариационной задачи

$$a(u,v) - \sigma(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in H_0^1(0,\pi).$$

Задача (8) равносильна задаче на собственные значения для оператора T_σ (компактного в $H_0^1(0,\pi)$): найти такую пару $\{\nu, u\}$, $\nu \in \mathbf{R}$, $u \in H_0^1(0,\pi)$, что

$$T_\sigma u = \frac{1}{\nu} u.$$

Поскольку с. з. λ задачи (4) и с. з. ν задачи (8) связаны соотношением $\nu = \lambda - \sigma$, то ближайшее к σ с. з. λ_i, соответствующее минимальному по модулю с. з. $\nu_i = \lambda_i - \sigma$, можно найти, определяя максимальное по модулю с. з. $\frac{1}{\nu_i}$ оператора T_σ с помощью итерационного процесса (5) для оператора T_σ:

$$\begin{aligned} &v^{(k+1)} = T_\sigma u^k, \\ &\mu^{(k)} = (v^{(k+1)}, u^{(k)}), \\ &u^{(k+1)} = v^{(k+1)}/||v^{(k+1)}||, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{9}$$

где $u^{(0)}$ — начальное приближение, выбранное так, что $(u^{(0)}, u_i) \neq 0$. Согласно (6) и (7),

$$\mu^{(k)} = \frac{1}{\lambda_i - \sigma} + O\left(\left(\frac{\lambda_i - \sigma}{\lambda_{i+1} - \sigma}\right)^{2k}\right), \tag{10}$$

$$u^{(k)} = u_i + O\left(\left(\frac{\lambda_i - \sigma}{\lambda_{i+1} - \sigma}\right)^{k}\right). \tag{11}$$

Таким образом, для вычисления с. з. λ_i и соответствующей с. ф. u_i задачи Штурма—Лиувилля (1) надо выбрать сдвиг σ так, чтобы с. з. λ_i было к нему ближайшим. Для выбора сдвига σ и начального приближения $u^{(0)}$ воспользуемся асимптотическими формулами (2), (3) для с. з. и с. ф. задачи Штурма—Лиувилля (1). С другой стороны, из (10) и (11) следует, что скорость сходимости итерационного процесса (9) тем выше, чем ближе сдвиг σ к с. з. λ_i. Поэтому на каждом шаге итерационного алгоритма целесообразно выбирать в качестве сдвига $\sigma^{(k)}$ текущее приближение к с. з. λ_i.

Суммируя вышесказанное, получаем следующий итерационный алгоритм вычисления i-го с. з. и соответствующей с. ф. задачи Штурма—Лиувилля (1):

$$\begin{aligned}
&1.\quad \sigma^{(0)} = \left(i + \tfrac{c}{i}\right)^2, \text{ где } c = \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi q(\tau)d\tau,\\
&2.\quad u^{(0)} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin(ix),\\
&3.\quad v^{(k+1)} = T_{\sigma^{(k)}}u^k,\\
&4.\quad \mu^{(k)} = (v^{(k+1)}, u^{(k)}),\\
&5.\quad \sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} + \tfrac{1}{\mu^{(k)}},\\
&6.\quad u^{(k+1)} = v^{(k+1)}/||v^{(k+1)}||, \qquad k = 0,1,2,\ldots.
\end{aligned} \tag{12}$$

2. Вычислительный эксперимент. В работе [10] для задачи Штурма—Лиувилля (1) построена конечно-элементная аппроксимация с использованием тригонометрических функций-крышек

$$\varphi_i^g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(p(x-x_{i-1}))}{sin(\theta)}, & x_i - h < x < x_i,\\ -\frac{\sin(p(x-x_{i+1}))}{sin(\theta)}, & x_i < x < x_i + h,\\ 0, & |x - x_i| \geqslant h, \end{cases}$$

где $\theta = ph$, p — некоторый параметр, $h = \frac{\pi}{N}$ — шаг равномерной сетки промежутка $(0, \pi)$. Эта аппроксимация представляет собой обобщенную матричную задачу на с. з.

$$A_\theta u_\theta + F_\theta u_\theta = \Lambda^{(n)} B_\theta u_\theta, \tag{13}$$

где $n = N - 1$, A_θ, F_θ и B_θ — $n \times n$-матрицы с элементами

$$(A_\theta)_{i,i} = -2p^2(\cos\theta\sin\theta + \theta), \quad (A_\theta)_{i,i+1} = p^2(\sin\theta + \theta\cos\theta),$$

$$(B_\theta)_{i,i} = -2(-\cos\theta\sin\theta + \theta), \quad (B_\theta)_{i,i+1} = -\sin\theta + \theta\cos\theta,$$

$$(F_\theta)_{i,j} = -2p\sin^2(\theta)\int\limits_0^\pi q(x)\varphi_i^g(x)\varphi_j^g(x)dx.$$

Если $p = i$, то i-е с. з. $\Lambda_i^{(n)}$ обобщенной матричной задачи на с. з. (13) приближает с. з. λ_i, а соответственный собственный вектор (с.в.) u_θ — с. ф. u_i (j-я компонента с.в. u_θ приближает значение с. ф. $u_i(x)$ в узле $x_j = jh$). Отметим, что для нахождения $\Lambda_i^{(n)}$ надо найти все, или хотя бы i, с. з. матричной задачи (13). Проведенные в работе [10] вычислительные эксперименты показали, что ошибка с. з. $\Lambda_i^{(n)}$ имеет тот же порядок, что и ошибка с. з. $\widetilde{\Lambda}_i^{(n)}$, которое получено с помощью метода конечных элементов с линейными функциями-крышками на равномерной сетке с тем же шагом h, а затем уточнено методом простой асимптотической коррекции [7]:

$$\widetilde{\Lambda}_i^{(n)} - \lambda_i = O\left(\frac{i^2h^3}{\sin(ih)}\right).$$

Итерационный алгоритм (13) будет определен полностью, если определить метод нахождения функции $v^{(k+1)}$ по заданным $u^{(k)}$ и $\sigma^{(k)}$ из уравнения

Таблица 1

Погрешности различных с. з. для $q(x) = e^x$

i	λ_i	$\widetilde{\Lambda}_i^{(39)} - \lambda_i$	$\Lambda_i^{(39)} - \lambda_i$	$\lambda_{2,i}^{(39)} - \lambda_i$	$\lambda_{3,i}^{(39)} - \lambda_i$
1	4.896669	0.00236	0.00149	0.00438	0.00149
2	10.045190	0.00899	0.00536	0.00531	0.00531
3	16.019267	0.01281	0.01095	0.01055	0.01055
4	23.266271	0.01186	0.01655	0.01516	0.01516
6	43.220020	0.00925	0.02304	0.01831	0.01831
8	71.152998	0.00825	0.02743	0.01875	0.01875
10	107.11668	0.00747	0.03140	0.01890	0.01890
12	151.09604	0.00665	0.03452	0.01908	0.01908
14	203.08337	0.00572	0.03610	0.01931	0.01931
16	263.07507	0.00468	0.03559	0.01959	0.01959
18	331.06934	0.00348	0.03258	0.01995	0.01995
20	407.06524	0.00209	0.02689	0.02037	0.02037
25	632.05890	-0.00316	0.00308	0.02187	0.02187
30	907.05548	-0.01693	-0.02234	0.02414	0.02414
35	1232.05334	-0.09047	-0.03941	0.02693	0.02693
39	1528.05225	-1.00577	0.87170	-0.03658	-0.03658

$$v^{(k+1)} = T_{\sigma^{(k)}} u^k.$$

Функция $v^{(k+1)}$ находилась приближенно методом конечных элементов с тригонометрическими функциями-крышками на равномерной сетке. Для определения приближения $v_\theta^{(k+1)}$ к функции $v^{(k+1)}$ решалась следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$(A_\theta + F_\theta - \sigma^{(k)} B_\theta) v_\theta^{(k+1)} = B_\theta u_\theta^{(k)},$$

где $\theta = ih$.

Для того чтобы облегчить сравнение полученных результатов с результатами работ [7; 10], функция $q(x)$ в (1) выбиралась следующим образом: $q(x) = e^x$, $q(x) = (1+x)^{-2}$. Для $q(x) = e^x$ ($q(x) = (1+x)^{-2}$) и $n = 39$ в таблице 1 (таблице 2) приведены точные с. з. λ_i [9, с. 278] задачи Штурма—Лиувилля (1), абсолютные погрешности с. з. $\widetilde{\Lambda}_i^{(39)}$[7] и $\Lambda_i^{(39)}$ [10], а также абсолютные погрешности с. з. $\lambda_{2,i}^{(39)}$ и $\lambda_{3,i}^{(39)}$, которые получены, соответственно, за два и за три шага алгоритма (12).

В таблице 3 для $q(x) = (1 + x)^{-2}$ представлены точные с. з. λ_i задачи (1) и абсолютные погрешности с. з. $\lambda_{3,i}^{(n)}$ ($n = 39, 79, 159$), которые получены за три шага итерационного алгоритма (12).

Таблица 2

Погрешности различных с. з. для $q(x) = (x + 0.1)^{-2}$

i	λ_i	$\widetilde{\Lambda}_i^{(39)} - \lambda_i$	$\Lambda_i^{(39)} - \lambda_i$	$\lambda_{2,i}^{(39)} - \lambda_i$	$\lambda_{3,i}^{(39)} - \lambda_i$
1	1.519866	0.00029	0.00214	0.00020	0.00020
2	4.943310	0.00150	0.00100	0.00088	0.00088
3	10.284663	0.00361	0.00244	0.00208	0.00208
4	17.559958	0.00631	0.00447	0.00366	0.00366
6	37.964426	0.01223	0.00988	0.00742	0.00742
8	66.236448	0.01756	0.01653	0.01124	0.01124
10	102.42499	0.02161	0.02409	0.01458	0.01458
12	146.55961	0.02408	0.03254	0.01720	0.01720
14	198.65837	0.02469	0.04212	0.01901	0.01901
16	258.73262	0.02285	0.05319	0.01990	0.01990
18	326.78963	0.01750	0.06626	0.01983	0.01983
20	402.83424	0.00690	0.08218	0.01868	0.01868
25	627.91064	-0.06453	0.14263	0.00969	0.00969
30	902.95734	-0.29019	0.26871	-0.01323	-0.01323
35	1227.98778	-0.93816	0.63645	-0.05495	-0.05495
39	1524.00503	-2.34012	5.70790	0.63155	0.63155

В рассмотренном примере итерационный алгоритм (12) фактически сводится к степенному методу вычисления i-го с. з. и соответствующего с. в. конечномерной задачи на с. з. (13). Однако в отличие от [10] для приближенного вычисления λ_i не надо вычислять все или часть с. з. конечномерной задачи (13).

Отметим, что в [7] и [10] для вычисления элементов матрицы F_θ использовалась квадратурная формула Симпсона, а в проведенном вычислительном эксперименте — квадратурная формула Гаусса с двумя узлами.

Заключение. Рассмотрена задача Штурма—Лиувилля на конечном интервале, эквивалентная задаче на собственные значения для компактного самосопряженного положительного оператора в гильбертовом пространстве. Предложен итерационный алгоритм вычисления i-го с. з. и соответствующей с. ф. задачи Штурма—Лиувилля, обобщающий степенной метод нахождения наибольшего по модулю с. з. матрицы (конечномерного оператора) на случай компактного оператора. В проведенном вычислительном эксперименте предложенный алгоритм фактически сводится к итерационному алгоритму определения i-го с. з. конечноэлементной аппроксимации задачи Штурма—Лиувилля, представляющей собой обобщенную матричную задачу на собственные значения, только i-е с. з. которой является хорошим приближением с. з. исходной задачи.

Таблица 3

Погрешности различных с. з. для $q(x) = (x + 0.1)^{-2}$

при различных сетках

i	λ_i	$\lambda_{3,i}^{(39)} - \lambda_i$	$\lambda_{3,i}^{(79)} - \lambda_i$	$\lambda_{3,i}^{(159)} - \lambda_i$
1	1.519866	0.00020	0.00005	0.00001
2	4.943310	0.00088	0.00023	0.00006
3	10.284663	0.00208	0.00054	0.00014
4	17.559958	0.00366	0.00095	0.00024
6	37.964426	0.00742	0.00196	0.00050
8	66.236448	0.01124	0.00302	0.00078
10	102.42499	0.01458	0.00399	0.00104
12	146.55961	0.01720	0.00484	0.00127
14	198.65837	0.01901	0.00554	0.00148
16	258.73262	0.01990	0.00609	0.00165
18	326.78963	0.01983	0.00651	0.00179
20	402.83424	0.01868	0.00680	0.00191
25	627.91064	0.00969	0.00705	0.00213
30	902.95734	-0.01323	0.00663	0.00225
35	1227.98778	-0.05495	0.00552	0.00230
39	1524.00503	0.63155	0.00402	0.00232

1. **Винокуров В. А.** Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом / В. А. Винокуров, В. А. Садовничий // Изв. РАН. Сер. матем. – 2000. – Т. 64, вып. 4. – С. 47–108.
2. **Левитан Б. М.** Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака / Б. М. Левитан, И. С. Сарксян. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 432 с.
3. **Макаров В. Л.** О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма—Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами / В. Л. Макаров // ДАН СССР, Сер. матем. – 1991. – Т. 320, № 1. – С. 34–39.
4. **Макаров В. Л.** Нові властивості FD-методу при його застосуваннях до задач Штурма—Ліувілля / В. Л. Макаров, Н. М. Романюк // Доп. НАН України. – 2014. – № 2. – С. 26–31.
5. **Марченко В. А.** Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. – Киев: Наук. думка, 1977. – 331 с.
6. **Приказчиков В. Г.** Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма—Лиувилля / В. Г. Приказчиков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. – Т. 9, № 2. – С. 315—336.

7. **Paine J. W.** On the correction of finite difference eigenvalue approximations for Sturm–Liouville problems / J. W. Paine, F. R. de Hoog, R. S. Anderssen // Computing. – 1981. – Vol. 26, i. 2. – P. 123–139.

8. **Prikazchikov V. G.** High-accuracy finite-element method for the Sturm–Liouville problem / V. G. Prikazchikov, M. V. Loseva // Cybernetics and Systems Analysis. – Vol. 40, No. 1. – 2004. – P. 1–6.

9. **Pryce John D.** Numerical Solution of Sturm–Liouville Problems / John D. Pryce. – Oxford University Press. – 1993. – 322 p.

10. **Vanden Berghe G.** A finite-element estimate with trigonometric hat functions for Sturm–Liouville eigenvalues / G. Vanden Berghe, H. De Meyer // J. of Comput. and Applied Mathematics. – 1994. – Vol. 53. – P. 389–396.

Вербіцький В. В., Іваніщева І. М.

Ітераційний алгоритм обчислення власних значень і власних функцій задачі Штурма–Ліувілля

Резюме

Запропоновано ітераційний алгоритм обчислення i-го власного значення (в. з.) і відповідної власної функції (в. ф.) задачі Штурма—Ліувілля на скінченному інтервалі. Алгоритм використовує відомі асимптотичні формули для в. з. і в. ф. задачі Штурма—Ліувілля. Кожна ітерація алгоритму вимагає розв'язання крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку. Ліва частина цього рівняння є диференціальним оператором лівої частини рівняння Штурма—Ліувілля з деяким зсувом, а права — наближенням до шуканої в. ф. Наведено приклад, в якому згадана крайова задача вирішувалася методом скінченних елементів з тригонометричними функціями-кришками, визначеними на рівномірній сітці. У цьому прикладі запропонований алгоритм фактично зводиться до ітераційного алгоритму визначення i-го в. з. скінченно-елементної апроксимації задачі Штурма—Ліувілля, що є узагальненою матричною задачею на в. з., тільки i-е в. з. якої наближає в. з. вихідної задачі.

Ключові слова: задача Штурма—Ліувілля, власне значення, асимптотичні формули для власних значень, метод скінченних елементів .

Verbitskyi V. V., Ivanischeva I. N.

An iterative algorithm for calculation of eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem

Summary

An iterative algorithm for computing the i-th eigenvalue (e. v.) and the corresponding eigenfunction (e. f.) of the Sturm–Liouville problem on a finite interval is proposed. The algorithm uses the well-known asymptotic formulas for e. v and e. f. of the Sturm–Liouville problem. Each iteration of the algorithm requires the solution of the boundary value problem for a second-order differential equation. The left-hand side of this equation is the differential operator of the left-hand side of the Sturm–Liouville equation with some shift, and the right-hand side is an approximation to the desired e. f. An example is given in which the boundary value problem was solved by the finite elements method with trigonometric hat functions, defined on a uniform mesh. In this example, the proposed algorithm actually reduces to an iterative algorithm for determining the i-th e. v. of a finite-element approximation of the Sturm–Liouville problem, which is a generalized matrix problem on an eigenvalue, only the i-th e. v. of which approximates e. v. of the original problem.

Key words: Sturm–Liouville problem, eigenvalue, asymptotic formulas for eigenvalues, finite element method.

References

1. Vinokurov, V. A., Sadovnichy, V. A. (2000). Asimptotika lyubogo poryadka sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy krayevoy zadachi Shturma – Liuvillya na otrezke s summiruyemym potentsialom [Asymptotics of any order of proper values and eigenfunctions of the Sturm – Liouville boundary value problem on the interval with summable potential]. *Izv. RAN. Ser. matem.*, Vol. 64, № 4, P. 47–108.
2. Levitan, B. M., Sarkisian, I. S. (1988). *Operatory Shturma – Liuvillya i Diraka [Operators of Sturm – Liouville and Dirac].* Moscow, Nauka. 432 p.
3. Makarov, V. L. (1991). O funktsional'no-raznostnom metode proizvol'nogo poryadka tochnosti resheniya zadachi Shturma – Liuvillya s kusochno-gladkimi koeffitsiyentami [On a functional-difference method of an arbitrary order of accuracy for the solution of the Sturm – Liouville problem with piecewise smooth coefficients]. *DAN SSSR, Ser. matem.,* Vol. 320, № 1, P. 34–39.
4. Makarov, V. L., Romanyuk, N. M. (2014). Novi vlastyvosti FD-metodu pry yoho zastosuvannyakh do zadach Shturma – Liuvillya [New properties of FD-method in its applications to Sturm – Liouville tasks]. *Rep. of the National Academy of Sciences of Ukraine,* № 2, P. 26–31.
5. Marchenko, V. A. (1977). *Operatory Shturma – Liuvillya i ikh prilozheniya [Operators of Sturm – Liouville and their applications].* Kyev: Nauk. dumka, 331 p.
6. Prikazchikov, V. G. (1969). Odnorodnyye raznostnyye skhemy vysokogo poryadka tochnosti dlya zadachi Shturma – Liuvillya [Homogeneous difference schemes of high order of accuracy for the Sturm – Liouville problem]. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* Vol. 9, № 2, P. 315—336.
7. Paine, J. W., de Hoog, F. R. and Anderssen, R. S. (1981). On the correction of finite difference eigenvalue approximations for Sturm – Liouville problems. *Computing,* Vol. 26, i. 2, P. 123–139.
8. Prikazchikov, V. G., Loseva, M. V. (2004). High-accuracy finite-element method for the Sturm – Liouville problem. *Cybernetics and Systems Analysis.* Vol. 40, №. 1, P. 1–6.
9. Pryce, John D. (1993). *Numerical Solution of Sturm – Liouville Problems.* Oxford University Press, 322 p.
10. Vanden, Berghe G., De Meyer, H. (1994). A finite-element estimate with trigonometric hat functions for Sturm – Liouville eigenvalues. *J. of Comput. and Applied Mathematics,* Vol. 53, P. 389-396.