Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 23–32

УДК 539.3

П. П. Вагін, І. Я. Козій, Р. Б. Малець, Г. А. Шинкаренко
Львівський національний університет імені Івана Франка

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВІВ ТА СТИСНЕННЯ

Сформульовано лінійну початково-крайову задачу для тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення (шестимодальний варіант). Записано ключові рівняння для визначення нестаціонарного термопружного стану розглядуваних оболонок. Особливість використаної моделі полягає в тому, що за основу взята кінематична гіпотеза оболонок типу Тимошенка—Міндліна (п'ятимодальний варіант), згідно з якою нормальний елемент недеформованої оболонки після її навантаження залишається прямолінійним, але може змінювати свою довжину і не бути ортогональним до деформованої серединної поверхні. Чисельно розв'язано задачу визначення термонапружень пластини, що перебуває в умовах нерівномірного нагріву. Розглянуто випадок, коли пластина нагрівається шляхом теплообміну згідно з законом Ньютона з середовищем, температура якого описується нормально–круговим законом. Здійснено порівняльний аналіз отриманих чисельних розв'язків з розв'язками, наведеними в літературі.
MSC: 74R10.
Ключові слова: оболонка, термопружність, метод скінченних елементів .
DOI: 10.18524/2519–206х.2018.1.134615.

Вступ. Дослідження пружно-деформівного стану оболонок, які перебувають під дією термосилових навантажень, має важливе значення для прикладних застосувань, так як багато конструкцій сучасного машинобудування містять оболонки в якості складових елементів.

В працях [2, 3, 9] побудовано початково-крайові та відповідні варіаційні задачі динаміки та статики оболонок під дією силових навантажень. Основна особливість використаного в цих працях підходу полягає в напівдискретизації вектора зміщень пружного тіла за змінною товщини на основі кінематичних гіпотез Тимошенка—Міндліна зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні. Результуючі співвідношення моделі містять як невідомі компоненти вектора узагальнених переміщень, а саме: зміщення серединної поверхні оболонки та повороти її нормалі. Сукупність результатів праць [2,3,9] служить ґрунтовною основою для продовження дослідження цього класу моделей оболонок. В даній статті здійснюється спроба врахувати ефекти впливу нерівномірного змінного в часі температурного поля в згаданій моделі оболонок.

Основні результати

1. Геометрія та основні співвідношення теорії тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення. Розглянемо оболонку як тривимірне тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими мала у порівнянні з іншими розмірами тіла. Серединну поверхню оболонки Ω віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, що $|\alpha_3| \leqslant \frac{h}{2}$, де h — товщина оболонки. Вважаємо, що

Надійшла 07.03.2018

координатні лінії α_1, α_2 збігаються з лініями головних кривин. Позначимо через Γ межу серединної поверхні Ω . Тоді точки оболонки визначатимуться множиною

$$V = \Omega \times]-h/2, h/2[,$$

межа S якої складається з лицьових поверхонь

$$\Omega_{\pm} = \Omega \times \{-h/2, h/2\}$$

та бічної поверхні

$$\Sigma = \Gamma \times]-h/2, h/2[.$$

Нехай компоненти зовнішнього навантаження, що діє на оболонку, залежать як від координат $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$, так і від часу t , тоді викликані ними переміщення $U = \{U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)\}_{i=1}^3$, деформації та напруження теж є функціями часу. З огляду на малу у порівнянні з іншими характерними розмірами оболонки товщину h, розгорнемо вектор зміщень точок оболонки за формулою Маклорена в околі серединної поверхні зі збереженням лінійних членів. Тоді

$$U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) = u_i(\alpha, t) + \alpha_3 \gamma_i(\alpha, t) + O(h^2), i = 1, 2, 3.$$

Тут $u_i(\alpha, t) = U_i(\alpha_1, \alpha_2, 0, t)$ описують зміщення точок серединної поверхні Ω в часі, а $\gamma_i(\alpha, t) = \partial_3 U_i(\alpha_1, \alpha_2, 0, t)$ визначають кут повороту нормалі незалежно від u_i . Тут і надалі прийнято позначення $\partial_i = \partial/\partial\alpha_i$. Таким чином, для нестаціонарного аналізу термопружного стану оболонок, податливих до зсувів та стиснення, потрібно записати систему з шести рівнянь динамічної рівноваги для визначення вектора узагальнених переміщень серединної поверхні $u\,(t) = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ та доповнити її відповідними крайовими умовами на межі серединної поверхні.

Деформаційні співвідношення, що пов'язують компоненти тензора лінійної деформації з переміщеннями, подамо для зручності у матричному вигляді

$$e = C_l u,$$

де через $e = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23})^T$ позначено вектор компонент тензора лінійної деформації, який складається з тангенціальних $e_{ij}\,(u)$ та згинних $\kappa_{ij}\,(u)$ складових; C_l — матриця диференціальних операторів наведена в [2].

Припустимо, що оболонка піддається дії об'ємної сили $\{F_i\}_{i=1}^3$ в області V, поверхневих навантажень $\left\{\sigma_i^{\pm h/2}\right\}_{i=1}^3$, прикладених до поверхонь $\Omega_{\pm}$, і поверхневих напружень $\left\{\sigma_t^{\Sigma}, \sigma_s^{\Sigma}, \sigma_n^{\Sigma}\right\}$ ($\vec{t}$, $\vec{s}$, $\vec{n}$ — орти правої трійки криволінійних координат) на частині Σ_σ поверхні Σ, причому $\Sigma_\sigma = \Gamma_\sigma \times]-h/2, h/2[$. На решті бічної поверхні $\Sigma_u = \Sigma \backslash \Sigma_\sigma$ задані переміщення $u|_{\Sigma_u} = \{u_i^g\}_{i=1}^6$.

На відміну від математичних моделей оболонок Тимошенка—Міндліна (п'ятимодальний варіант) [7], постулювання ненульової компоненти γ_3 дозволяє моделювати пружно-деформівний стан оболонки з врахуванням апроксимації σ_{33}.

Введемо інтегральні характеристики напружень σ_{ij}

$$[N_{ij}, M_{ij}] = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}\left(1+\alpha_3 k_{3-i}\right)[1,\alpha_3]\, d\alpha_3, \quad N_{33} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33}\left(1+\alpha_3 k_1\right)\left(1+\alpha_3 k_2\right) d\alpha_3,$$

$$[N_{i3}, M_{i3}] = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{i3}\left(1+\alpha_3 k_{3-i}\right)[1,\alpha_3]\, d\alpha_3, \quad i,j=1,2.$$

Надалі будемо використовувати умову рівності з точністю до $O\left(h^2\right)$ крутних моментів

$$H = M_{12} = M_{21}$$

та симетричне зусилля Новожилова [6,7]

$$S = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12}.$$

Тоді вектор внутрішніх зусиль і моментів оболонки, що породжені вектором узагальнених переміщень, можна записати:

$$\sigma = \left(N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23}\right)^T.$$

Рівняння руху тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення в термінах зусиль і моментів мають вигляд [1,2]

$$-A_1A_2\rho h\ddot{u}_1 + \partial_1\left(N_{11}A_2\right) - N_{22}\partial_1 A_2 + S\partial_2 A_1 + \frac{1}{2}\left(\partial_2\left(Hk_1A_1\right) + Hk_2\partial_2 A_1\right) +$$
$$+k_1A_1A_2N_{13} + A_1\partial_2 S = -P_1A_1A_2,$$
$$-A_1A_2\rho h\ddot{u}_2 + \partial_2\left(N_{22}A_1\right) - N_{11}\partial_2 A_1 + S\partial_1 A_2 + \frac{1}{2}\left(\partial_1\left(Hk_2A_2\right) + Hk_1\partial_1 A_2\right) +$$
$$+k_2A_1A_2N_{23} + A_2\partial_1 S = -P_2A_1A_2,$$
$$-A_1A_2\rho h\ddot{u}_3 + \partial_1\left(N_{13}A_2\right) + \partial_2\left(N_{23}A_1\right) - A_1A_2\left(N_{11}k_1 + N_{22}k_2\right) = -P_3A_1A_2,$$
$$-A_1A_2\rho\frac{h^3}{12}\ddot{\gamma}_1 + \partial_1\left(M_{11}A_2\right) - M_{22}\partial_1 A_2 + H\partial_2 A_1 - A_1A_2N_{13} + A_1\partial_2 H = -A_1A_2m_1,$$
$$-A_1A_2\rho\frac{h^3}{12}\ddot{\gamma}_2 + \partial_2\left(M_{22}A_1\right) - M_{11}\partial_2 A_1 + H\partial_1 A_2 - A_1A_2N_{23} + A_2\partial_1 H = -A_1A_2m_2,$$
$$-A_1A_2\rho\frac{h^3}{12}\ddot{\gamma}_3 + \partial_1\left(A_2M_{13}\right) + \partial_2\left(A_1M_{23}\right) - A_1A_2\left(N_{33} + k_1M_{11} + k_2M_{22}\right) = -A_1A_2m_3,$$

де $A_i = A_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ і $k_i = k_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ — коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини поверхні Ω відповідно; ρ — густина матеріалу.

Крайові умови на напруження на частині контуру серединної поверхні Γ_σ $\left(\Gamma_\sigma \in \Gamma\right)$ записуються наступним чином:

$$N_t = N_{11}\cos^2\left(n,\alpha_1\right) + N_{22}\sin^2\left(n,\alpha_1\right) + S\sin 2\left(n,\alpha_1\right) + \tfrac{1}{2}H\left(k_1+k_2\right)\sin 2\left(n,\alpha_1\right),$$

$$N_s = \tfrac{1}{2}\left(N_{22} - N_{11}\right)\sin 2\left(n,\alpha_1\right) + S\cos 2\left(n,\alpha_1\right) + H\left(k_2\cos^2\left(n,\alpha_1\right) - k_1\sin^2\left(n,\alpha_1\right)\right),$$

$$N_n = N_{13}\cos\left(n,\alpha_1\right) + N_{23}\sin\left(n,\alpha_1\right),$$

$$M_t = M_{11}\cos^2\left(n,\alpha_1\right) + M_{22}\sin^2\left(n,\alpha_1\right) + H\sin 2\left(n,\alpha_1\right),$$

$$M_s = \tfrac{1}{2}\left(M_{22} - M_{11}\right)\sin 2\left(n,\alpha_1\right) + H\cos 2\left(n,\alpha_1\right),$$

$$M_n = M_{13}\cos\left(n,\alpha_1\right) + M_{23}\sin\left(n,\alpha_1\right).$$

Через (n,α_1) позначено кут між нормаллю до Γ та напрямком α_1, а також вище використано наступні позначення усереднених характеристик навантаження:

$$P_i = \left(1+\tfrac{h}{2}k_1\right)\left(1+\tfrac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{+h/2} - \left(1-\tfrac{h}{2}k_1\right)\left(1-\tfrac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{-h/2} +$$

$$+\int\limits_{-h/2}^{h/2} F_i\left(1+\alpha_3 k_1\right)\left(1+\alpha_3 k_2\right)d\alpha_3,$$

$$m_i = \tfrac{h}{2}\left(\left(1+\tfrac{h}{2}k_1\right)\left(1+\tfrac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{+h/2} - \left(1-\tfrac{h}{2}k_1\right)\left(1-\tfrac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{-h/2}\right) +$$

$$+\int\limits_{-h/2}^{h/2} F_i\left(1+\alpha\ {}_3 k_1\right)\left(1+\alpha_3 k_2\right)\alpha_3 d\alpha_3,$$

$$[N_t, M_t] = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_t^{\Sigma}\left(1+\alpha_3 k_t\right)[1,\alpha_3]d\alpha_3, \quad [N_s, M_s] = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_s^{\Sigma}\left(1+\alpha_3 k_s\right)[1,\alpha_3]d\alpha_3,$$

$$[N_n, M_n] = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_n^{\Sigma}\left[1,\alpha_3\right]d\alpha_3, \qquad i = 1,2,3.$$

Під k_t треба розуміти кривину бічної поверхні оболонки в напрямку нормалі до кривої Γ_σ (контуру серединної поверхні), а під k_s — кривину бічної поверхні в напрямку дотичної до Γ_σ.

Для встановлення кінематичної визначеності розглядуваної моделі оболонок необхідно додати крайові умови в зміщеннях на частині контуру серединної поверхні $\Gamma_u = \Gamma \backslash \Gamma_\sigma$:

$$u_t^g = u_1\cos\left(n,\alpha_1\right) + u_2\sin\left(n,\alpha_1\right),$$

$$u_s^g = -u_1\sin\left(n,\alpha_1\right) + u_2\cos\left(n,\alpha_1\right),$$

$$u_n^g = -u_3,$$

$$\gamma_t^g = \gamma_1\cos\left(n,\alpha_1\right) + \gamma_2\sin\left(n,\alpha_1\right),$$

$$\gamma_s^g = -\gamma_1\sin\left(n,\alpha_1\right) + \gamma_2\cos\left(n,\alpha_1\right),$$

$$\gamma_n^g = \gamma_3.$$

Введені усереднені характеристики навантаження об'єднаємо у вектори:

$P = \left(P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3\right)^T$ — вектор зовнішнього навантаження;

$\sigma_g = (N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n)^T$ — вектор крайових зусиль-моментів;

$u_g = (u_t^g, u_s^g, u_n^g, \gamma_t^g, \gamma_s^g, \gamma_n^g)^T$ — вектор крайових зміщень.

Тоді, для подальшого використання чисельних методів, систему рівнянь руху оболонок, податливих до зсувів та стиснення, статичні та кінематичні крайові умови запишемо для зручності у матричному вигляді [2,3]:

$$C_\sigma \sigma + P - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad \forall t \in (0, T],$$

$$G_\sigma \sigma|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_g, \quad G_u u|_{\Gamma_u} = u_g, \quad \forall t \in [0, T],$$

де $m = diag\left(\rho h, \rho h, \rho h, \rho\frac{h^3}{12}, \rho\frac{h^3}{12}, \rho\frac{h^3}{12}\right)$.

Для однозначного інтегрування системи рівнянь, крім статичних та геометричних крайових умов необхідно задати ще початкові умови

$$u(\alpha, 0) = u^0(\alpha), \qquad \dot{u}(\alpha, 0) = u^1(\alpha).$$

Вважаємо також, що оболонка є лінійно пружною і знаходиться в нерівномірному температурному полі $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Тоді, згідно гіпотези Дюгамеля-Неймана, для ізотропного матеріалу оболонки компоненти внутрішніх зусиль і моментів та деформацій будуть пов'язані між собою наступними залежностями [4, 8]:

$$N_{11} = D_N\left((1-\nu)e_{11} + \nu(e_{22} + e_{33}) - (1+\nu)\alpha_T T_1\right),$$

$$N_{22} = D_N\left((1-\nu)e_{22} + \nu(e_{11} + e_{33}) - (1+\nu)\alpha_T T_1\right),$$

$$N_{33} = D_N\left((1-\nu)e_{33} + \nu(e_{11} + e_{22}) - (1+\nu)\alpha_T T_1\right),$$

$$S = D_N(1-2\nu)e_{12}, \quad N_{13} = D_N(1-2\nu)e_{13}, \quad N_{23} = D_N(1-2\nu)e_{23},$$

$$M_{11} = D_M\left((1-\nu)\kappa_{11} + \nu\kappa_{22} - (1+\nu)\alpha_T T_2\right),$$

$$M_{22} = D_M\left((1-\nu)\kappa_{22} + \nu\kappa_{11} - (1+\nu)\alpha_T T_2\right),$$

$$H = D_M(1-2\nu)\kappa_{12}, \quad M_{13} = D_M(1-2\nu)\kappa_{13}, \quad M_{23} = D_M(1-2\nu)\kappa_{23},$$

де $D_N = \frac{Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $D_M = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)}$ — тангенціальна та згинна жорсткість; $T_1 = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}(T - T_0)\,d\alpha_3$, $T_2 = \frac{12}{h^3}\int\limits_{-h/2}^{h/2}(T - T_0)\,\alpha_3 d\alpha_3$ — усереднені температурні характеристики, E — модуль Юнга, ν — коефіцієнт Пуассона; α_T — коефіцієнт лінійного температурного розширення, T_0 — початкове значення температури.

Якщо ввести вектор $\Phi = \left(hT_1, hT_1, hT_1, 0, 0, 0, \frac{h^3}{12}T_2, \frac{h^3}{12}T_2, 0, 0, 0\right)^T$, то вище наведений зв'язок у матричному записі, буде мати вигляд [9]:

$$\sigma = B - \frac{\alpha_T E}{1-2\nu}\Phi.$$

Тут B — матриця пружних постійних [2].

2. Варіаційна задача. Розв'язування задачі про нестаціонарне термопружне деформування тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення, пропонується методом скінченних елементів [1]. Тому сформулюємо варіаційну постановку початково-крайової задачі лінійної теорії розглядуваних оболонок.

Не зменшуючи загальності, допускатимемо, що частина Γ_u бічної поверхні оболонки жорстко защемлена, тобто

$$G_u u|_{\Gamma_u} = 0.$$

Введемо функціональні простори $G = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[L^2(\Omega)\right]^6 \right\}$ та $V = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[W_2^1(\Omega)\right]^6 \ : \ v|_{\Gamma_u} = 0 \right\}$ з нормою

$$\|v\|_V^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\|v_i\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|\xi_i\|^2_{W_2^1(\Omega)} \right)$$

та позначимо через V' простір, спряжений до простору V .

Тут $W_2^1(\Omega)$ — простір Соболєва функцій, квадрати яких разом зі своїми першими похідними інтегровані за Лебегом в області Ω .

Вважаємо, що дані задачі задовольняють включення: $\theta = (T_1, T_2)^T \in \left[L^2(\Omega)\right]^2$, $\sigma_g \in \left[L^2(\Omega)\right]^6$, $P \in \left[L^2(\Omega)\right]^6$, $u^0 \in V$, $u^1 \in G$. Фіксуючи момент часу $t \in (0, T]$, $0 < T < +\infty$, помножимо скалярно рівняння руху на довільний вектор $v \in V$ і проінтегруємо результат по області Ω. Отримаємо наступне варіаційне рівняння:

$$\mu\left(\ddot{u}(t), \nu\right) + a\left(u(t), \nu\right) = \left\langle L(t), \nu \right\rangle, \qquad \forall t \in (0, T].$$

Тут білінійні форми $a(u, \nu)$, $\mu(u, \nu)$ та лінійний функціонал $\langle L, \nu \rangle$ мають наступний вигляд:

$$a(u, v) = \iint_\Omega (C_l v)^T E_0 B C_l u d\Omega,$$

$$\mu(u, v) = \iint_\Omega \rho \left(\sum_{i=1}^{3} \left(u_i v_i + \frac{h^2}{12} \gamma_i \xi_i \right) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\langle L, v \rangle = \langle l, v \rangle + \langle b, v \rangle,$$

$$\langle l, \nu \rangle = \sum_{i=1}^{3} \iint_\Omega \left(P_i \nu_i + m_i \xi_i \right) d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \left(N_t \nu_t + N_s \nu_s + N_n \nu_n + M_t \xi_t + M_s \xi_s + M_n \xi_n \right) d\Gamma,$$

$$\langle b, \nu \rangle = \iint_\Omega (C_l \nu)^T \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} \Phi(\theta) \, d\Omega.$$

Сформулюємо варіаційну постановку початково-крайової задачі лінійної теорії тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення.

Задано $l \in L^2(0, T; V')$, $u^0 \in V$, $u^1 \in G$, $\theta \in \left[L^2(\Omega)\right]^2$.

Знайти вектор узагальнених переміщень $u \in L^2(0, T; V)$ такий, що

$$\mu\left(\ddot{u}(t), \nu\right) + a\left(u(t), \nu\right) = \left\langle L(t), \nu \right\rangle, \qquad \forall t \in (0, T],$$

$$\mu\left(\dot{u}(0)-u^1,\nu\right)=0,\quad a\left(u(0)-u^0,\nu\right)=0,\quad \forall\nu\in V.$$

Для інтегрування в часі отриманої задачі Коші можливе застосування різних методів. В даній праці розв'язування задачі здійснюється методом прямого інтегрування, який базується на схемі Ньюмарка [1].

3. Числовий приклад. Досліджували задачу визначення термонапружень пластини, що перебуває в умовах нерівномірного нагріву. Розглядався випадок, коли пластина нагрівається шляхом теплообміну згідно з законом Ньютона з середовищем, температура якого описується нормально-круговим законом $T=T_m e^{-kr^2}$, де T_m — максимальна температура, k — коефіцієнт, який характеризує зосередженість нагріву.

Для безмежної пластини в припущенні, що температура разом зі своїми похідними на нескінченності зникає та в початковий момент часу дорівнює нулю, співвідношення для визначення температурного поля в полярній системі координат (r,φ) мають вигляд

$$\left(\Delta-m^2-\frac{\partial}{\partial t}\right)T=-m^2T_m e^{-kr^2},$$

де $m^2=\frac{4Bi}{h^2}$, Bi — критерій Біо. Температура і пружні напруження для такої задачі визначені в [5]:

$$T(r,t)=m^2T_m\int_0^t\frac{1}{1+4k\eta}e^{-m^2\eta-\frac{kr^2}{1+4k\eta}}d\eta,$$

$$\sigma_r=-\frac{\alpha_T E m^2 T_m}{2kr^2}\int_0^t e^{-m^2\eta}\left(1-e^{-kr^2/1+4k\eta}\right)d\eta,$$

$$\sigma_\varphi=-\sigma_r-\alpha_T ET,\qquad \tau_{r\varphi}=0.$$

Напруження в декартовій системі координат будуть

$$\sigma_{11}=\sigma_r\cos^2\varphi+\sigma_\varphi\sin^2\varphi-\tau_{r\varphi}\cos 2\varphi,$$

$$\sigma_{22}=\sigma_r\sin^2\varphi+\sigma_\varphi\cos^2\varphi-\tau_{r\varphi}\sin 2\varphi,$$

$$\sigma_{12}=(\sigma_r-\sigma_\varphi)\cos\varphi\sin\varphi.$$

У таблиці 1 наведено порівняння результатів розрахунку напружень для цієї задачі, розглянутих у праці [5] в межах теорії пружності для усталеного теплового режиму (при $t\to\infty$), із результатами реалізованої методом скінченних елементів моделі зсувних оболонок, описаної у даній роботі. Розрахунок проведений у випадку, коли $-0,075\leqslant\alpha_1,\alpha_2\leqslant 0,075$, модуль Юнга матеріалу пластини $E=2,1\cdot10^5$МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,33$, товщина $h=0,01$ м, коефіцієнт лінійного температурного розширення $\alpha_T=12\cdot10^{-6}$.

З огляду на симетричність задачі, розглядалася чверть пластини $-0,075\leqslant\alpha_1,\alpha_2\leqslant 0$. На межах $\alpha_1,\alpha_2=0$ задавалися умови симетрії, а на $\alpha_1,\alpha_2=-0,075$ напруження обчислені за формулами, наведеними у [5].

Таблиця 1

Термонапруження пластини в умовах нерівномірного нагріву

			Аналітичний розв'язок		МСЕ	
α_1	α_2	T	$\sigma_{11}\times 10^{-9}$Па	$\sigma_{22}\times 10^{-9}$Па	$\sigma_{11}\times 10^{-9}$Па	$\sigma_{22}\times 10^{-9}$Па
0	0	500.53	-0.631	-0.631	-0.624	-0.624
0	-0.0125	469.45	-0.572	-0.611	-0.599	-0.693
0	-0.025	387.49	-0.420	-0.556	-0.400	-0.575
0	-0.0375	281.90	-0.231	-0.480	-0.185	-0.495
0	-0.05	181.20	-0.040	-0.395	0.003	-0.427
0	-0.0625	103.27	0.056	-0.316	0.161	-0.297
0	-0.075	52.43	0.116	-0.248	0.230	-0.266
-0.0125	0	469.45	-0.611	-0.572	-0.693	-0.599
-0.025	0	387.49	-0.556	-0.420	-0.575	-0.400
-0.0375	0	281.90	-0.480	-0.231	-0.495	-0.185
-0.05	0	181.20	-0.395	-0.040	-0.427	0.003
-0.0625	0	103.27	-0.316	0.056	-0.297	0.161
-0.075	0	52.43	-0.248	0.116	-0.266	0.230

Висновки. У статті сформульовано початково-крайову задачу нестаціонарної термопружності. Математична модель заснована на лінійній теорії оболонок, податливих до зсувів та стиснення. Фізичні співвідношення відображають гіпотезу Дюгамеля—Неймана. Також сформульована відповідна варіаційна задача. Невідомими варіаційної задачі нестаціонарної термопружності оболонок, податливих до зсувів та стиснення, виступають вектор пружного зміщення точок серединної поверхні і вектор кутів повороту нормалі серединної поверхні.

З аналізу наведених результатів обчислень випливає, що пружні напруження, знайдені за уточненою теорією оболонок, податливих до зсувів та стиснення, практично повністю збігаються з аналітичними розв'язками, знайденими іншими авторами, в межах теорії пружності.

1. **Бате К.** Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.

2. **Вагін П. П.** Про вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення / П. П. Вагін, І. Я. Шот // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 177–184.

3. **Вагін П. П.** Про одну математичну модель динамічного деформування гнучких оболонок / П. П. Вагін, Н. В. Іванова, Г. А. Шинкаренко // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 54–59.

4. **Григоренко Я. М.** Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Я. М. Григоренко, А. П. Мукоед. – Киев: Вища школа, 1983. – 286 с.

5. **Коляно Ю. М.** Температурные напряжения в пластинке при двусторонней лазерной обработке / Ю. М. Коляно, И. И. Бернар // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 36–38.

6. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – Москва;Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1948. – 212 с.

7. **Пелех Б. Л.** Обобщенная теория оболочек / Б. Л. Пелех. – Львов: Вищ. шк., 1978. – 160 с.

8. **Подстригач Я. С.** Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. П. Швец. – Киев: Наукова думка, 1978. – 344 с.

9. **Vahin P. P.** Variational formulation of the problem of nonstationary thermoelasticity for thin shells compliant to shears and compression / P. P. Vahin, R. B. Malets', H. A. Shynkarenko // J. Math. Sci. – 2016. – 217, No. 3. – P. 345–364.

Вагин П. П., Козий И. Я., Малец Р. Б., Шинкаренко Г. А.
Исследование нестационарного термоупругого состояния оболочек, податливых к сдвигам и сжатию

Резюме

Сформулирована линейная начально-краевая задача для тонких оболочек, податливых к сдвигам и сжатию (шестимодальный вариант). Записаны ключевые уравнения для определения нестационарного термоупругого состояния рассматриваемых оболочек. Особенность использованной модели заключается в том, что за основу взята кинематическая гипотеза оболочек типа Тимошенко—Миндлина (пятимодальный вариант), согласно которой нормальный элемент недеформированной оболочки после ее нагружения остается прямолинейным, но может изменять свою длину и не быть ортогональным к деформированной срединной поверхности. Численно решена задача определения термонапряжений пластины, которая находится в условиях неравномерного нагрева. Рассмотрен случай, когда пластина нагревается путем теплообмена по закону Ньютона со средой, температура которой описывается нормально–круговым законом. Осуществлен сравнительный анализ полученных решений с решениями, приведенными в литературе.
Ключевые слова: оболочка, термоупругость, метод конечных элементов .

Vahin P. P., Koziy I. Y., Malets' R. B., Shynkarenko H. A.
Investigation of the non-stationary thermoelastic state of shells compliant to shears and compression

Summary

A linear boundary-value problem for thin shells compliant to shears and compression (a six-modal variant) is formulated. The key equations for determining the non-stationary thermoelastic state of the considered shells are recorded. The peculiarity of the used model is that the kinematic hypothesis of the shells of the Tymoshenko-Mindlin type (a five-modal variant) is taken as a basis, according to which the normal element of the deformed shell after its loading remains straightforward, but may change its length and not be orthogonal to the deformed median surface. Numerically solved the problem of determining the thermal stresses of a plate that is in uneven heating conditions. The case when the plate is heated by heat exchange in accordance with Newton's law with an environment whose temperature is described by a normal-circular law is considered. A comparative analysis of the obtained

numerical solutions with the solutions given in the literature is carried out.
Key words: shell, thermoelasticity, finite element method.

References

1. Bathe K.-J., Wilson E.L. (1976) *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. Vahin P.P., Shot I.Ya. (2012) On free vibrations of shells amenable to shear and compression // *Prykl. problemy mekh. i mat.*, No. 10, P. 177–184.
3. Vahin P.P., Ivanova N.V., Shynkarenko G.A. (1999) On a mathematical model of dynamic deformation of flexible shells // *Dopov. Nac. Akad. Nauk Ukr.*, № 6. – P. 54–59.
4. Grigorenko Ya.M., Mukoyed A.P. (1983) *Solving nonlinear problems in the theory of shells on computers* [in Russian], Vyshcha Shkola, Kiev.
5. Kolyano Yu.M., Bernar I.I. (1983) Temperature Stresses in a Plate under Bilateral Laser Treatment. // *Strength of Materials*, No. 5. – P. 36–38.
6. Novozhilov V.V. (1999) *Foundations of Nonlinear Elasticity Theory*, Dover, New York.
7. Pelekh B.L. (1978) *Generalized Theory of Shells* [in Russian], Vyshcha Shkola, Lviv.
8. Podstrigach Ya.S., Shvets R.N. (1978) *Thermoelasticity of thin shells* [in Russian], Naukova dumka, Kiev.
9. Vahin P.P., Malets' R.B., Shynkarenko H.A. (2016) Variational formulation of the problem of nonstationary thermoelasticity for thin shells compliant to shears and compression // *J. Math. Sci.*, 217, No. 3. – P. 345–364.